

# A nalyse



**Didier Müller, juin 2020**

**[www.apprendre-en-ligne.net](http://www.apprendre-en-ligne.net)**



# Table des matières

## 1. Limites

1.1. Les limites dans la vie courante.....	1
1.2. Exemple introductif.....	2
1.3. Définition et notations.....	3
1.4. Opérations sur les limites.....	4
1.5. Calcul de limites quand $x \rightarrow a$ , $a$ fini.....	4
1.6. Calcul de limites quand $x \rightarrow \infty$ .....	6
1.7. Une limite célèbre.....	7
1.8. Ce qu'il faut absolument savoir.....	8

## 2. Continuité

2.1. Continuité en un point.....	9
2.2. Continuité sur un intervalle.....	10
2.3. Opérations sur les fonctions continues.....	10
2.4. Deux théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues.....	11
2.5. Ce qu'il faut absolument savoir.....	12

## 3. Dérivées

3.1. Un peu d'histoire.....	13
3.2. Définition de la dérivée.....	13
3.3. La dérivée seconde.....	17
3.4. Dérivées de fonctions usuelles.....	19
3.5. Règles de dérivation.....	20
3.6. Quatre théorèmes relatifs aux fonctions dérivables.....	21
3.7. Ce qu'il faut absolument savoir.....	24

## 4. Applications des dérivées

4.1. Calculs de tangentes à des courbes.....	25
4.2. Problèmes de taux d'accroissement.....	28
4.3. Problèmes d'optimisation.....	29
4.4. Méthode de Newton-Raphson.....	32
4.5. Ce qu'il faut absolument savoir.....	32

## 5. Étude de fonctions

5.1. Asymptotes.....	33
5.2. Points fixes.....	33
5.3. Croissance et concavité (rappels).....	34
5.4. Méthode.....	35
5.5. Un exemple complet.....	35
5.6. Ce qu'il faut absolument savoir.....	38

## 6. Étude de courbes paramétrées

6.1. Définitions.....	41
6.2. Exemple de courbes paramétrées : figures de Lissajous.....	41
6.3. Asymptotes.....	42
6.4. Dérivées et points particuliers.....	43
6.5. Méthode.....	43
6.6. Deux exemples complets.....	44
6.7. Ce qu'il faut absolument savoir.....	48

## 7. Primitives

7.1. Recherche de primitives.....	49
7.2. Intégration par substitution.....	49
7.3. Intégration par parties.....	51
7.4. Comment choisir une méthode d'intégration.....	52
7.5. Ce qu'il faut absolument savoir.....	52

## 8. Intégrales

8.1. Un peu d'histoire.....	53
8.2. Calcul de l'aire entre une courbe et l'axe des $x$ .....	53
8.3. Définition de l'intégrale définie.....	54
8.4. Le théorème fondamental du calcul intégral.....	55
8.5. Retour au problème du calcul d'aire.....	56
8.6. Calcul de l'intégrale définie.....	57
8.7. Théorème de la moyenne (du calcul intégral).....	58
8.8. Aire entre deux courbes.....	58
8.9. Volume d'un solide de révolution.....	59
8.10. Mouvement rectiligne.....	61
8.11. Application au traitement d'images.....	62
8.12. Intégrales impropres.....	63
8.13. Ce qu'il faut absolument savoir.....	64

## 9. Équations différentielles

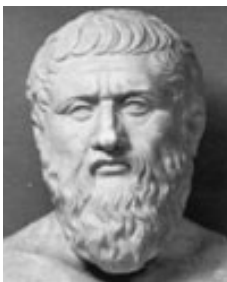
9.1. Introduction.....	65
9.2. L'équation $y' = f(x)$ .....	65
9.3. L'équation à variables séparables $y' \cdot g(y) = h(x)$ .....	66
9.4. L'équation homogène $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ .....	66
9.5. L'équation linéaire $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ .....	67
9.6. Applications des équations différentielles d'ordre 1.....	67
9.7. Ce qu'il faut absolument savoir.....	69

