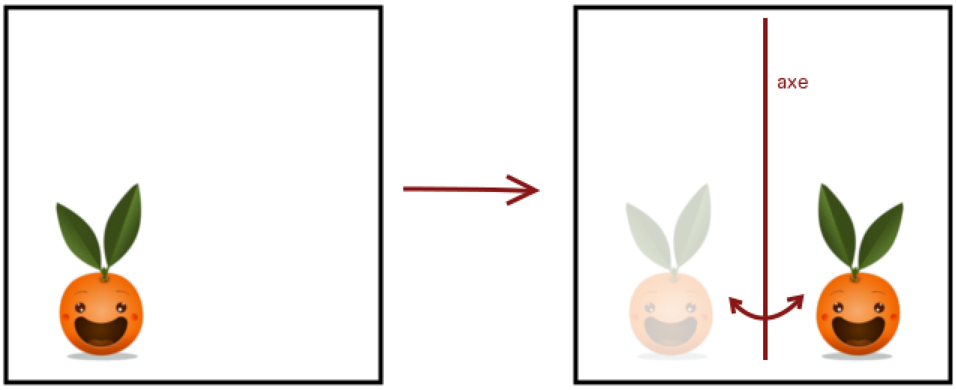
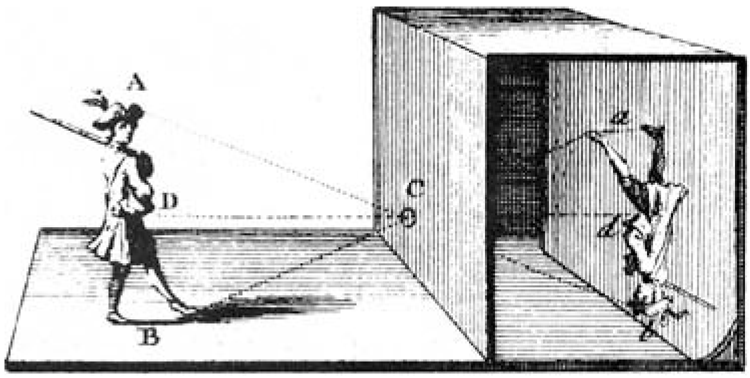
9. Applications en géométrie

