4. Applications des dérivées

4.1. Calculs de tangentes à des courbes

On cherche parfois à connaître l'équation d'une droite tangente à une fonction.

Rappels sur les droites Rappelons qu'une droite a pour équation $y = mx + h$, où m est la pente de la droite.

Il est aussi utile de savoir qu'une droite de pente m passant par le point $A(x_0\,;\,y_0)$ a pour équation $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Rappelons enfin que $f'(a)$ donne la pente de la tangente à la courbe $f(x)$ en $x = a$.

Cas où le point de tangence est connu

Si le point de tangence $T(x_T\,;\,y_T)$ est donné, le problème est simple à résoudre.

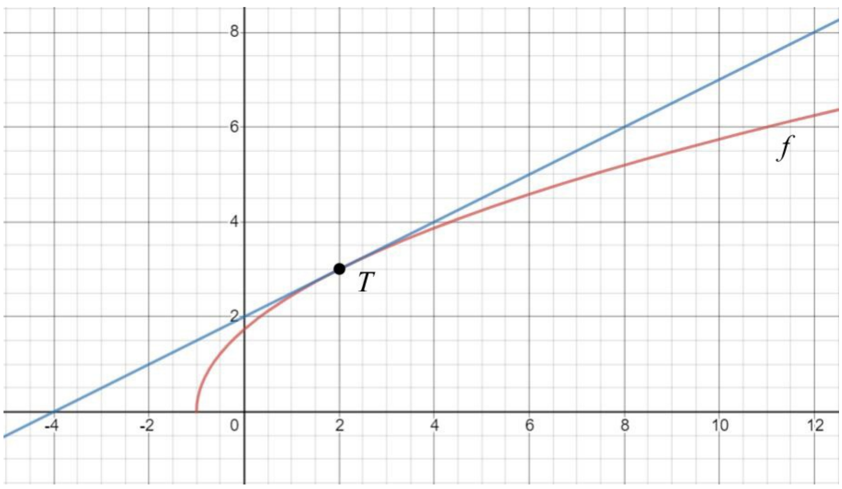
1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $m = f'(x_T)$. C'est la pente de la tangente.
3. Introduire les coordonnées du point de tangence $(x_T\,;\,y_T)$ dans l'équation $y - y_T = m(x - x_T)$.
4. Simplifier cette équation pour en obtenir une de la forme $y = mx + h$.

Exemple Soit la fonction $f(x)=\sqrt{3(x+1)}$ et le point $T(2\,;\,3)$. Donnez l'équation de la tangente à la courbe passant par le point T.
T appartient à la courbe, car $f(x)=\sqrt{3\cdot(2+1)}=3$. C'est donc le point de tangence.

La numérotation correspond à celle du plan de résolution.

1. $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3(x+1)}}$
2. $m=f'(2)=\dfrac{1}{2}$ C'est la pente de la tangente.
3. $y-3=\dfrac{1}{2}(x-2)$
4. $y=\dfrac{x}{2}+2$ C'est l'équation de la tangente.

On peut vérifier le résultat avec desmos



Exercice 4.1 Pour les fonctions f suivantes, donnez l'équation de la tangente au graphe de f en x_T :

Rappel : $y_T = f(x_T)$

a. $f(x)=5x^2-6x+2$ $\quad x_T = 1$ **b.** $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad x_T = 4$

c. $f(x)=\dfrac{3x-2}{5x+1}$ $\quad x_T = 0$

Cas où le point de tangence n'est pas connu

Si le point $A(x_0\,;\,y_0)$ n'est pas le point de tangence, le problème est un peu plus compliqué. Il faut d'abord trouver x_T, l'abscisse du point de tangence.

