5. Espaces vectoriels

5.1. Définition

Il s'agit dans ce chapitre de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs, et multiplier un vecteur par un réel. Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Idem pour les polynômes, les matrices, etc.
Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront à tous ces ensembles.

Remarques

Attention ! Ce que l'on appelle ici **vecteur** peut être un nombre, une matrice, un polynôme, etc.

On appelle **espace vectoriel réel** tout ensemble $E \neq \varnothing$ d'objets, appelés **vecteurs**, muni de deux lois de composition :

1) une **loi de composition interne** (notée « + »), qui, à tout couple $(x\,;y)$ de $E \times E$, fait correspondre un élément noté $x + y \in E$, et vérifie les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in E$:

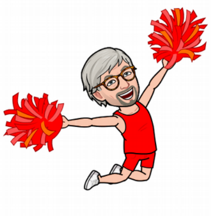
Un ensemble muni de l'addition et vérifiant les propriétés **i**, **ii**, **iii**, **iv** est appelé un *groupe commutatif* (ou *groupe abélien*).

i. + est associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$

ii. + est commutative : $x + y = y + x$

iii. il existe un élément neutre noté $n \in E$ tel que : $\begin{cases} x + n = x \\ n + x = x \end{cases}$

iv. chaque élément $x \in E$ possède un symétrique $x' \in E$ tel que : $\begin{cases} x + x' = n \\ x' + x = n \end{cases}$



2) une **loi de composition externe** (noté « · »), qui à tout couple $(\lambda\,;x) \in \mathbb{R} \times E$ fait correspondre $\lambda \cdot x \in E$, et vérifie les propriétés suivantes pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in E$:

v. $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

vi. $1 \cdot x = x$

vii. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

viii. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Exemples

Considérons l'ensemble E des fonctions f définies par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels fixés. Munissons E d'une loi interne (l'addition) notée « + » telle que pour toutes fonctions f et g de E $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Munissons aussi E d'une loi externe (la multiplication par un réel) notée « · » telle que pour tout réel λ et pour toute fonction f on a : $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
Nous allons montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. **la loi + est bien interne :** soient f et g deux éléments de E, $f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$ où a, b, c, d sont quatre réels fixés.
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = ax+b+cx+d = (a+c)x+b+d$, donc $f + g$ appartient à E.
   - **i. la loi + est associative :** soient $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$, $h(x) = kx+m$ où a, b, c, d, k, m sont des réels fixés.
     $((f + g) + h)(x) = ... = (a+c+k)x + (b+d+m)$
     $(f + (g + h))(x) = ... = (a+c+k)x + (b+d+m)$
   - **ii. la loi + est commutative :** soient $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, où a, b, c, d sont des réels fixés.
     $((f + g))(x) = ax + b + cx + d = (a+c)x + b + d$
     $((g + f))(x) = cx + d + ax + b = (a+c)x + b + d$
   - **iii. la loi admet un élément neutre :** la fonction nulle n est définie par $n(x) = 0x + 0 = 0$, pour tout élément f de E, $f + n = n + f = f$.
   - **iv. tout élément de E admet un symétrique pour la loi + :** soit f un élément de E, f définie par $f(x) = ax+b$, notons $-f$ l'élément défini par $(-f)(x) = -ax + (-b)$. On a : $f + (-f) = (-f) + f = n$.

2. **loi externe**

   v. **la loi · est associative :** soient $f(x) = ax+b$, où a, b sont des réels fixés.
   $\alpha(\beta\cdot(ax+b)) = \alpha(\beta ax+\beta b) = \alpha\beta ax + \alpha\beta b = (\alpha\beta)\cdot(ax+b)$

   vi. **la loi admet un élément neutre :**
   $1\cdot(ax+b) = ax+b$

   vii. **$\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y$:** soient $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$, où a, b, c, d sont des réels fixés.
   $\alpha(f(x)+g(x)) = \alpha((ax+b) + (cx+d)) = \alpha(ax+b) +\alpha(cx+d) = \alpha f(x)+\alpha g(x)$

   viii. **$(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$:** soient $f(x) = ax + b$, où a, b sont des réels fixés.
   $(\alpha+\beta)\cdot f(x) = (\alpha+\beta)(ax+b) = \alpha(ax+b) + \beta(ax+b) = \alpha f(x)+\beta\cdot f(x)$

Deux autres exemples d'espaces vectoriels

$E = \mathbb{R}^2$ = ensemble des paires de nombres réels.
Addition : $(x_1 ; y_1) + (x_2 ; y_2) = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$.
Multiplication par un réel : $\lambda\cdot(x ; y) = (\lambda x ; \lambda y)$.
Élément neutre : $(0 ; 0)$.

E = ensemble des polynômes à une variable de degré ≤ 2, appelé P_2.
Addition : $(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') = (a+a')x^2 + (b+ b')x + (c+c')$.
Multiplication par un réel : $\lambda\cdot(ax^2 + bx + c) = (\lambda a)x^2 + (\lambda b)x + (\lambda c)$.
Élément neutre : $0x^2 + 0x + 0 = 0$.

Exercice 5.1

Montrez que l'ensemble des matrices $M_{2,2}$, muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel.