9.1. Rappel visuel sur les transformations géométriques usuelles

Symétrie axiale orthogonale

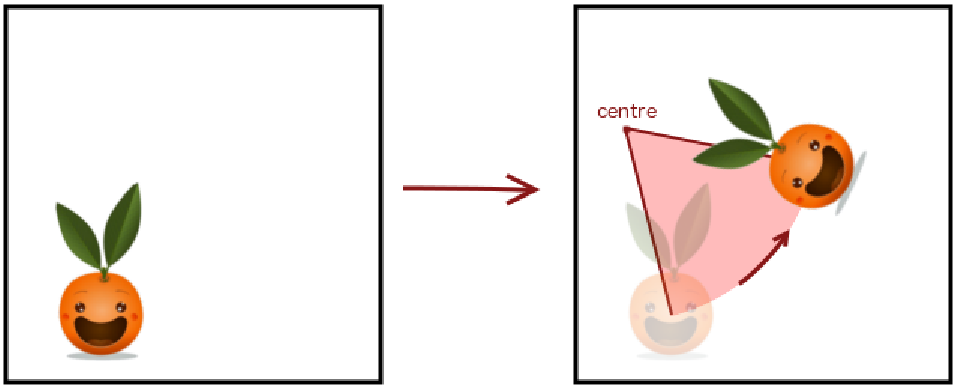


Symétrie centrale

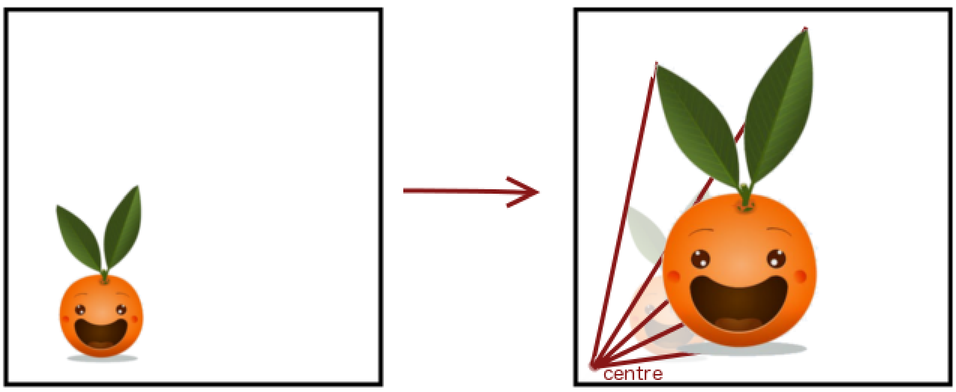


La chambre obscure – d'après la grande Encyclopédie de Diderot et d'Alembert

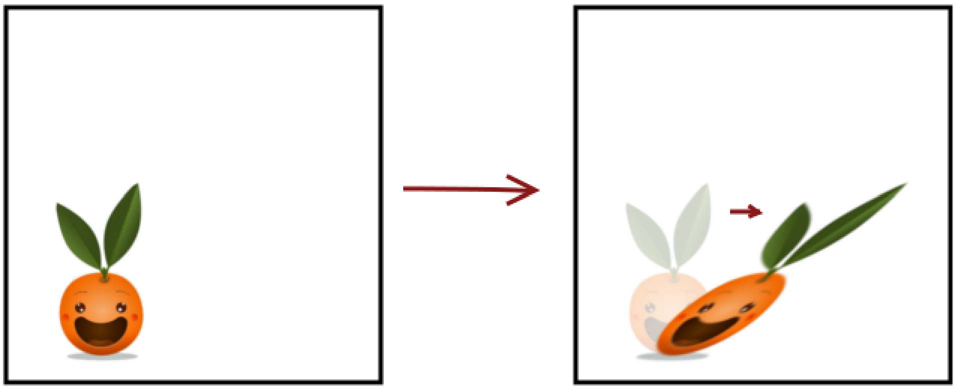
Rotation



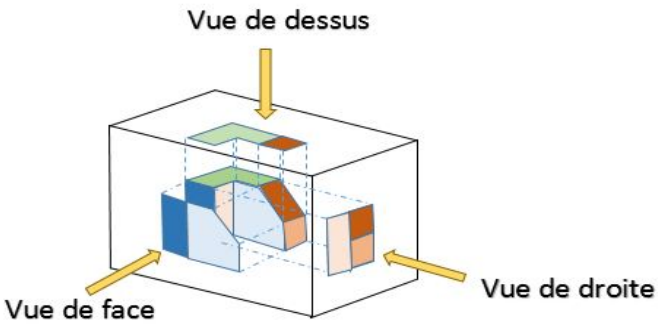
Homothétie



Cisaillement

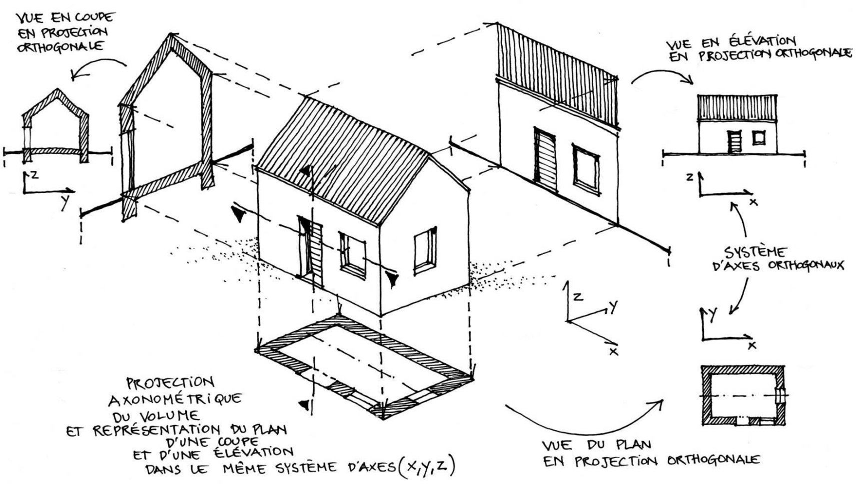


Projections orthogonales



Gaspard **Monge**
(1746 - 1818)

Les projections orthogonales sont la base de ce que l'on appelle la *géométrie descriptive*. Inventée par le mathématicien français Gaspard **Monge**, elle consiste à représenter un ou plusieurs objets de l'espace à trois dimensions en un minimum de projections orthogonales pour en lever l'ambiguïté. Le choix des plans de projection est fonction du problème posé et deux plans de projection sont la plupart du temps suffisants.



Autrefois beaucoup utilisée en architecture et en chaudronnerie, elle est tombée en désuétude avec l'apparition des logiciels de CAO (conception assistée par ordinateur).

Exercice 9.1

Méthode
Voyez comment sont transformés les vecteurs $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Déterminez la nature géométrique des applications linéaires suivantes :

