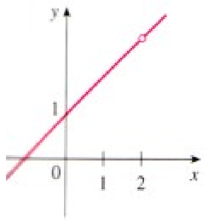
2. Continuité des fonctions

2.1. Continuité en un point

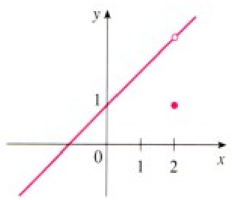
Définition f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Où les fonctions ci-dessous sont-elles discontinues ?



a. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

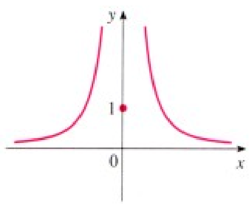
On remarque que f n'est pas définie en 2. Donc f est discontinue en 2.



b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

Comme $f(2) = 1$, f est définie en 2, et $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}} = 3$ existe, mais $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

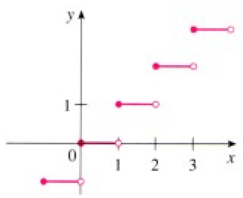
Donc, f est discontinue en 2.



c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Comme $f(0) = 1$, f est définie en 0, mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Donc, f est discontinue en 0.



d. $f(x) = [x]$

La fonction partie entière $f(x) = [x]$ présente une discontinuité en chaque valeur entière de x parce que $\lim [x]$ n'existe pas si n est un entier.

Continuité à gauche et continuité à droite Une fonction est **continue à droite** en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ et **continue à gauche** en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.

Exercice 2.1

Esquissez le graphe d'une fonction qui est continue partout sauf en $x = 3$, et qui est continue à gauche en $x = 3$.

Exercice 2.2

On dira que le parking est ouvert de 8h à 20h.

Un parking fait payer 2 francs pour la première heure (ou fraction d'heure) et 1 franc pour chaque heure suivante jusqu'à un maximum journalier de 10 francs.

a. Représentez graphiquement ce tarif de parking en fonction du temps.

b. Remarquez les discontinuités de cette fonction et expliquez leur signification à quelqu'un qui met sa voiture dans ce garage.

Exercice 2.3

Examinez la continuité des fonctions ci-dessous pour la valeur de a donnée. Dessinez le graphe de ces fonctions.

Remarque
Il n'est pas pertinent de parler de la continuité d'une fonction en un point où elle n'est pas définie. La première chose à faire est d'étudier son domaine de définition et, ensuite, de se poser la question de la continuité sur celui-ci.

a. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ $\qquad a = -1$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 6 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ $\qquad a = -1$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ 6 & \text{si } x = 4 \end{cases}$ $\qquad a = 4$

d. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2-2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\qquad a = 2$

2.2. Continuité sur un intervalle

Définition graphique

Redonnons d'abord une définition graphique intuitive :

« Une fonction f est continue sur un intervalle si on peut dessiner son graphe sans lever le crayon d'un bout à l'autre de l'intervalle. »

Continuité sur un intervalle

On dit qu'une fonction est **continue sur un intervalle** si elle est continue en tout point de l'intervalle. Aux extrémités de l'intervalle, il faut comprendre *continue* par *continue à droite* ou *continue à gauche*.

Rappel
Une fonction est une règle qui assigne à chaque élément x d'un ensemble A exactement un élément, noté $f(x)$, d'un ensemble B. L'ensemble A est appelé le **domaine de définition** de la fonction.

Toutes les fonctions suivantes sont continues **sur leur domaine de définition** :
- polynomiales
- rationnelles
- racines
- trigonométriques
- trigonométriques réciproques (arcsin, arccos, arctan, arccot)
- exponentielles
- logarithmes

Attention ! Une fonction continue sur son domaine de définition n'est pas forcément continue dans $\mathbb{R}$. Par exemple, tan(x) est continue sur son domaine de définition, mais pas dans $\mathbb{R}$.

2.3. Opérations sur les fonctions continues

Chacun de ces résultats découle de la loi des limites correspondante (voir chapitre 1, §1.4)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I ; soit un réel $a \in I$. Si les fonctions f et g sont continues en a, alors

1. $\lambda \cdot f$ est continue en a ($\lambda \in \mathbb{R}$),

2. $f + g$ est continue en a (idem pour « – »),

3. $f \cdot g$ est continue en a,

4. $\dfrac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$ et non définie en a si $g(a) = 0$,

5. si une fonction g est continue au point a et une fonction f est continue au point $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a.

Où la fonction $f(x)=\dfrac{\ln(x)+\arctan(x)}{x^2-1}$ est-elle continue ?

La fonction $y = \ln(x)$ est continue pour $x > 0$ et $y = \arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $\ln(x) + \arctan(x)$ est continue sur $]0 ; +\infty[$, d'après la règle 2.

