1. Systèmes d'équations

1.1. Systèmes d'équations linéaires

Un système d'équations **linéaires** est composé de plusieurs équations du type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

où a_i et b sont des nombres réels et les x_i sont les **inconnues** (aussi appelées **variables**).

Exemple

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 3x_1 - 5.4\,x_2 - x_3 & = & 3.4 \\
(2) & x_1 + 2\,x_2 & = & 0 \\
(3) & x_2 + x_3 & = & -2
\end{array}$$

C'est un système de trois équations à trois inconnues.

Résolution

Pour résoudre un tel système, on dispose de deux opérations :

1. la **substitution** d'une inconnue par une autre ou par une valeur ;
2. l'**addition d'un multiple d'une ligne au multiple d'une autre ligne**. Les coefficients multiplicatifs devront être choisis de façon à obtenir une nouvelle équation où au moins une inconnue aura été **éliminée**.

L'opération 2 est appelée **combinaison linéaire**.

Nous allons faire un exemple complet mettant en œuvre ces deux opérations.
Résolvons :

Remarque
Quand les inconnues sont peu nombreuses, on utilise volontiers les lettres x, y, z.

$$\begin{array}{lrrrcr}
(1) & 2x & -\ 5y & +\ z & = & -10 \\
(2) & x & +\ 2y & +\ 3z & = & 26 \\
(3) & -3x & -\ 4y & +\ 2z & = & 5
\end{array}$$

Décidons d'éliminer la variable x en combinant des lignes (1) et (2).

(4) = (1)
(5) = -2·(2)
Addition des deux lignes.

$$\begin{array}{lrrrcr}
(4) & 2x & -\ 5y & +\ z & = & -10 \\
(5) & \underline{-2x} & \underline{-\ 4y} & \underline{-\ 6z} & \underline{=} & \underline{-52} \\
(6) & & -\ 9y & -\ 5z & = & -62
\end{array}$$

Il faut maintenant une deuxième équation avec y et z comme variables.

(7) = 3·(2)
(8) = (3)
Addition des deux lignes.

$$\begin{array}{lrrrcr}
(7) & 3x & +\ 6y & +\ 9z & = & 78 \\
(8) & \underline{-3x} & \underline{-\ 4y} & \underline{+\ 2z} & \underline{=} & \underline{5} \\
(9) & & 2y & +11z & = & 83
\end{array}$$

Nous avons réussi à éliminer x. Nous nous retrouvons maintenant avec un système de deux équations avec deux inconnues (y et z).

$$\begin{array}{lrrcr}
(6) & -\ 9y & -\ 5z & = & -62 \\
(9) & 2y & +\ 11z & = & 83
\end{array}$$

On peut éliminer la variable y en multipliant la ligne (6) par 2 et la ligne (9) par 9, puis en additionnant les deux.

$$\begin{array}{lrrcr}
(10) & -18y & -\ 10z & = & -124 \\
(11) & \underline{18y} & \underline{+\ 99z} & \underline{=} & \underline{747} \\
 & & 89z & = & 623 \\
 & & z & = & 7
\end{array}$$

Nous avons trouvé la valeur de z. On peut substituer cette valeur dans l'équation (6) pour trouver la valeur de y.

$$(6) \quad -9y-5\cdot\underbrace{7}_{z}=-62 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{62-35}{9}=3$$

Enfin, en substituant les valeurs de y et z dans l'équation (2), on trouvera la valeur de x.

$$(2) \quad x+2\cdot\underbrace{3}_{y}+3\cdot\underbrace{7}_{z}=26 \quad \Rightarrow x = 26-6-21=-1$$

La solution est : $x = -1$, $y = 3$ et $z = 7$.

Prenez l'habitude de vérifier vos solutions en introduisant les valeurs trouvées dans <u>toutes</u> les équations du système de départ.

Remarques

1. Il n'y a pas de règles précises pour décider s'il faut faire une combinaison de lignes plutôt qu'une substitution ; il faut essayer l'opération qui paraît la plus simple.

2. Faites de même pour choisir les lignes à combiner : choisissez celles qui demandent le moins d'effort.

3. Attention de ne pas tourner en rond ! Décidez quelle variable éliminer et ne changez pas d'avis avant qu'elle ait disparu.

4. On ne trouve pas toujours une solution ; des équations sont parfois contradictoires. Par exemple :

Si on soustrait les deux lignes, on obtient 0 = 1.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Il n'y a pas non plus de solutions quand il y a plus d'équations indépendantes que d'inconnues. On dit que le système est **surdéterminé**.

Une équation **indépendante** ne peut pas être obtenue en combinant d'autres équations du système.

5. Il y a une infinité de solutions quand il y a plus d'inconnues que d'équations indépendantes : le système est dit **sous-déterminé**. Par exemple :

En combinant les deux lignes, on obtient 0 = 0.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Dans ce cas, il y a une infinité de solutions. Pour exprimer l'ensemble des solutions, on peut **choisir** la valeur d'une variable arbitrairement, et la valeur de l'autre sera déterminée d'après la valeur de la première :

Avoir une infinité de solutions ne signifie pas que tout est solution !

$x = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$
De la première ligne, on tire que $y = 1 - \lambda$

λ n'est pas une inconnue, mais un **paramètre**, c'est-à-dire une valeur que l'on peut choisir arbitrairement.