À l'étape **5**, on peut aussi utiliser le point A.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Poser $y_0 - f(x_T) = f'(x_T)(x_0 - x_T)$ et résoudre pour trouver x_T.
3. $y_T = f(x_T)$.
4. $m = f'(x_T)$.
5. Introduire les coordonnées du point de tangence $(x_T\,;\,y_T)$ dans l'équation $y - y_T = m(x - x_T)$.
6. Simplifier cette équation pour en obtenir une de la forme $y = mx + h$.

L'équation de l'étape 2 provient de $y - y_T = m(x - x_T)$. En effet, $m = f'(x_T)$ et comme le point A appartient à la droite, ses coordonnées doivent satisfaire l'équation de celle-ci.

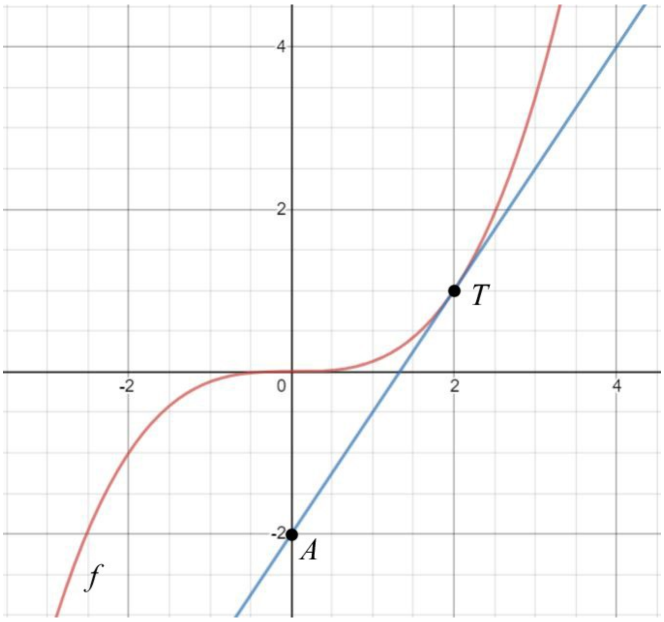
Exemple Soit la fonction $f(x)=\frac{x^3}{8}$ et le point $A(0\,;\,-2)$.

Donnez l'équation de la tangente à la courbe passant par le point A.

La numérotation correspond à celle du plan de résolution.

1. $f'(x)=\frac{3}{8}x^2$
2. $-2-\frac{x_T^3}{8}=\frac{3}{8}x_T^2(0-x_T)$ Après simplifications, on trouve $x_T = 2$.
3. $y_T = f(2) = 1$ Le point de tangence est donc $T(2\,;\,1)$
4. $m=f'(2)=\frac{3}{2}$ C'est la pente de la tangente.
5. $y-1=\frac{3}{2}(x-2)$
6. $y=\frac{3}{2}x-2$ C'est l'équation de la tangente.

Vérifions le résultat avec desmos



Exercice 4.2

Pour les fonctions f suivantes, donnez l'équation de la tangente passant par le point A :