# 1. Limites

## 1.1. Les limites dans la vie courante

### Vitesse instantanée

La notion de vitesse, et en particulier la vitesse d'un objet à un instant précis, est, étonnamment, subtile et difficile à définir précisément. Considérez cette affirmation : « À l'instant où le cheval a franchi la ligne d'arrivée, il galopait à 64 km/h ». Comment peut-on étayer une telle affirmation ? Une photographie ne serait d'aucune aide, puisque sur le cliché, le cheval est immobile ! Il y a une sorte de paradoxe à essayer de quantifier le mouvement à un moment précis puisqu'en se focalisant sur un seul instant on stoppe le mouvement !



Zénon d'Elée  
(env. -490 – env. -425)

Rappelons que la vitesse est la distance parcourue  $\Delta x$  divisée par le temps  $\Delta t$  qu'il a fallu pour la parcourir. Pour avoir la vitesse instantanée, on choisira  $\Delta t \rightarrow 0$ . On ne peut pas prendre  $\Delta t = 0$ , puisqu'on aurait une division par 0. La vitesse instantanée est donc une limite.

Les problèmes de mouvement étaient un des thèmes centraux de **Zénon** et d'autres philosophes dès le 5<sup>ème</sup> siècle avant Jésus Christ. L'approche moderne, rendue célèbre par *Newton*, ne considère plus la vitesse à un instant donné, mais sur un petit intervalle de temps contenant cet instant.

### Pente d'une courbe en un point



On a vu dans le chapitre consacré aux droites comment calculer la pente d'une droite. Qu'en est-il pour une courbe ? Contrairement aux droites, la pente d'une courbe n'est pas constante. Par exemple, quand les coureurs du Tour de France gravissent un col, la pente n'est pas toujours la même ; certains tronçons sont plus raides que d'autres.

Comme la pente d'une droite est le déplacement vertical  $\Delta y$  divisé par le déplacement horizontal  $\Delta x$ , la pente en un point précis d'une courbe sera obtenu en choisissant  $\Delta x \rightarrow 0$ , autrement dit en prenant deux points « proches » sur la courbe. La pente d'une courbe en un point est donc elle aussi une limite.

## 1.2. Exemple introductif

Soit la fonction  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  dont nous allons étudier le comportement au voisinage de  $a = 0$ , car elle est **indéfinie** en ce point, puisqu'on aurait  $\frac{0}{0}$ .

### Méthode numérique

La méthode numérique consiste à construire un petit tableau de valeurs.

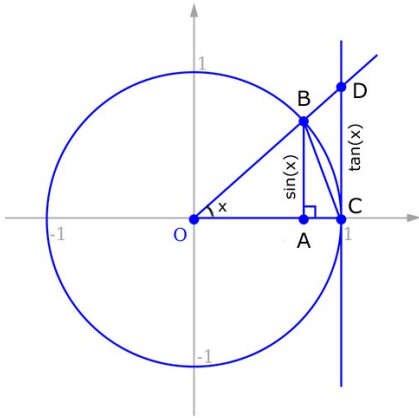
Dans notre cas, on se rapprochera de 0 en venant **depuis la gauche** (i.e. en prenant des nombres plus petits que 0) et **depuis la droite** (i.e. en prenant des nombres plus grands que 0). D'après le tableau ci-dessous, il semblerait que *la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0 est 1*.



**Attention !** En analyse, les angles sont **toujours exprimés en radians** ! Veillez à ce que votre calculatrice soit bien en mode « radian » (rad).

	gauche				→	a	←	droite			
x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001		0		0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999		indéfini		0.99999	0.99999	0.99998	0.99833

**Méthode géométrique** Nous allons prouver que le résultat de l'analyse numérique est exact par une méthode géométrique *ad hoc*.