Exercice 5.2

Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition comme loi de composition interne et on définit la multiplication par un réel ainsi : $\lambda\cdot u = 0$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et $u\in\mathbb{Z}$
L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

Exercice 5.3

Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition suivantes :

$$(x ; y) + (x' ; y') = (x+x' ; y+y')$$

$$\lambda\cdot(x ; y) = (\lambda x ; y)$$

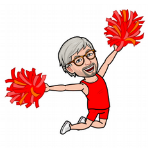
Montrez que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 5.4

Montrez que l'ensemble P_3 des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3, muni des opérations habituelles d'addition de polynômes et de multiplication d'un polynôme par un scalaire, est un espace vectoriel.

5.2. Sous-espaces vectoriels

Définition



Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est aussi un espace vectoriel. Autrement dit, il faut que :

1) pour tout $x, y \in F$, la somme $x + y \in F$,
2) pour tout $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit $\lambda\cdot x \in F$.

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x ; 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$ avec les opérations données dans l'exemple **a.** ci-dessus.
Si $(x ; 0), (x' ; 0) \in F$, alors $(x ; 0) + (x' ; 0) = (x + x' ; 0) \in F$.
Si $(x ; 0) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda (x ; 0) = (\lambda x ; 0) \in F$.

Exercice 5.5

a. Soit l'ensemble $E_k = \{(x ; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = k\}$.

E_k est-il un espace vectoriel pour **1.** $k = 5$?
2. $k = 0$?

b. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$A = \{(x\,;y\,;z) \mid y = 3x\} \qquad B = \{(x\,;y\,;z) \mid 2x + y + z = 21\}$$

5.3. Combinaison linéaire et espace engendré

Soit $S = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle **combinaison linéaire** des k vecteurs de cette famille tout vecteur de la forme :

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 2 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Le vecteur $v = 2u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2.

Exemple 3 Dans l'espace vectoriel P_2, le polynôme $3x^2 + 2x - 1$ est une combinaison linéaire des polynômes $u_1 = x^2$, $u_2 = x$ et $u_3 = 1$.

Espace engendré L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de E est un sous-espace vectoriel de E.
Ce sous-espace est **l'espace engendré** par $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Exemple 4 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est engendré par les deux vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, mais aussi par les trois vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Exemple 5 L'ensemble des solutions de l'équation $3x - y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, engendré par le vecteur $u = (1\,;3)$.

Indépendance linéaire Soient $e_1, e_2, \ldots, e_k$ k vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit qu'ils sont **linéairement indépendants** si <u>la seule</u> solution de l'équation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k = 0$ est $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Cela signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle où tous les coefficients λ sont nuls.

Exemple 6 Les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

En effet, l'équation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ amène à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système est différent de 0, donc la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exemple 7 Les vecteurs $u_1 = x^2 + x$, $u_2 = x - 1$, $u_3 = x + 1$ et $u_4 = 1$ de l'espace vectoriel P_2 sont linéairement dépendants, car $u_2 = u_3 - 2u_4$.

5.4. Base et dimension d'un espace vectoriel

Une famille est un ensemble ordonné.

Soit $B = (e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que B est une **base** de E si et seulement si :

1) tout élément de E est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille B ;

2) les vecteurs $e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n$ sont linéairement indépendants.

On peut donner deux autres formulations à la définition d'une base :

On dit que B est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière *unique* comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

On dit que B est une base de E si les vecteurs de B sont linéairement indépendants et qu'ils engendrent E.

Toutes les bases d'un espace vectoriel donné ont le même nombre d'éléments. On appelle **dimension** d'un espace vectoriel E le nombre d'éléments d'une base de E, on note **dim(*E*)**.

On appelle **base canonique** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ la base $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Elle est de dimension 2.

La **base canonique** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Elle est de dimension 3.

Exercice 5.6

Les vecteurs indiqués forment-ils une base de l'espace mentionné ?

a. (1 ; 0), (1 ; 2) $\mathbb{R}^2$
b. (−1 ; 3), (2 ; −6) $\mathbb{R}^2$
c. (1 ; 2), (0 ; 3), (4 ; −2) $\mathbb{R}^2$
d. (1 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 2) $\mathbb{R}^2$
e. (1 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 2) $\mathbb{R}^3$
f. (1 ; 0 ; 3), (1 ; 0 ; 1), (0 ; 1 ; 0) $\mathbb{R}^3$
g. (1 ; 2 ; 1), (−3 ; 1 ; 2), (−5 ; 4 ; 5) $\mathbb{R}^3$

Exercice 5.7

Montrez que, dans l'espace des fonctions affines, $e_1(x) = 1$ et $e_2(x) = x$ forment une base.
Donnez une autre base dans cet espace.

Exercice 5.8

Montrez que les vecteurs $u_1=(1;-2;1)$, $u_2=(-1;0;1)$ et $u_3=(2;1;0)$ sont linéairement indépendants.
Écrivez ensuite les vecteurs de la base canonique dans la base $(u_1 ; u_2 ; u_3)$.

Exercice 5.9

Montrez que l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $M_{2,2}$.

Donnez la dimension et une base de ce sous-espace vectoriel.

5.5. Ce qu'il faut absolument savoir

La définition d'un espace vectoriel (connaître les huit lois de composition) ❏ ok
La définition d'un sous-espace vectoriel ❏ ok
La définition d'une combinaison linéaire ❏ ok
La notion d'indépendance linéaire (et de dépendance linéaire) ❏ ok
La notion de base ❏ ok