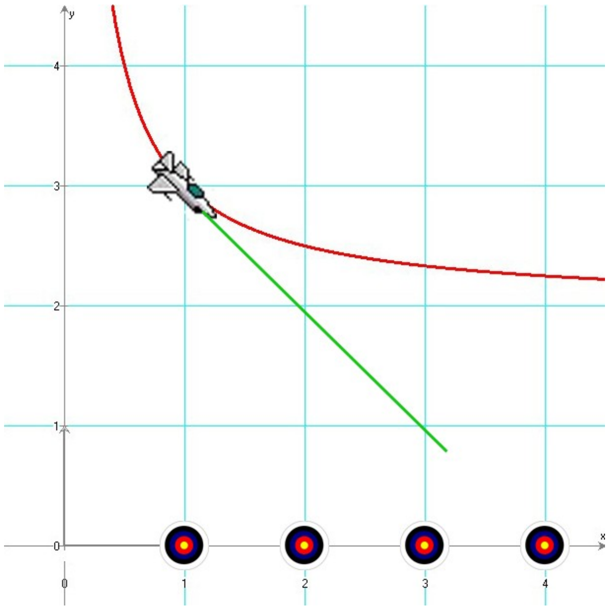
a. $f(x)=\frac{x^2}{5}$ $A(-1\,;\,-3)$

b. $f(x) = 2\cdot\ln(x)$ $A(0\,;\,-4)$

c. $f(x) = e^x$ $A(0\,;\,0)$

Exercice 4.3

Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure ci-dessous, on peut voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire indiquée et qui tirent au rayon laser selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2 , 3 et 4.



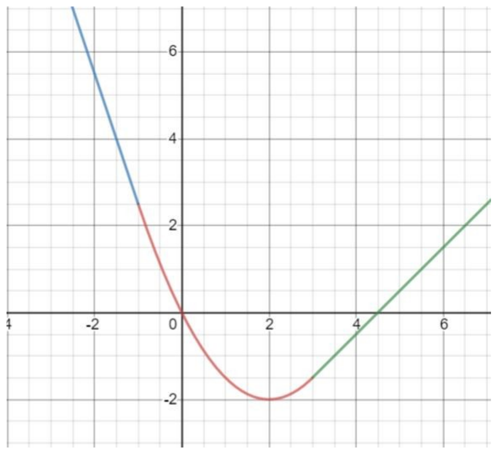
On sait que la trajectoire de l'avion a pour équation $y=\dfrac{2x+1}{x}$ ($x > 0$).

a. Le centre de la cible n° 4 sera-t-il touché si le joueur tire au moment où l'avion est en (1 ; 3) ?

b. Déterminez l'abscisse de l'avion permettant d'atteindre le centre de la cible n° 2.

Exercice 4.4

On veut prolonger un segment de parabole par deux droites (voir le dessin ci-contre), de sorte que la fonction f soit partout dérivable, c'est-à-dire lisse, sans pointe.



Il s'agit évidemment de *calculer* les équations des droites, pas de les trouver d'après le dessin...

Complétez la formule ci-dessous avec les équations des droites.
L'équation de la parabole est donnée.

$$f(x)=\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{x^2}{2}-2x & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } x>3 \end{cases}$$

Exercice 4.5

Soient les fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

a. Tracez les courbes de ces deux fonctions sur un même graphique. Il pourra vous être utile pour la suite...

Soient a et b deux nombres réels.

b. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de $f(x)$ au point d'abscisse a.

c. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de $g(x)$ au point d'abscisse b.

d. Donnez l'équation de la tangente commune aux deux courbes.

Angle L'angle sous lequel se coupent les graphes de deux fonctions f et g en leur point d'intersection I est l'angle que forment leurs tangentes au point I.

Exercice 4.6

Angle aigu entre deux droites de pente m_1 et m_2 :

$$\tan(\alpha) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

Trouvez l'angle d'intersection des graphes des fonctions f et g suivantes :

a. $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^3$

b. $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = \frac{x^2}{4} + 3$

c. $f(x) = \sin(x)$ $\quad g(x) = \cos(x)$ $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Exercice 4.7

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$

a. Esquissez le graphe de $f(x)$ pour $x > 0$.

b. Soit un point A sur le graphe de f (d'abscisse supérieure à 0). Calculez l'aire du triangle OAB, où O est l'origine et B est le point d'intersection de la tangente au graphe de f en A avec l'axe horizontal.

4.2. Problèmes de taux d'accroissement

Exercice résolu

Une brèche s'est ouverte dans les flancs d'un pétrolier. Supposons que le pétrole s'écoulant du tanker s'étend autour de la brèche selon un disque dont le rayon augmente de 2 m/s. À quelle vitesse augmente la surface de la marée noire quand le rayon de la nappe de pétrole est de 60 m ?

Solution Soit A l'aire du disque (en m^2), r le rayon du disque (en m) et t le temps écoulé depuis l'accident (en secondes) .