Regardons le dessin ci-contre.

Aire du triangle OCB ≤ Aire du secteur OCB ≤ Aire du triangle OCD, d'où :

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin(x) \leq \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{2\pi} \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x)$$

Après simplifications :

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Après division par sin(x) (d'après le dessin sin(x) > 0) :

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

Puis en inversant tout :

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

Comme on fait tendre x vers 0, cos(x) tend vers 1 et il résulte que :

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq 1$$

On vient de démontrer que, en venant depuis la droite (puisque l'angle x est positif), la limite de la fonction f(x) tend vers 1.

On remarque rapidement que le résultat est le même en venant depuis la gauche (i.e. x < 0), puisque  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$  et cos(-x) = cos(x).

L'aire du disque trigonométrique est π · 1<sup>2</sup>. Pour trouver l'aire d'un secteur d'angle x, il faut multiplier cette aire par  $\frac{x}{2\pi}$ . (x = 2π désigne le disque entier, π un demi-disque, etc.).

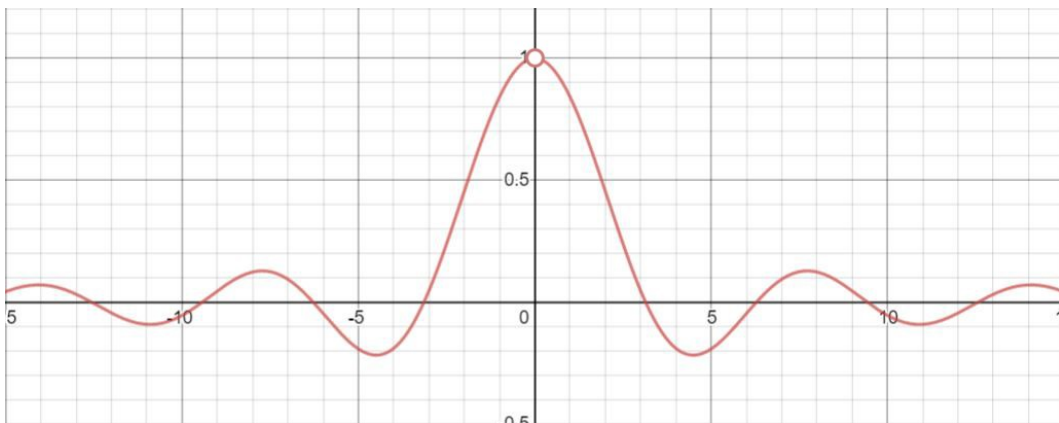


Comme la limite à gauche est égale à la limite à droite, on dit que la limite existe et qu'elle est égale à 1.

On l'écrit :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

**Remarque importante**

Si la limite à gauche est différente de la limite à droite, on dit que la limite **n'existe pas**.



Graphe de  $\frac{\sin(x)}{x}$ , avec un trou en x = 0

### 1.3. Définition et notations

**Définition** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$ . Elle peut ne pas être définie en  $a$ .

La limite de  $f$  en  $a$  est le nombre vers lequel se rapproche la valeur de  $f(x)$  quand  $x$  se rapproche aussi près qu'on veut de  $a$ , **mais avec  $x \neq a$** .

**Notations** Il existe de nombreuses notations pour indiquer les limites à gauche et à droite. Voici celle que nous utiliserons :

