2. Déterminants

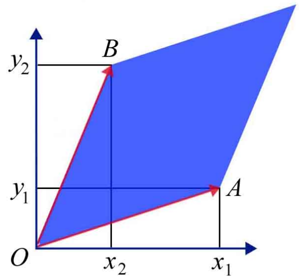
2.1. Définition

C'est Lewis **Carrol** (l'auteur d'*Alice aux pays des merveilles*), de son vrai nom Charles Lutwidge **Dodgson**, qui écrivit le premier ouvrage didactique sur les déterminants, en 1870.

On appelle **déterminant d'ordre deux**, et on note $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$, le nombre $x_1y_2 - x_2y_1$.

Ainsi $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 18$, mais $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 5 = -18$.

Dans un plan repéré d'origine O, considérons deux points A et B de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2). L'aire du parallélogramme construit sur OAB vaut exactement $x_1y_2 - x_2y_1$. **Démontrez-le à l'aide d'un dessin** (solution à la dernière page de ce chapitre) !



On constate qu'en inversant les deux colonnes, on trouve le résultat opposé. Le déterminant d'ordre deux peut donc être interprété comme une aire **signée**.
On peut facilement voir que le déterminant est nul si les trois points O, A et B sont alignés.

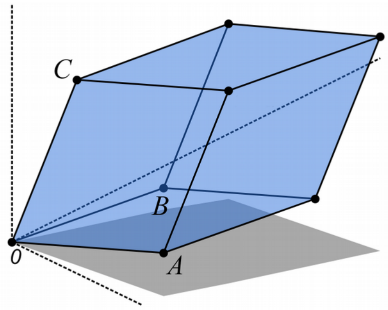
Exercice 2.1

Calculez les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}$

Joseph-Louis **Lagrange** (1736 - 1813)

Dans l'espace à trois dimensions, **Lagrange** avait réussi à montrer que le volume du parallélépipède construit sur le parallélépipède $OABC$ pouvait lui aussi s'exprimer en fonction des coordonnées des points A, B et C.



Voici l'expression qu'il avait trouvée pour ce volume :

$$V = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3 - z_1y_2x_3$$

Plus tard, vers 1850, on décida de noter ce nombre comme ceci :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

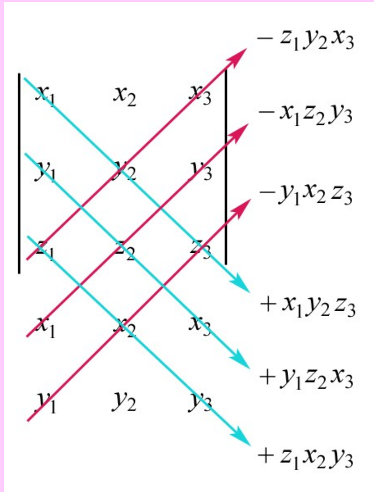
C'est un **déterminant d'ordre trois**.

Règle de Sarrus

Pierre Frédéric **Sarrus**
(1798–1861)

Attention ! La règle de Sarrus ne marche **que** pour des déterminants d'ordre trois.

La formule pour calculer un déterminant d'ordre 3 est difficile à retenir. La règle de Sarrus permet d'éviter de l'apprendre par cœur.
On recopie sous le déterminant les deux premières lignes, puis on trace des diagonales selon le schéma suivant :



On multiplie ensuite les produits des nombres sur ces six diagonales.
Enfin, on additionne les produits des diagonales qui « descendent » et on soustrait les produits des diagonales qui « montent ».

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -5 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -5 & 4 \end{array} = 1\cdot(-5)\cdot 2 + (-3)(-2)(-3) + 6\cdot 2\cdot 4 - (-3)\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 6\cdot(-5)(-3)$$

$$= -50$$

Exercice 2.2

Calculez les déterminants suivants avec la règle de Sarrus :

a. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 13 & 6 \end{vmatrix}$

Méthode générale

Cette méthode est très mauvaise du point de vue du nombre d'opérations. En effet, pour un déterminant 2x2, il y a 2 produits et une addition.
3x3 : 6 produits et 5 additions
4x4 : 24 produits et 23 additions
nxn : *n*! produits et *n*! - 1 additions.

Pour un déterminant 15x15, il faut environ $2\cdot 15! = 2.6\cdot 10^{12}$ opérations. Si une opération dure 10^{-6} seconde, il faudra 30 jours pour le calculer...