Dans ce genre de problème, la notation de *Leibniz* est très pratique.
Cela peut paraître étrange, mais on peut faire comme si ces dérivées étaient des fractions !

On va utiliser la relation suivante : $\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{\text{cherché}} = \underbrace{\frac{dA}{dr}}_{\text{à calculer}} \cdot \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\text{donné}}$

Le taux d'accroissement du rayon est $\frac{dr}{dt} = 2$ m/s (voir la donnée).

Il faut maintenant exprimer A par rapport à r pour pouvoir calculer $\frac{dA}{dr}$.

Le modèle de résolution ci-contre est applicable à tous les exercices qui suivent.

L'aire du disque A est donnée par la formule : $A = \pi r^2$.

En dérivant A par rapport à r, on obtient : $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$. Comme $r = 60$, $\frac{dA}{dr} = 120\pi$.

On veut le taux d'accroissement de l'aire polluée par rapport au temps, c'est-à-dire $\frac{dA}{dt}$.

D'après la relation de départ $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$, on trouve que $\frac{dA}{dt} = 120\pi \cdot 2 = 754$ m^2/s.

Exercice 4.8

a. Si les arêtes d'un cube de 2 cm de côtés croissent de 1 cm/min, comment le volume croît-il ?

b. Si l'aire d'une sphère de 10 cm de rayon croît de 5 cm^2/min, comment le rayon croît-il ?

c. Soit un cône dont le rayon de la base est égal à la hauteur. Si le volume de ce cône haut de 10 cm croît de 15 cm^3/min, comment la hauteur croît-elle ?

Exercice 4.9

À l'altitude de 4000 pieds, une fusée s'élève verticalement à une vitesse de 880 pieds par seconde. Une caméra au sol, située à 3000 pieds de la rampe de lancement, la filme. À quelle vitesse doit augmenter l'angle d'élévation de cette caméra pour qu'elle ne perde pas de vue la fusée ?

Exercice 4.10

Une échelle longue de 5 mètres est appuyée contre un mur. Quand l'extrémité posée sur le sol est à une distance de 4 mètres du mur, l'échelle glisse à une vitesse de 2 m/s. À quelle vitesse l'extrémité appuyée contre le mur glisse-t-elle alors vers le bas ?

4.3. Problèmes d'optimisation

Beaucoup de problèmes pratiques conduisent à la détermination des valeurs maximales et minimales prises par une quantité variable. Ces valeurs, qui sont les plus favorables dans un contexte donné, sont appelées **valeurs optimales**. Déterminer ces valeurs constitue un **problème d'optimisation**.

Plan de résolution

Voici la marche à suivre pour résoudre un problème d'optimisation :

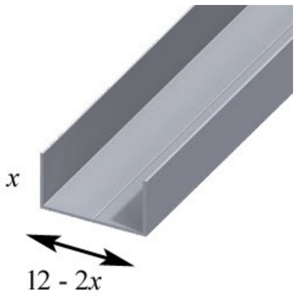
1. Exprimer la quantité variable Q à rendre optimale (maximale ou minimale) comme fonction d'une ou de plusieurs variables.
2. Si Q dépend de plus d'une variable, disons n variables, trouver $(n-1)$ équations liant ces variables.
3. Utiliser ces équations pour exprimer Q comme fonction d'une seule variable.
4. Déterminer l'ensemble D des valeurs admissibles de cette variable.
5. Calculer les extrema de Q (sans oublier de contrôler ce qui se passe aux bords de D). Il faut donc dériver Q par rapport à la variable utilisée et résoudre $Q' = 0$.
6. Vérifier le résultat : a-t-on bien trouvé l'optimum cherché (voir ex. 3.15) ?

Premier exemple

On veut fabriquer une gouttière à profil rectangulaire avec une longue feuille de métal, large de 12 cm, en pliant les deux longs côtés et en les relevant.
Quelle hauteur doivent avoir les côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?