*Limite à gauche*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = L$$

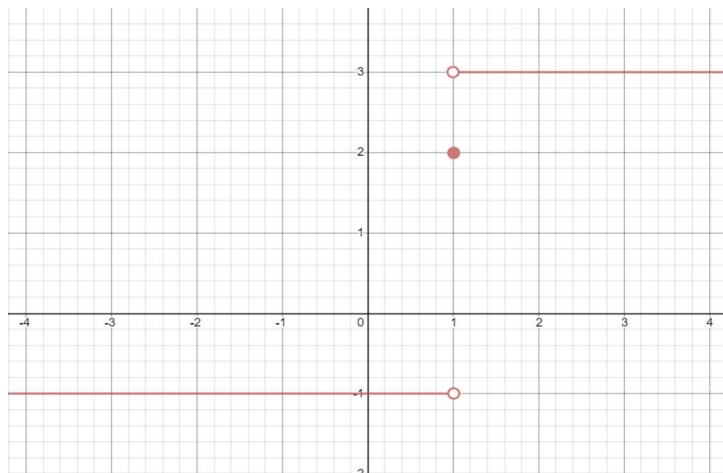
*Limite à droite*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = L$$

Rappelons encore une fois que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = L$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = L$ .

#### Exercice 1.1

Soit la fonction  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Donnez : **a.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$     **b.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$     **c.**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     **d.**  $f(1)$

### 1.4. Opérations sur les limites

Si  $f$  et  $g$  admettent des limites finies quand  $x \rightarrow a$ , avec  $a$  fini ou infini, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ où } k \text{ est un nombre réel}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (\text{idem pour « - »})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$$

## 1.5. Calcul de limites quand $x \rightarrow a$ , $a$ fini

On va maintenant classer les limites en différentes catégories, puis on développera des techniques de résolution pour chacune de ces catégories.

On cherchera d'abord des limites quand  $x$  tend vers un nombre fini, puis quand  $x$  tend vers l'infini.

### Limites de fonctions continues en $a$

Introduisons d'abord une définition intuitive de la continuité :

« Une fonction est **continue** dans un intervalle si on peut la dessiner d'un bout à l'autre de l'intervalle sans lever le crayon. »

Si  $f$  est **continue** en  $a$ , la limite en  $a$  est égale à l'image de  $a$ .

**Exemples**  $\lim_{x \rightarrow 5} (3x^2 + x) = 3 \cdot 5^2 + 5 = 80$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Limite du quotient de deux fonctions

Soit la fonction  $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$

**1<sup>er</sup> cas :**  
dénominateur non nul

Si  $\lim_{x \rightarrow a} N(x) = c_1$  et  $\lim_{x \rightarrow a} D(x) = c_2 \neq 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{c_1}{c_2}$ .

**2<sup>ème</sup> cas :**  
numérateur non nul et  
dénominateur nul

Seule une des trois réponses suivantes est possible :

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  n'existe pas car  $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$

Pour déterminer la bonne réponse, il faut donc comparer la limite à gauche et la limite à droite. Si elles sont égales, la bonne réponse sera la **1.** ou la **2.** Si elles sont différentes, la bonne réponse sera la **3.**

Si le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0, on a une **forme indéterminée**.

**3<sup>ème</sup> cas :**  
numérateur et  
dénominateur nuls

#### a. $N(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes

Si  $N(a) = 0$ ,  $N(x)$  est divisible par  $(x-a)$  et si  $D(a) = 0$ ,  $D(x)$  est aussi divisible par  $(x-a)$ . On peut donc simplifier la fraction par  $(x-a)$ .

Exemple :  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+1} = -\frac{1}{3}$

Comparez les courbes des  
fonctions  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$  et  $\frac{x-3}{x+1}$ .

Que constatez-vous ?  
Sont-elles vraiment les mêmes ?

#### b. $N(x)$ et $D(x)$ ne sont pas des polynômes

Dans certains cas, on peut simplifier, après avoir amplifié...