La fonction du dénominateur est polynomiale et donc partout continue. D'autre part, $x^2 - 1$ est nul quand $x = 1$ et $x = -1$.
Finalement, f est continue sur les intervalles $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

Exercice 2.4

Expliquez pourquoi les fonctions ci-dessous sont continues en chaque point de leur domaine de définition.
Précisez ce domaine de définition.

a. $f(x)=\dfrac{x^4+17}{6x^2+x-1}$ **b.** $f(t)=2t+\sqrt{25-t^2}$

c. $f(x)=e^x\sin(5x)$ **d.** $f(x)=\arcsin(x^2-1)$

e. $f(t)=\ln(t^4-1)$ **f.** $f(x)=\cos(e^{\sqrt{x}})$

2.4. Deux théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

Bernhard **Bolzano**
(1781 - 1848)

Théorème de Bolzano

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés, alors il existe au moins un réel c dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Moins formel :

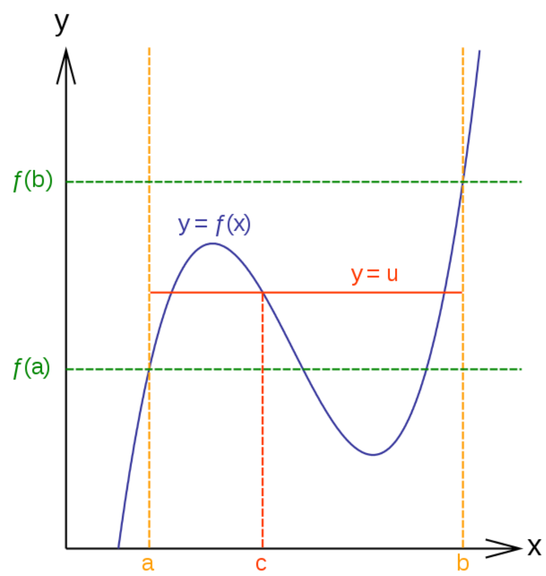
« Une fonction **continue** ne peut changer de signe qu'après s'être annulée. »

Théorème de la valeur intermédiaire

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $f(a) \neq f(b)$, alors, pour tout réel u strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f(c) = u$.

Le théorème de la valeur intermédiaire certifie qu'une fonction continue passe par toutes les valeurs intermédiaires entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$.

Attention ! L'inverse n'est pas vrai ! En effet, pour un réel c strictement compris entre a et b, il n'existe pas forcément un réel $u = f(c)$ dans l'intervalle $]f(a), f(b)[$.



Un exemple de la vie courante

Si à 13h, je roule à 80 km/h, et qu'à 13h05, je roule à 120 km/h, alors, entre 13h et 13h05, il y a eu un ou plusieurs moments où j'ai roulé à 100 km/h.

Exercice 2.5

Hier matin, à 7 heures, il faisait 8 degrés.
Hier soir à 19 heures, il faisait 17 degrés.
Ce matin, à 7 heures, il faisait à nouveau 8 degrés.
Entre 19 heures hier soir et 7 heures ce matin, y a-t-il eu au moins un instant où la température était exactement la même que douze heures auparavant ?

Le théorème de la valeur intermédiaire est mis à contribution dans la localisation des zéros des équations, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Quand $u = 0$, on peut aussi utiliser le **théorème de Bolzano**, qui est un cas particulier du théorème de la valeur intermédiaire.

« Montrez qu'une solution de l'équation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ est située entre 1 et 2. »

Posons $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Nous sommes à la recherche d'un zéro de l'équation donnée, c'est-à-dire d'un nombre c situé entre 1 et 2 tel que $f(c) = 0$. Voilà pourquoi nous prenons $a = 1$, $b = 2$ et $u = 0$, en vue d'exploiter ce théorème. On a :

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

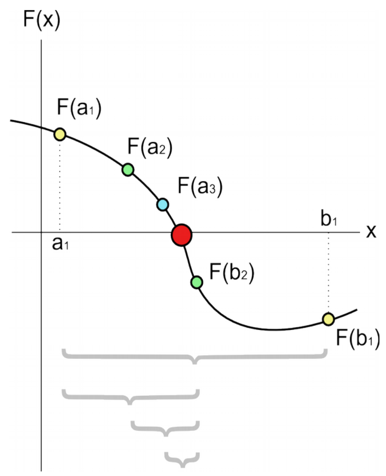
Donc $f(1) < 0 < f(2)$ et $u = 0$ est bien un nombre situé entre $f(1)$ et $f(2)$. De plus, f, étant une fonction polynomiale, est continue. Dans ces conditions, le théorème de la valeur intermédiaire affirme l'existence d'un nombre c entre 1 et 2 tel que $f(c) = 0$. Autrement dit, l'équation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $]1 ; 2[$.

Algorithme de recherche de zéros d'une fonction

L'algorithme le plus simple permettant de trouver un zéro d'une fonction est la **méthode de dichotomie**. On commence avec deux abscisses a et b qui encadrent un zéro de la fonction. À chaque itération, on coupe l'intervalle en deux sous-intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$, $c = (a+b)/2$ étant le milieu de a et b. On garde le sous-intervalle qui contient un zéro, puis on recoupe en deux ce sous-intervalle, et ainsi de suite. L'intervalle encadrant le zéro devient ainsi de plus en plus petit.

Les algorithmes de recherche des zéros d'une fonction sont étudiés en *analyse numérique*.

La méthode de dichotomie garantit la convergence vers un zéro lorsque la fonction est continue.



Étapes successives de la méthode de dichotomie avec comme intervalle initial $[a_1; b_1]$.

Exercice 2.6

Montrez que la fonction $\sin(4x^4 + 3x + 2)$ a une racine comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, puis calculez-la à 0.01 près.

2.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître la définition de la continuité en un point ❏ ok
Connaître la définition de la continuité à gauche, à droite, sur un intervalle ❏ ok
Reconnaître une fonction continue ❏ ok
Dire où une fonction est discontinue ❏ ok
Connaître le théorème de Bolzano ❏ ok
Connaître le théorème de la valeur intermédiaire ❏ ok
Connaître la méthode de dichotomie ❏ ok