Soient n_i le nombre d'inconnues et n_e le nombre d'équations indépendantes. Le nombre $n = n_i - n_e$ est appelé **nombre de degrés de liberté**.

Si on a <u>deux</u> degrés de liberté, on peut choisir les valeurs de <u>deux</u> variables comme on veut. Dans l'exemple ci-dessus, $n = 2 - 1 = 1$ degré de liberté.

Exercice 1.1

Résolvez les systèmes linéaires suivants :

a. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = -2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - 2y = x + 4 \\ -1 + y = -5x + 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 4y = -2x - 1 \\ -6x - y = 2 + 7y \end{cases}$

Exercice 1.2

a. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ -x - y + 2z = 10 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y + z = x \\ -x - y - 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -x + 2z = 3 \\ y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + 2y = y \\ x = 4 \end{cases}$

Exercice 1.3

Un camion transporte 20 caisses de masse différente : les rouges pèsent 28 kilos, les bleues 16 kilos. Le chauffeur a pesé son chargement avant de partir : il avait un poids total de 416 kilos.
Combien y a-t-il de caisses de chaque couleur dans le camion ?

Exercice 1.4

Des amis mangent ensemble au restaurant. Au moment de payer l'addition, l'un d'entre eux fait le partage :
« Il faut donner 21 € chacun ! »
« Mais non ! », répond un autre, « il manquera 10,50 € sur le total. Donnons plutôt 25 € chacun ! »
« Alors, cette fois-ci cela fera trop : une différence en plus de 17,50 € sur le total », répond le premier.

Combien y a-t-il de convives et combien devront-ils payer chacun ?

Exercice 1.5

Résolvez et discutez le système suivant en fonction du paramètre *m*.

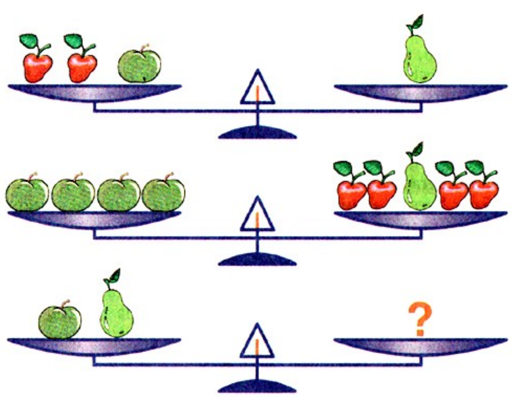
m n'est pas une inconnue !

$$\begin{cases} m^2 x + y = 2 \\ x + y = 2m \end{cases}$$

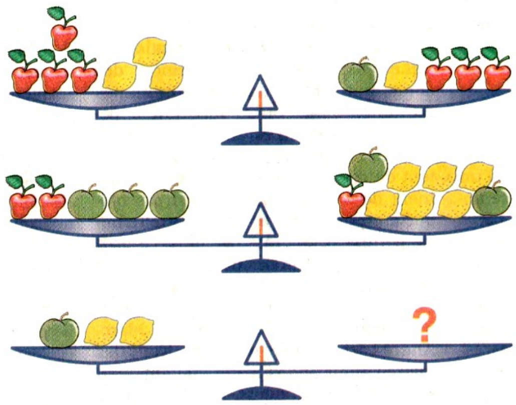
« Discuter » signifie repérer les valeurs de *m* où il se passe des choses « spéciales ».

Exercice 1.6 Combien faut-il de fraises pour équilibrer la troisième balance ?

a.



b.



1.2. Systèmes d'équations non linéaires

On est aussi amené à résoudre des systèmes d'équations qui ne sont pas (toutes) linéaires. Dans ce cas, la seule méthode de résolution qui fonctionne toujours est la **substitution** (on peut parfois manipuler les lignes, mais il faut être prudent).

Exemple Imaginons par exemple le système :

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 + y = 26 \\ (2) & x - y = 4 \end{array}$$

De (1) on peut tirer que $y = 26 - x^2$, et remplacer y dans l'équation (2) pour obtenir

$$x - \underbrace{(26 - x^2)}_{y} = 4$$

On aurait ici aussi pu calculer (1) + (2). On aurait retrouvé l'équation ci-contre.

On obtiendra ainsi une équation du second degré que l'on sait résoudre facilement :

$$x^2 + x - 30 = 0$$

On peut factoriser :

$$(x - 5)(x + 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5, \; x_2 = -6$$

Pour trouver les valeurs de y, il suffit de reprendre la relation $y = 26 - x^2$, et on trouve $y_1 = 26 - 25 = 1$ et $y_2 = 26 - 36 = -10$.

Exercice 1.7 Résolvez : $\begin{cases} (x + 2y)(x - y) & = & 0 \\ 2x - 5y & = & 1 \end{cases}$

Exercice 1.8

a. Trouvez deux entiers consécutifs dont le produit vaut 210.
b. Trouvez deux entiers dont la somme est 26 et le produit 165.

1.3. Ce qu'il faut absolument savoir

Reconnaître un système d'équations linéaires ❑ ok
Maîtriser les opérations sur les lignes d'un système d'équations linéaires ❑ ok
Maîtriser les substitutions ❑ ok