6. Applications linéaires

6.1. Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E vers F toute application h de E vers F telle que :

1) $h(u + v) = h(u) + h(v)$

2) $h(\lambda u) = \lambda h(u)$

quels que soient les éléments u et v de E et le nombre réel λ.

Exemple

$E = F = \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h(x) = 5x$.
$h(u + v) = 5(u + v) = 5u + 5v = h(u) + h(v)$
$h(\lambda u) = 5(\lambda u) = \lambda(5u) = \lambda h(u)$

Définitions

Une application linéaire de E vers F est aussi appelée **homomorphisme** de E vers F.
Une application linéaire de E vers E est appelée **endomorphisme** de E.
Une application linéaire bijective de E vers F est appelée **isomorphisme** de E vers F.
Un isomorphisme de E vers E est appelé **automorphisme** de E.

Nous reviendrons plus longuement sur les endomorphismes au chapitre 7.

Exercice 6.1

Les applications h de E vers F ci-dessous sont-elles linéaires ?

a. $h(x) = 2x$
b. $h(x) = x + 2$
c. $h(x) = x^2$
d. $h((x\,;y)) = 3x - y$
e. $h((x\,;y)) = xy$
f. $h((x\,;y)) = (2x - y\,;x)$
g. $h((x\,;y)) = (0\,;|y|)$
h. $h((x\,;y)) = (\sin(x)\,;y)$
i. $h((x\,;y)) = (x\,;y\,;x - y)$
j. $h((x\,;y\,;z)) = (x + 2y\,;z - 2y)$
k. $h(ax + b) = 5a + 2b$
l. $h(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$
m. $h(f) = f'$ (dérivée de f)

Opérations sur les applications linéaires

Si f et g sont des applications linéaires, alors les applications $f+g$ et $\lambda\cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont aussi linéaires.

Soit E, F et G des espaces vectoriels, f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G.
L'application $g \circ f$ est alors linéaire de E vers G. En effet :

$$(g \circ f)(u+v) = g(f(u+v)) = g(f(u)+f(v)) = g(f(u)) + g(f(v))$$
$$= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v)$$

$$(g \circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda f(u)) = \lambda g(f(u)) = \lambda (g \circ f)(u)$$

Par contre, la multiplication de deux fonctions linéaires n'est pas forcément linéaire :

$(f\cdot g)(u + v) = f(u + v)\cdot g(u + v) = (f(u) + f(v))\cdot(g(u) + g(v)) =$
$f(u)\cdot g(u) + f(u)\cdot g(v) + f(v)\cdot g(u) + f(v)\cdot g(v) =$
$(f\cdot g)(u) + (f\cdot g)(v) + f(u)\cdot g(v) + f(v)\cdot g(u)$

Donc, en général, $(f\cdot g)(u + v) \neq (f\cdot g)(u) + (f\cdot g)(v)$

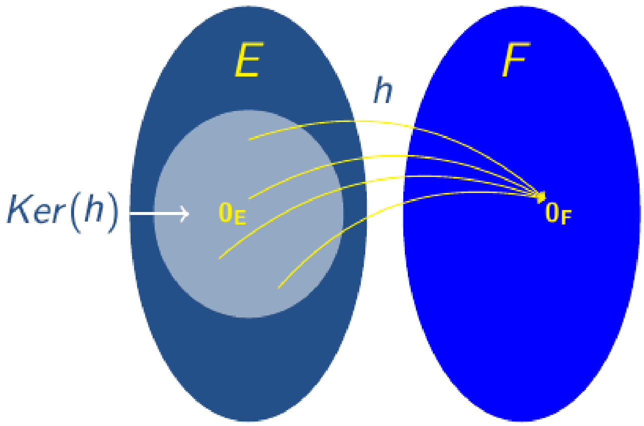
6.2. Noyau et image d'une application linéaire

Noyau

Ker pour *kernel* (noyau en anglais)

Soit h une application linéaire de E vers F. On appelle **noyau** de h, noté **Ker(*h*)**, l'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image, par h, le vecteur nul de F.

$$\mathrm{Ker}(h) = \{u \in E \mid h(u) = 0_F\}$$

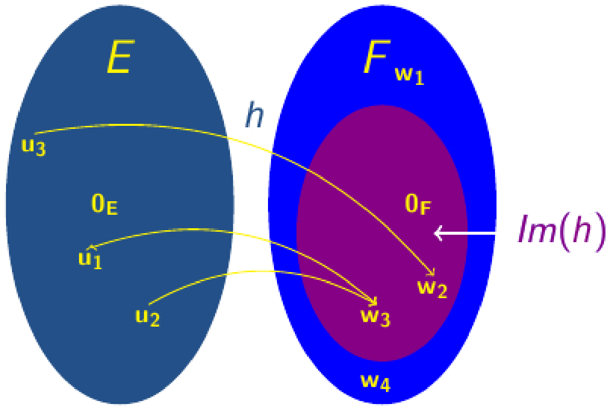


Image

Soit h une application linéaire de E vers F. On appelle **image** de h, noté **Im(*h*)**, l'ensemble des vecteurs de F qui sont image, par h, d'au moins un vecteur de E.

$$\mathrm{Im}(h) = \{v \in F \mid \exists \text{ un } u \in E \text{ tel que } h(u) = v\}$$

On appelle **rang** d'une application linéaire de E vers F la dimension de Im(h).