Exemple :  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$

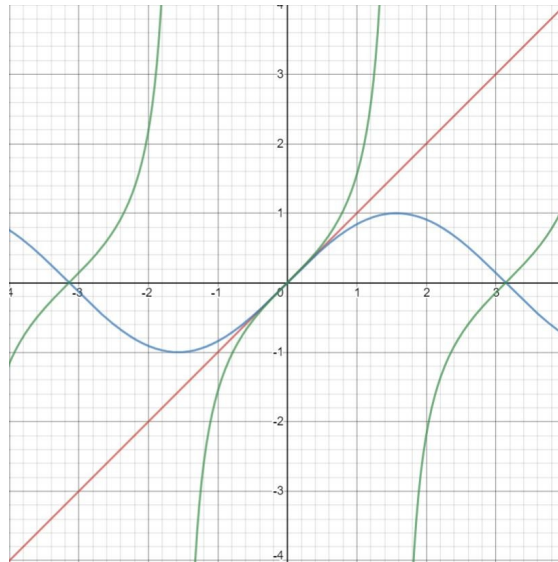
#### c. Quand $x \approx 0$ , alors $\sin(x) \approx x$ et $\tan(x) \approx x$ . Voir l'image ci-après.

Attention, cela ne marche que quand  $x$  est proche de 0 !

Nous verrons dans le chapitre 3,  
consacré aux *dérivées*, la **règle  
de l'Hôpital**, qui pourra aussi  
être utilisée.

En rouge :  $f(x) = x$   
 En bleu :  $g(x) = \sin(x)$   
 En vert :  $h(x) = \tan(x)$

Au voisinage de 0, ces trois courbes se superposent presque parfaitement. Vous pouvez le vérifier avec votre calculatrice.



**Exercice 1.2**

Calculez, si elles existent, les limites suivantes :

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$                                     | 2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$            | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 1}$                           |
| 4. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$                   | 5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$      | 6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$                  |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$                             | 8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{ x^2 - 4 }$                | 9. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ |
| 10. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x}$          | 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$                        |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$                            | 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3}$                      |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$                        | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$                      | 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$                            |
| 19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin(x - 1)}{1 - x}$                            | 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x^2 + x}$                | 21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x - 1)^2}$                                  |
| 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{3x}$                                   | 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$                           | 24. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x - 2 }{x^2 - 3x + 2}$                         |



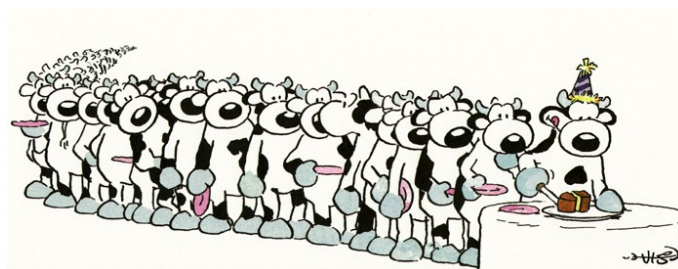
Aide pour les ex. 23-24 :  
 comparer les limites à gauche  
 et à droite

**1.6. Calcul de limites quand  $x \rightarrow \infty$**

**Principe du gâteau d'anniversaire**

Quand on divise un nombre fini par un nombre tendant vers l'infini, le résultat tend vers zéro.

« Plus le nombre d'invités est grand, plus la part de gâteau est petite. »



## Limite d'une fonction polynôme quand $x \rightarrow \infty$

### Théorème 1

En  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ), toute fonction polynôme a la même limite que son terme de degré le plus élevé.

### Démonstration

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n \left( 1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$$

## Limite d'une fonction rationnelle quand $x \rightarrow \infty$

### Théorème 2

En  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ), toute fonction rationnelle a la même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

En effet, d'après le théorème 1 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)}{(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ +\infty \text{ ou } -\infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

## Formes indéterminées

Des expressions du type «  $\frac{0}{0}$  », «  $0 \cdot \infty$  », «  $\frac{\infty}{\infty}$  », «  $\infty - \infty$  » sont dites **indéterminées**.

Lorsqu'un calcul de limites conduit à une forme indéterminée, on ne peut pas conclure immédiatement ; il faut généralement faire quelques transformations en utilisant par exemple les formules que vous trouverez dans la marge ci-contre.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + bx + c} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| x + \frac{b}{2} \right|$$

Refaites les deux exemples ci-contre en utilisant la troisième formule !

