4. Matrices

4.1. Définition

Voici une matrice 3×2 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1.5 & -2 \end{pmatrix}$$

On appelle **matrice de type $m \times n$**, avec m et n entiers strictement positifs, un ensemble de nombres réels disposés dans un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} (i : numéro de la ligne, j : numéro de la colonne) situés dans le tableau sont appelés les **coefficients**.

Quand aucune confusion n'est possible concernant le nombre de lignes et de colonnes de la matrice A, on note $A = (a_{ij})$.

L'ensemble des matrices de type $m \times n$ à coefficients réels se note $M_{m\times n}$. On note M_n l'ensemble de toutes les matrices **carrées** à coefficients réels possédant n lignes et n colonnes.

4.2. Opérations

Somme de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de dimensions $m \times n$. On appelle **somme** de A et B la matrice de type $m \times n$ définie par $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarquez qu'il faut que les matrices soient de mêmes dimensions.

Multiplication par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimensions $m \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **produit de la matrice A et de λ** la matrice $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 10 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type $m \times n$ et $B = (b_{jk})$ une matrice de dimensions $n \times r$. Le **produit de A par B**, noté $A \cdot B$, est la matrice $C = (c_{ik})$ de dimensions $m \times r$ avec :

c_{ik} est le produit scalaire de la i-ème ligne de A avec la k-ème colonne de B.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}$$

Pour effectuer le produit $C = A \cdot B$, il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. La matrice C a le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.

Exemple Calculons coefficient par coefficient le produit $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$:

Une matrice 2×2 multipliée par une matrice 2×3 donnera une matrice 2×3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ 2 & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ . & -1 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & -3 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} . & . & 2 \\ . & . & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & 19 \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ 2 & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ 15 & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ . & -1 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & 3 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} . & . & 2 \\ . & . & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & 26 \end{pmatrix}$$

Finalement, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 19 \\ 15 & 3 & 26 \end{pmatrix}$.

Attention !

Le produit de deux matrices **n'est pas commutatif.** En général, $A \cdot B \neq B \cdot A$ **.**
Si $A \cdot B = A \cdot C$, il n'est pas vrai en général que $B = C$.
Si $A \cdot B = 0$, on ne peut pas conclure en général que que $A = 0$ ou $B = 0$ (0 désigne ici une matrice où tous les coefficients sont nuls).

Exercice 4.1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Calculez les produits suivants (si c'est possible) : $A \cdot B$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, A^2, B^2

Propriétés

L'ensemble des matrices $m \times n$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel (voir chapitre 5). Le neutre de l'addition est donné par la matrice carrée nulle :

C'est la matrice nulle. Tous les coefficients sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La diagonale principale d'une matrice carrée est la diagonale qui descend du coin en haut à gauche jusqu'au coin en bas à droite. Sauf avis contraire, quand on parlera de « diagonale », il s'agira de la diagonale principale.

C'est la matrice identité, que l'on désigne toujours par la lettre I.
Les coefficients a_{ii} valent 1, les autres sont nuls.
La matrice identité est un exemple de matrice diagonale.

Dans l'ensemble des matrices carrées $n \times n$, le neutre du produit est : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

On appelle **matrice diagonale** une matrice carrée où tous les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale principale sont nuls.

Élévation à une puissance

Il n'existe pas de formule pour élever une matrice carrée à une puissance. Le seul moyen est de calculer $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ termes}}$.

Cependant, pour trouver la puissance n-ième d'une matrice *diagonale*, il suffit d'élever à la puissance n les coefficients de la diagonale, tous les autres coefficients restant nuls.

Transposition

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice $m \times n$, on appelle **transposée** de A et on note ${}^tA$ la matrice dont la i-ème ligne est la i-ème colonne de A et la j-ème colonne est la j-ème ligne de A (on permute ligne et colonne).