Remarques

Ker(h) et Im(h) ne sont jamais vides.
Ker(h) est un sous-espace vectoriel de E. Im(h) est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème 6.1

Soient E et F deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit h une application linéaire de E vers F. Alors :

$$\dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(E)$$

Exercice 6.2

Donnez le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

a. $h((x ; y)) = (2x - y ; x)$
b. $h((x ; y)) = (x - y ; 0)$
c. $h((x ; y)) = (x ; y ; x - y)$
d. $h((x ; y)) = (x - y ; y - x)$
e. $h((x ; y)) = (0 ; y ; x + 2y)$
f. $h((x ; y ; z)) = (x + 2y ; z - 2y)$
g. $h((x ; y ; z)) = (z ; y ; x)$
h. $h(f) = f'$

Pour chacune de ces questions, vous vérifierez le théorème 6.1.

Exercice 6.3

Soit f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x_1 ; x_2 ; x_3) \to (2x_1 + 3x_2 + 2x_3 ; x_2 + x_3 ; 2x_1 - x_3)$.

a. Les vecteurs suivants appartiennent-ils à l'image de f ?
$a = (8 ; 1 ; 7)$, $b = (0 ; 0 ; 0)$, $c = (0 ; 1 ; 0)$, $d = (5 ; 3 ; -4)$

b. À quelles conditions un élément $(y_1 ; y_2 ; y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient-il à l'image de f ?

c. Déterminez le noyau de f.

6.3. Matrices et applications linéaires

Il est temps de faire le lien entre les applications linéaires et les matrices. Voici un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z \end{cases}$$

Ce système peut aussi être écrit de la façon suivante :

Pour le vérifier, calculez le membre de droite de l'équation !

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{v'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{v}$$

Pour obtenir l'image de $v' \in F$ d'un élément $v \in E$ par une application linéaire h, on peut donc simplement effectuer le produit matriciel de la matrice associée à h avec le vecteur v.

$$v' = h(v) = M \cdot v$$

Exercice 6.4

Soit l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculez $h(u)$, $h(v)$, $h(u + v)$, $h(2u)$, $h(-3v)$, $h(2u - 3v)$.

Exercice 6.5

Déterminez les matrices des applications linéaires de l'exercice 6.2.

Exercice 6.6

On considère $\mathbb{R}^3$ et sa base canonique $E = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$.
Soit l'application linéaire h telle que

$$h(e_1) = 3e_1 - 3e_2 \,; \quad h(e_2) = 2e_1 - 6e_2 - e_3 \quad \text{et} \quad h(e_3) = 2e_1 + e_2 + e_3$$

a. Écrivez la matrice H de l'application h.

b. Déterminez l'aire de l'image du triangle ABC de sommets $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(2 ; 0 ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; 2)$ par l'application h.

c. Écrivez la matrice G de l'application $g = h \circ h$.

Exercice 6.7

Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminez le vecteur v qui est image de u.

b. Déterminez le vecteur w qui a pour image u.

Exercice 6.8

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déterminez les matrices des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a. $h(u) = 3u$ **b.** $h(u) = -u$ **c.** $h(u) = xe_1$ **d.** $h(u) = u - 3xe_2$

Exercice 6.9

Déterminez les matrices des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a. $h(u) = 3u$ **b.** $h(u) = (x + 2y + 4z \,;\, -x - 2y - 2z \,;\, z)$ **c.** $h(u) = ye_1 - xe_2$

Exercice 6.10

Soit l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ telle que $\begin{cases} h((2\,;\,1)) & = & (2\,;\,-3) \\ h((1\,;\,-1)) & = & (3\,;\,-1) \end{cases}$.

Déterminez la matrice de h.

Matrice associée à une application linéaire composée

Nous avons vu que la composition de deux applications linéaires est également une application linéaire. Soit M_1 la matrice associée à l'application linéaire h_1 de E vers F et M_2 la matrice associée à l'application linéaire de F vers G.

Cherchons la matrice M associée à l'application linéaire de $h = h_2 \circ h_1$ de E vers G.

Nous savons que :

$h(u) = M \cdot u$

$h(u) = (h_2 \circ h_1)(u) = h_2(h_1(u)) = M_2 \cdot (M_1 \cdot u)$

Comme le produit matriciel est associatif, on déduit : $h(u) = (M_2 \cdot M_1) \cdot u$

Théorème 6.2

La matrice M associée à l'application linéaire $h_2 \circ h_1$ est égale au produit des matrices M_2 (de h_2) et M_1 (de h_1), **dans cet ordre**.

$$M = M_2 \cdot M_1$$

Exercice 6.11

Soient les applications linéaires h_1 et h_2 respectivement de matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

a. Déterminez les matrices des applications linéaires h_3, h_4 et h_5 suivantes :

$$h_3 = h_1 \circ h_2 \qquad h_4 = h_2 \circ h_1 \qquad h_5 = h_2 \circ h_2$$

La réciproque se trouve en calculant l'inverse de la matrice.

b. Déterminez la matrice de la réciproque de h_3.

Exercice 6.12

Dans $\mathbb{R}^3$ soit l'endomorphisme h suivant :

$$h((x\,;\,y\,;\,z)) = (2y\,;\,4x-z\,;\,x+y+z).$$

Déterminez la matrice de la réciproque de h.

6.4. Ce qu'il faut absolument savoir

Reconnaître une application linéaire	❏ ok
Donner le noyau et l'image d'une application linéaire	❏ ok
Donner la matrice d'une application linéaire et de sa réciproque	❏ ok