Résolution

La numérotation correspond à celle du plan de résolution.



1. Supposons que la gouttière ait une longueur L. Soit V le volume de la gouttière.
   On a : $V = (12 - 2x)\cdot x\cdot L$

2. Il n'y a qu'une inconnue. Donc rien à faire.

3. $V(x) = (12 - 2x)\cdot x\cdot L = 12\cdot L\cdot x - 2\cdot L\cdot x^2$

4. Le volume V doit être positif, donc $D(x) = [0 ; 6]$.
   Sur le bord gauche de D, x vaut 0, ce qui correspond à un volume nul.
   Sur le bord droit de D, x vaut 6, ce qui correspond aussi à un volume nul.

5. $V\,'(x) = 12\cdot L - 4\cdot L\cdot x = 0 \Rightarrow \underline{x = 3}$

6. Pour $x = 3$, on trouve un volume de $18\cdot L$.
   Comparons ce résultat avec le volume obtenu pour $x = 2.9$ et $x = 3.1$.
   Dans les deux cas, on obtient un volume de $17.98\cdot L$. On avait donc bien trouvé le volume maximal.

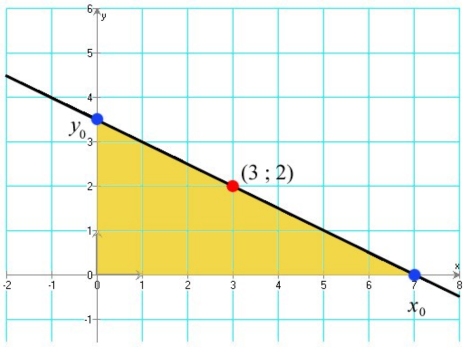
   On aurait aussi pu calculer la dérivée seconde de $V(x)$ en $x = 3$, et étudier son signe.
   On a : $V\,''(x) = -4\cdot L$.

   Comme la dérivée seconde est partout négative, la fonction V est partout concave (c'est en effet une parabole), donc aussi en $x = 3$. Le résultat est donc bien un maximum.

Pour vérifier qu'on a bien trouvé un maximum, on peut utiliser soit la fonction $V(x)$, soit la dérivée, soit la dérivée seconde (voir ex. 3.15).

Deuxième exemple

On considère une famille de droites de pente négative passant par le point de coordonnées (3 ; 2). Pour quelle droite de la famille le triangle délimité par la droite et les axes de coordonnées a-t-il la plus petite aire ?



Résolution

1. La droite que l'on cherche a pour équation $y = m{\cdot}x + h$. Appelons x_0 l'endroit où la droite coupe l'axe des x, et y_0 l'endroit où elle coupe l'axe des y.

Elle coupe l'axe des y quand $x = 0$. Donc, $y_0 = h$.

Elle coupe l'axe des x quand $y = 0$. Donc, $x_0 = -\frac{h}{m}$.

L'aire sera $A = \frac{x_0 \cdot y_0}{2} = -\frac{h^2}{2m}$.

2. On sait que la droite passe par le point (3; 2). Donc, on a $2 = 3m + h$, ou $h = 2 - 3m$.

3. $A(m) = -\frac{(2-3m)^2}{2m}$.

4. Domaine de validité de m : $D(m) =]-\infty; 0[$.

5. $A'(m) = -\frac{2(2-3m)(-3)\cdot 2\cdot m - (2-3m)^2\cdot 2}{4m^2} = \ldots = \frac{(2-3m)(2+3m)}{2m^2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{2}{3}}$ La solution $m = \frac{2}{3}$ n'est pas dans le domaine de validité $D(m)$.

6. $A\left(-\frac{2}{3}\right) = 12$. $A(-0.66) = 12.0003$. $A(-0.67) = 12.00007$.

C'est donc bien l'aire minimale.