$$M_1=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\quad M_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad M_4=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 9.2

Donnez, pour chaque application linéaire du plan (P) dans le plan (P), la matrice de h.

Méthode :
Voyez comment sont transformés les vecteurs $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

a. Symétrie d'axe Ox. **b.** Symétrie d'axe Oy.
c. Symétrie d'axe $y = x$. **d.** Symétrie d'axe $y = -x$.
e. Projection orthogonale sur Ox. **f.** Projection orthogonale sur Oy.
g. Homothétie de centre O et de rapport 2. **h.** Rotation de centre O et d'angle –90°.
i. Rotation de centre O et d'angle +180°. **j.** Rotation de centre O et d'angle +30°.
k. Rotation de centre O et d'angle α. **l.** Cisaillement : $(x ; y) \mapsto (x + ky ; y)$.

Exercice 9.3

Soit l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

a. Déterminez l'image, par h, de la droite $d : x - y + 4 = 0$.
b. Déterminez l'image, par h, de la droite $g : x - 2y = 0$.
c. Déterminez les points fixes de h.
d. Déterminez la nature géométrique de h.

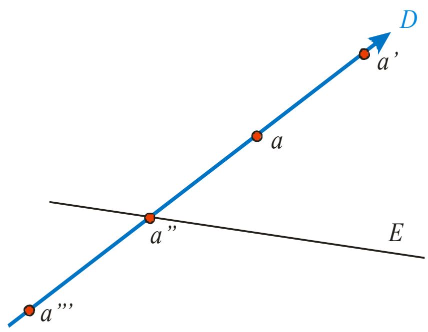
Un point u est **fixe** si $u = h(u)$.

9.2. Affinité

Définition

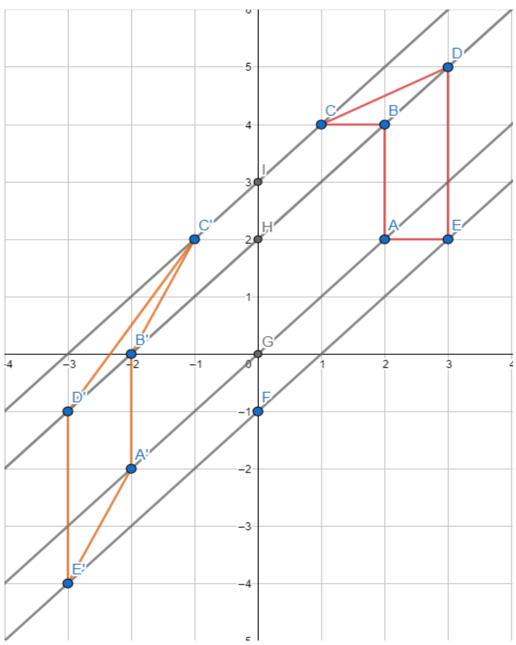
E est l'axe d'affinité.
D est la direction de l'affinité.