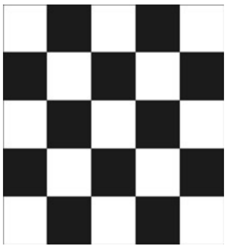
Un déterminant 3x3 est le produit des éléments de la première colonne, multiplié par le déterminant 2x2 obtenu en supprimant cette première colonne et la ligne contenant l'élément considéré.
Attention ! Le produit obtenu est précédé d'un signe qui alterne entre « + » et « – ».

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ d & \cancel{e} & \cancel{f} \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & e & f \\ g & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec)$$

On peut comparer ce tableau de signes à un échiquier, où les « + » seraient les cases blanches et les « – » les cases noires.



On peut développer un déterminant par rapport à n'importe quelle ligne, ou n'importe quelle colonne.

Pour simplifier les calculs, il est bon d'avoir en tête ce tableau de signes :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots & \dots & \dots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & \dots & & & \vdots \\ + & - & + & & (-1)^{i+j} & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & + & - \\ (-1)^{n+1} & \dots & & & \dots & - & + \end{vmatrix}$$

Exemple Développons ce déterminant par rapport à la première colonne.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\cdot\left((-1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$-2\cdot\left(2\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+1\cdot\left(2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$-\left(2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$(-1)\cdot((-1)(-3)-4\cdot 1+1\cdot 5)$$
$$-2\cdot(2(-3)-4\cdot 0+1\cdot(-6))$$
$$+1\cdot(2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 2)$$
$$-(2\cdot 5+1(-6)+4\cdot 2) =$$

$$-4+24+4-12=12$$

Même exemple Reprenons l'exemple précédent et développons ce déterminant par rapport à la troisième colonne.

Il est intéressant de choisir une ligne ou une colonne qui contient beaucoup de 0, afin d'accélérer les calculs.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

On voit qu'en choisissant bien comment développer, on peut s'épargner beaucoup de calculs.

$$(-1)\left((-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\right) - 3\left((-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-1)(-5-4+6) - 3(3-8+2) = 3+9 = 12$$

Exercice 2.3 Recalculez les déterminants de l'exercice 2.2 en les développant par rapport à une ligne ou à une colonne.

Exercice 2.4 Calculez les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2.2. Quelques propriétés des déterminants

Voici quelques propriétés des déterminants particulièrement utiles (il y en a bien d'autres). Elles s'appliquent aux déterminants de tous les ordres, mais nous utiliserons des déterminants d'ordre trois pour illustrer le propos.

Cette propriété a pour conséquence que l'on peut lire « ligne » à la place de « colonne » dans toutes les propriétés qui suivent.

1. En échangeant le rôle des lignes et des colonnes, le déterminant reste inchangé :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. En échangeant **deux** colonnes d'un déterminant, le déterminant change de signe :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

3. Si deux colonnes sont identiques ou multiples l'une de l'autre, le déterminant est nul :

Un cas particulier est $\lambda = 0$. Cela fait apparaître une colonne formée uniquement de 0.

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda a_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Les déterminants sont linéaires relativement à chacune de leurs colonnes.

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 + \mu c_1 & d_1 \\ a_2 & \lambda b_2 + \mu c_2 & d_2 \\ a_3 & \lambda b_3 + \mu c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Conséquence (que vous démontrerez facilement) :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda a_1 + \mu b_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda a_2 + \mu b_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda a_3 + \mu b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 2.5 Soient une droite orientée (AB) et un point C. Imaginez une méthode, utilisant les déterminants, qui permette de déterminer si le point C est à droite ou à gauche de la droite (AB). Autrement dit, en allant de A vers B, voit-on C à notre droite ou à notre gauche ?

Applications numériques :
a. $A(1 ; 1)$, $B(5 ; 7)$, $C(4 ; 6)$
b. $A(-1 ; 4)$, $B(4 ; -3)$, $C(2 ; -1)$
c. $A(-1 ; -1)$, $B(3 ; 7)$, $C(2 ; 5)$

Indication : rappelez-vous qu'un déterminant d'ordre 2 peut être interprété comme une aire **signée**.

2.3. Formules de Cramer

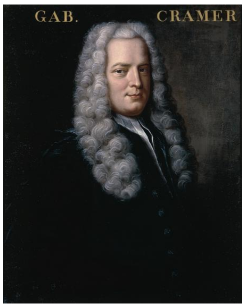
Théorème 1

Soit le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ (1)

Si $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, le système (1) a pour solution unique le couple (x ; y) tel que :

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \textbf{(formules de Cramer)}$$

Si $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, le système (1) peut ne pas avoir de solution ou avoir une infinité de solutions.