Exercice 4.11

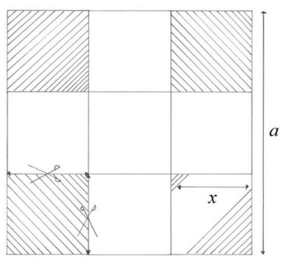
Parmi tous les rectangles de périmètre $2p$, quel est celui dont l'aire est maximale ?
Quelle est son aire ?

Exercice 4.12

Un rectangle a ses deux coins inférieurs sur l'axe des x tandis que ses deux coins supérieurs sont sur la parabole $y = 16 - x^2$.
Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?

Exercice 4.13

Vous disposez d'une plaque de carton carrée, de côté a.
On vous demande de fabriquer une boîte sans couvercle de volume maximum.
Vous découperez un carré de côté x dans chacun des quatre coins de la plaque pour obtenir une croix, puis vous relèverez les bords.
Donnez les dimensions de la boîte optimale.



Exercice 4.14

Un aquarium ouvert a une base carrée et est conçu pour contenir 62.5 dm^3 d'eau. Quelle est la valeur minimum de l'aire de la surface extérieure de l'aquarium ?

Exercice 4.15

Dimensionnez une boîte de conserve cylindrique d'un décimètre cube, l'objectif étant d'utiliser le moins de fer-blanc possible.

Exercice 4.16

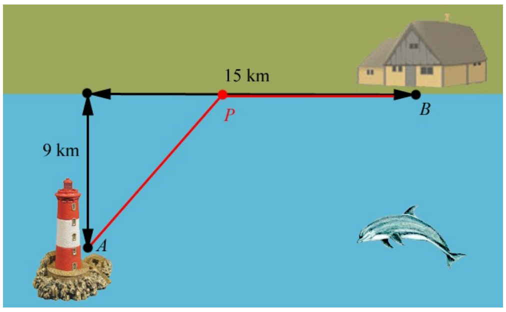
Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$.
Quelles sont les abscisses des points de la courbe représentative de f les plus proches de l'origine ?

Exercice 4.17

Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.

Vérifiez votre résultat avec

Profitez-en pour visualiser comment se déplace le minimum en fonction des vitesses sur l'eau et sur la terre ferme.



Exercice 4.18

pourra vous être utile...

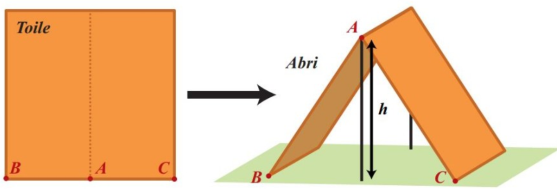
Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties de manière à pouvoir former un triangle équilatéral avec l'une et un carré avec l'autre. Comment faut-il couper ce fil pour que l'aire totale des deux figures construites soit…

a. maximale ?

b. minimale ?

Exercice 4.19

Vous disposez d'une bâche carrée de 4 m x 4 m pour monter une tente :



Déterminez la hauteur h de l'abri pour que son volume soit maximal.

Exercice 4.20*

Formules pour le cône

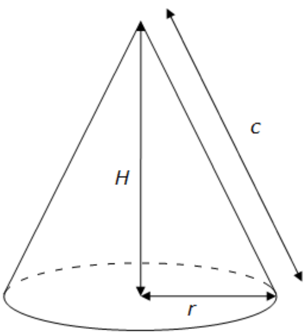
c est l'apothème du cône,
r le rayon de la base,
H la hauteur,
A_{lat} l'aire latérale.

$$A_{lat} = \pi r c$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

Quelles dimensions faut-il donner à un tipi de volume donné pour minimiser la toile ?

Donnez le rapport $\frac{H}{r}$.