a est le point avant d'appliquer l'affinité.
a' est une affinité de rapport $\lambda = 2$ par rapport à l'axe E et de direction D.
a'' est une affinité de rapport $\lambda = 0$ par rapport à l'axe E et de direction D.
a''' est une affinité de rapport $\lambda = -1$ par rapport à l'axe E et de direction D.



Les affinités recouvrent :
- l'identité ($\lambda = 1$),
- les projections ($\lambda = 0$),
- les symétries ($\lambda = -1$),
- les homothéties.

Les points F, G, H et I sont sur l'axe d'affinité.
On a :
$\overline{GA}=\overline{GA'}$
$\overline{HB}=\overline{HB'}$
$\overline{IC}=\overline{IC'}$
$\overline{HD}=\overline{HD'}$
$\overline{FE}=\overline{FE'}$



Affinité d'axe Oy et de rapport -1, selon la direction $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

9.3. Nature géométrique des endomorphismes

Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve les valeurs propres et les vecteurs propres associés suivants :

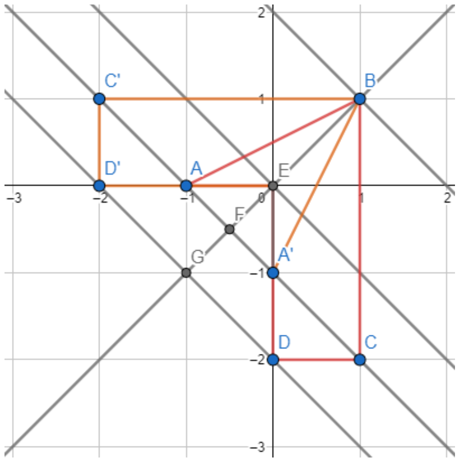
Pour $\lambda_1 = 3$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_2 = -1$: $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$y = -x$: droite de vecteur directeur u_1

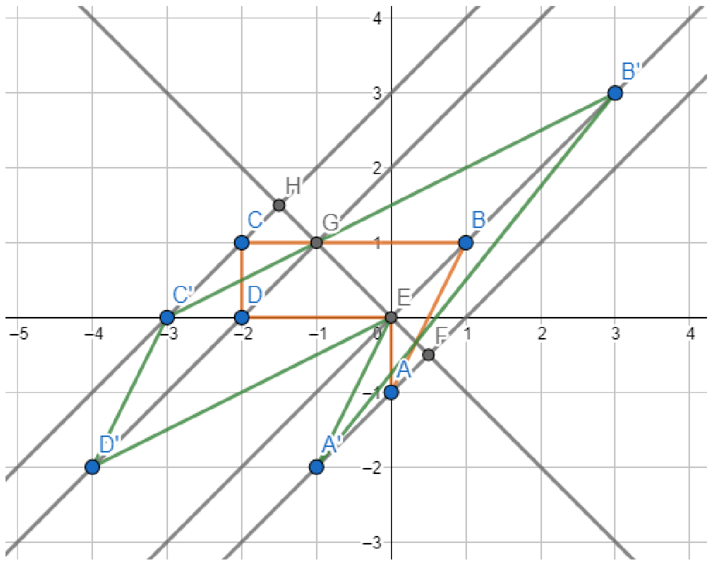
$y = x$: droite de vecteur directeur u_2

Géométriquement parlant, h est une affinité de rapport -1 dans la direction $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = x$, combinée à une affinité de rapport 3 dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = -x$.

Prenons comme figure de départ un polygone fermé reliant les points A(–1 ; 0), B(1 ; 1), C(1 ; –2), D(0 ; –2) et E(0 ; 0).