Gabriel **Cramer**
(1704 -1752)

En utilisant la notation des déterminants, les formules de Cramer s'écrivent :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad \text{Si } D \neq 0 \text{, alors } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

Exercice 2.6

Résolvez les systèmes suivants en utilisant les formules de Cramer quand c'est possible.

Quand ce n'est pas possible, utilisez une autre méthode.

a. $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 6 - 6y = -x \\ 3x - 3 = 4y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

Théorème 2

Soit le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$ (2)

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ est son déterminant principal.

Si $D \neq 0$, le système (2) admet pour solution unique le triplet (x ; y ; z) tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Si $D = 0$, le système (2) peut ne pas avoir de solution ou avoir une infinité de solutions.

Pour se souvenir facilement de ces formules, il suffit de remarquer que, au numérateur, on remplace dans le déterminant principal la colonne de l'inconnue par la colonne des constantes.

Exercice 2.7

Résolvez les systèmes suivants en utilisant les formules de Cramer, quand c'est possible. Quand ce n'est pas possible, utilisez une autre méthode.

a. $\begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} -6 - 3y + 2z = -2x \\ x + 3z + 8y = -31 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -4y + z = 0 \\ 4x + z = 6 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ 5x - 9y + 14z = 3 \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -5x - 5y - 5z = -5 \end{cases}$

2.4. Ce qu'il faut savoir absolument

Calculer des déterminants d'ordre 2	❑ ok
Calculer des déterminants d'ordre 3 avec la règle de Sarrus	❑ ok
Développer des déterminants d'ordre 3 ou plus selon une ligne ou une colonne	❑ ok
Connaître les propriétés des déterminants	❑ ok
Résoudre un système d'équations avec les formules de Cramer	❑ ok

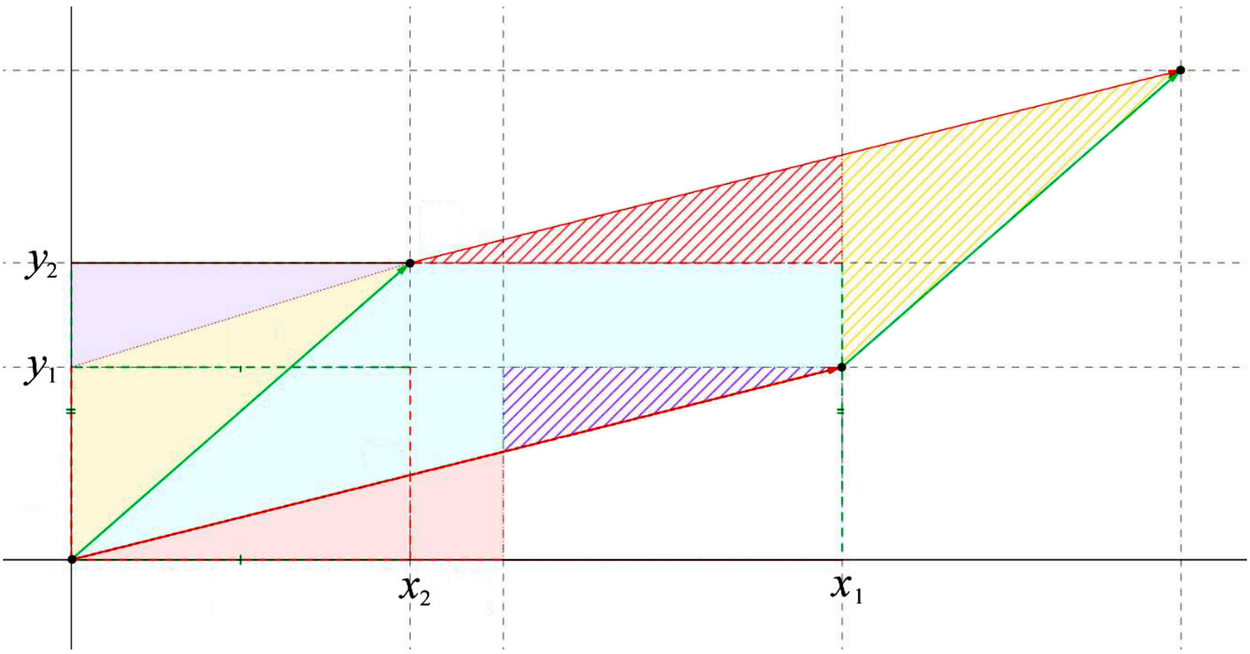


Illustration qu'un déterminant d'ordre deux donne l'aire d'un parallélogramme.
L'aire vaut bien $x_1y_2 - x_2y_1$.