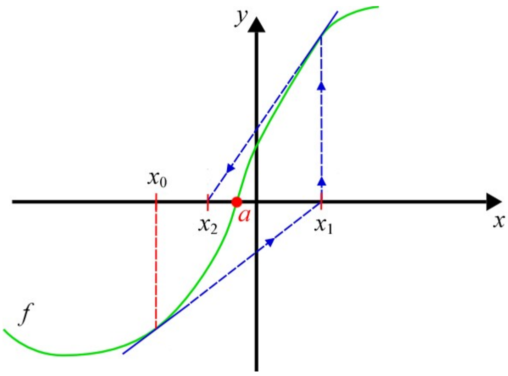
Il est impossible de dire si les Indiens d'Amérique se posaient la question. La forme de leurs tipis est cependant optimale de ce point de vue. Hasard ?

4.4. Méthode de Newton-Raphson

En analyse numérique, la **méthode de Newton-Raphson**, est un algorithme efficace pour approcher un zéro d'une fonction. De manière informelle, le nombre de décimales correctes double à chaque étape.

Partant d'une valeur approximative raisonnable d'un zéro x_0 d'une fonction f, on approche la fonction par sa tangente au point $(x_0\,;f(x_0))$. Cette tangente est une fonction affine dont on sait trouver l'unique zéro (que l'on appellera x_1). Ce zéro de la tangente sera généralement plus proche du « vrai » zéro de la fonction (a). On recommence les mêmes calculs en partant cette fois de x_1, ce qui va nous donner l'abscisse x_2, etc.

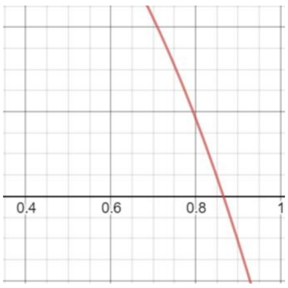
Par récurrence, on définit la suite x_n par $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. En principe, cette suite va converger vers a.



Exercice
Retrouvez la valeur de x_{n+1} en partant de l'équation de la droite $y-y_0=m(x-x_0)$

Si la fonction présente un extremum local, il y a un risque que la méthode ne converge pas, car la valeur de la dérivée est nulle en un extremum et le nouveau point à l'infini.

Exemple Cherchons un zéro de la fonction $f(x)=\cos(x)-x^3$.



$f(x)=\cos(x)-x^3$

La dérivée est $f'(x)=-\sin(x)-3x^2$.

Nous savons que le zéro se situe entre 0 et 1. Prenons comme valeur de départ $x_0 = 0.5$.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0.5-\frac{\cos(0.5)-0.5^3}{-\sin(0.5)-3\cdot 0.5^2}=1.11214$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.11214-\frac{\cos(1.11214)-1.11214^3}{-\sin(1.11214)-3\cdot 1.11214^2}=0.90967$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0.90967-\frac{\cos(0.90967)-0.90967^3}{-\sin(0.90967)-3\cdot 0.90967^2}=0.86626$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=0.86626-\frac{\cos(0.86626)-0.86626^3}{-\sin(0.86626)-3\cdot 0.86626^2}=0.86547$$

$$x_5=x_4-\frac{f(x_4)}{f'(x_4)}=0.86547-\frac{\cos(0.86547)-0.86547^3}{-\sin(0.86547)-3\cdot 0.86547^2}=0.86547$$

Après cinq itérations, les cinq premiers chiffres après la virgule sont déjà exacts.

Exercice 4.21 Cherchez le zéro de la fonction $e^x + \sin(x) - 3$, sachant qu'il se trouve dans l'intervalle [0 ; 2]. On veut que les quatre premiers chiffres après la virgule soient exacts.

4.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Calculer une tangente à une courbe ❏ ok
Connaître la notation de Leibniz pour les dérivées ❏ ok
Résoudre un problème de taux d'accroissement ❏ ok
Connaître la démarche pour résoudre un problème d'optimisation ❏ ok
Connaître la méthode de Newton-Raphson ❏ ok