La première affinité est tout simplement une symétrie axiale orthogonale



La seconde affinité

Ce sont bien les points que l'on trouve par calcul, en multipliant les points de départ par la matrice M.

Les points finaux ont pour coordonnées A'(–1 ; –2), B'(3 ; 3), C'(-3 ; 0), D'(–4 ; –2) et E(0 ; 0).

Exercice 9.4

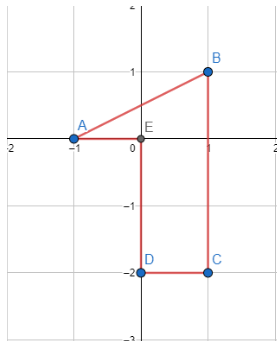
Soient les huit endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^2$ par leur matrice relativement à une base B.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

GeoGebra

a. Avec ces endomorphismes, déformez l'image ci-contre, obtenue en reliant, dans l'ordre, les points de coordonnées : A(–1 ; 0), B(1 ; 1), C(1 ; –2), D(0 ; –2), E(0 ; 0).



b. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres associés pour chacun des endomorphismes.

c. Retrouvez par construction géométrique (affinités) les images de ces points, à l'aide des valeurs propres et des vecteurs propres (quand ils existent).

d. Déterminez la nature géométrique de ces endomorphismes.

9.4. Endomorphisme orthogonal

Définition

On a donc ${}^tM\,M = M\,{}^tM = I$

Une matrice carrée M est **orthogonale** si $M^{-1} = {}^tM$.
L'endomorphisme de E est un endomorphisme orthogonal si sa matrice relativement à une base orthonormée est orthogonale.

Théorème 9.1

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à +1 ou –1.

Propriétés

1. Un endomorphisme orthogonal h de E conserve la norme des vecteurs : pour tout vecteur $x \in E$, on a $\|h(x)\| = \|x\|$. Un endomorphisme orthogonal est, de ce fait, également appelé isométrie. Géométriquement, on peut montrer que si une transformation de E vers E conserve les longueurs, elle conserve aussi les angles.
2. Un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité des vecteurs. La réciproque est fausse : l'homothétie en est un contre-exemple.
3. Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il transforme une base orthonormée de E en une autre base orthonormée de E.
4. Les seules valeurs propres possibles d'un endomorphisme orthogonal sont –1 et 1.

Exercice 9.5

a. Démontrez que si A et B sont deux matrices orthogonales, alors la matrice $A \cdot B$ est aussi orthogonale.
b. Que peut-on en déduire pour les isométries vectorielles ?

Rotation

La matrice associée à une rotation dans le plan est $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

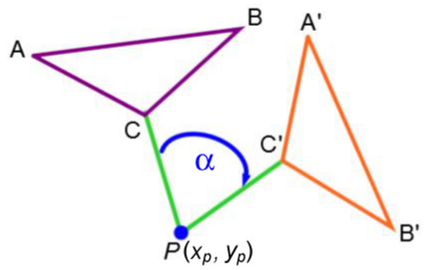
La rotation n'a pas de valeur propre pour $\alpha \neq k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cette formule est le résultat de trois opérations successives : translation du point P sur l'origine, rotation autour de l'origine, puis translation de l'origine sur le point P.

Pour tourner une image autour d'un point $P(x_p, y_p)$, on utilise la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix}$$

Rappel
Ici, la rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, donc α est un nombre négatif.



Une matrice orthogonale 2 x 2 définit une rotation si et seulement si Dét(M) = +1.