La matrice ${}^tA = (a'_{ij})$ est donc une matrice $n \times m$ et $a'_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^t(A{\cdot}B) = {}^tB{\cdot}{}^tA$$

Inverse d'une matrice

Une matrice **carrée** A, d'ordre n, est dite **inversible**, s'il existe une matrice carrée B, d'ordre n, telle que :

$$A{\cdot}B = B{\cdot}A = I_n$$

La matrice B est alors appelée **matrice inverse** de la matrice A, elle est notée A^{-1}.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle **mineur** de a_{ij}, le déterminant D_{ij} de la matrice carrée A_{ij} d'ordre n–1 obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le mineur de a_{12} (2) vaut $D_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9$.

Cofacteur On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}D_{ij}$.

Le cofacteur de a_{12} vaut $(-1)^{1+2} \cdot 9 = -9$.

Comatrice La **comatrice** C d'une matrice carrée A d'ordre n, est la matrice obtenue en remplaçant chaque élément a_{ij} de la matrice A par son cofacteur.

Exemple La comatrice de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $C = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Soit A une matrice carrée telle que Dét(A) ≠ 0. Alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{Dét}(A)}\,{}^tC$

Exemple

$$A^{-1} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -9 & -1 & -6 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 9 & 1 & 6 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec Dét($A$) = $ad - bc \neq 0$.

La comatrice est $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, sa transposée est $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

La matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est donc $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{Dét}(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Autre méthode pour calculer l'inverse d'une matrice

Les formules précédentes marchent bien pour des matrices de rang inférieur à 4. Au-delà de 3, il est préférable d'utiliser la **transformation de Gauss-Jordan :**

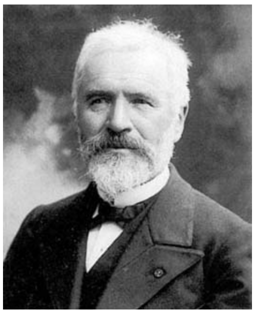
On a évidemment supposé que A était inversible.

Former la matrice $(A \mid I)$ et effectuer sur les lignes de cette matrice augmentée les opérations élémentaires mettant A dans la forme échelonnée réduite. On obtient ainsi la matrice $(I \mid A^{-1})$.

Par « opérations élémentaires », on entend :

- multiplication d'une ligne par un scalaire différent de 0,
- combinaison linéaire de deux lignes,
- permutation de deux lignes.

Exemple de calcul Cherchons la matrice inverse de $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{pmatrix}$.



Camille **Jordan**
(1838 - 1922)

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\\ \ell_2-2\ell_1\\ \ell_3-\ell_1\end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \ell_3+2\ell_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -\ell_3\end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\ell_1-3\ell_3\\ \ell_2+3\ell_3\\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\ell_1-2\ell_2\\ \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right)$$

On a donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{pmatrix}$.

Exercice 4.2 Déterminez les inverses des matrices suivantes, en utilisant les deux méthodes présentés ci-dessus :

$$A=\begin{pmatrix}4&2\\9&5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&6&3\\2&-4&0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1&4&-2\\-1&0&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

Remarque du 21ème siècle Comme vous l'aurez constaté en faisant cet exercice, les calculs sont longs et sujets à erreurs. Aussi, dans la pratique, on calcule l'inverse d'une matrice par ordinateur. Certaines calculatrices scientifiques et des applis sur smartphone permettent aussi de calculer des inverses de matrices.

Quelques propriétés

Soit A une matrice carrée. A est inversible si et seulement si Dét(A) $\neq$ 0.

Soit A une matrice carrée inversible, alors $\text{Dét}(A^{-1})=\dfrac{1}{\text{Dét}(A)}$.

Soient A et B deux matrices carrées inversibles de mêmes dimensions. Alors $A\cdot B$ est inversible et $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ **(attention à l'ordre).**

Soit A une matrice carrée inversible. ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

4.3. Ce qu'il faut absolument savoir

Calculer avec les matrices ❑ ok
Calculer l'inverse d'une matrice ❑ ok