Exercice 9.6

Les endomorphismes donnés par les matrices M ci-dessous sont-ils des rotations ? Si oui, donnez l'angle α.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

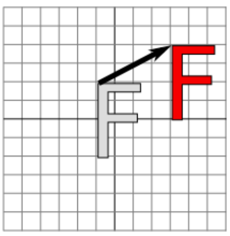
d. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Exercice 9.7

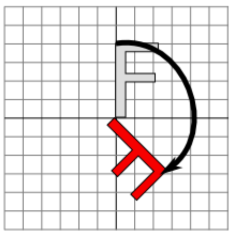
Écrivez sous la forme $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$ les transformations géométriques ci-dessous.

Attention pour **c.** Les facteurs d'agrandissement sont différents pour x et pour y.

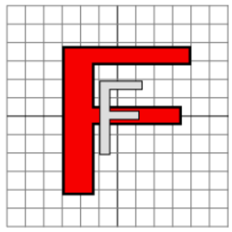
a. translation



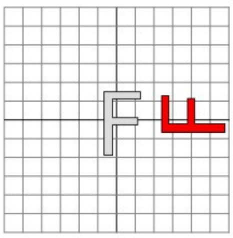
b. rotation de −135°



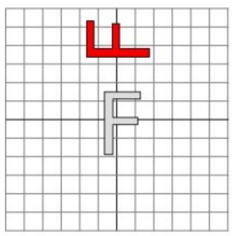
c. mise à l'échelle



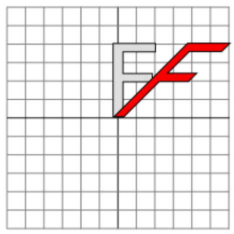
d. rotation + translation



e. rotation + translation



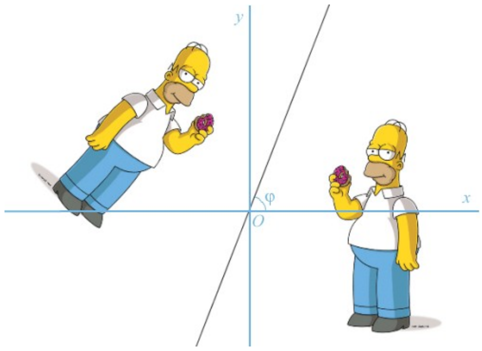
f. cisaillement



Symétrie axiale orthogonale

On considère la symétrie axiale dont l'axe de symétrie passe par l'origine O et forme un angle φ avec l'axe Ox.

La matrice associée est $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$, où $\alpha = 2\varphi$.



On peut vérifier que cet endomorphisme est orthogonal et que Dét(M) = −1.

On a même ${}^tM = M^{-1} = M$.

Pour les cas particuliers φ = 0°, 90° et 45°, on obtient respectivement :

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la symétrie axiale d'axe Ox

$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la symétrie axiale d'axe Oy

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la symétrie axiale d'axe $y = x$

Un endomorphisme orthogonal du plan est une symétrie axiale orthogonale si et seulement si M est orthogonale et si Dét(M) = −1. Un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 1 engendre l'axe de symétrie.

Exercice 9.8

Montrez que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x;y) = (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y ; \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y)$ est orthogonal.

Quelle transformation du plan représente-t-il ?

9.5. Endomorphismes de l'espace

En généralisant les endomorphismes du plan, on obtient quelques résultats analogues pour l'espace.

Homothétie de centre O et de rapport k : $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

Homothétie de centre O et de rapport −1
ou symétrie centrale de centre O : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rotation d'angle α autour de l'axe Oz : $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation d'angle 180° autour de l'axe Oz
ou symétrie par rapport à l'axe Oz : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Projection parallèle à l'axe Oz sur le plan Oxy : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Projection parallèle au plan *Oxy* sur l'axe *Oz* : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Symétrie par rapport au plan *Oxy* : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9.9

Donnez les matrices de $\mathbb{R}^3$ de rotation d'angle α autour de :

a. l'axe *Ox*

b. l'axe *Oy*.

9.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Déterminer la nature géométrique d'un endomorphisme par construction en connaissant les valeurs propres et les vecteurs propres ❏ ok

Connaître les matrices des principales transformations géométriques ❏ ok