### Exemples

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 4} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+2)^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x+2| - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2 - x) = 2$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x-1)^2 + 3} + 2x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{(x-1)^2 \left( 1 + \frac{3}{(x-1)^2} \right)} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x-1| \sqrt{1 + \frac{3}{(x-1)^2}} + 2x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x-1| + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1+2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty.$$

## Exercice 1.3

Calculez, si elles existent, les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 - 5x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 + x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x + 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^7}{x^7 + 3x^5 + 2x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 + 5}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - x}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$$

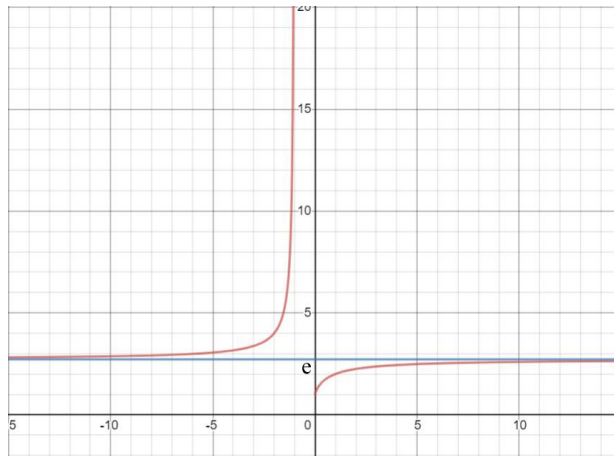
$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 + 1})$$

### 1.7. Une limite célèbre

Dans le chapitre consacré aux logarithmes, nous avons déjà vu cette limite célèbre, qui est la définition du nombre  $e$  (dont la valeur est 2.718281828459...) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e . \quad \text{De plus, on a aussi } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$



Graphe de  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

CHELOU



Où est la faute de raisonnement ?

C'est ici l'occasion de remarquer que l'on peut facilement se tromper en faisant des raisonnements qui semblent justes. On pourrait en effet se dire que quand  $x$  tend vers l'infini,  $1/x$  tend vers 0, et qu'il reste alors 1 puissance infini, donc 1. Or, ce n'est pas la réponse exacte. Aussi est-il toujours prudent de vérifier sa réponse par une petite analyse numérique.

Remarquez bien que quand  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $y \rightarrow 0$ , puisque  $y = \frac{1}{x}$ .

On a aussi :  $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e .$

En effet, en substituant  $y$  par  $\frac{1}{x}$ , on retrouve la première limite.

#### Exercice 1.4

Il faut utiliser les opérations du § 1.4 et parfois travailler par substitution pour se ramener à la définition de  $e$ .

Calculez, si elles existent, les limites suivantes :

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$     | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}}$                  | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$   |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+1}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2(x))^{\cot^2(x)}$           |  |

### 1.8. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les définitions de limite, limite à gauche, limite à droite

ok

Savoir prouver que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

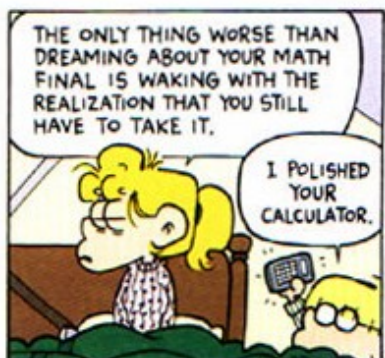
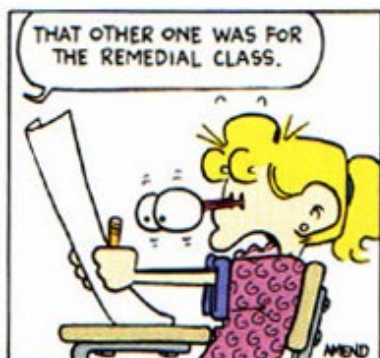
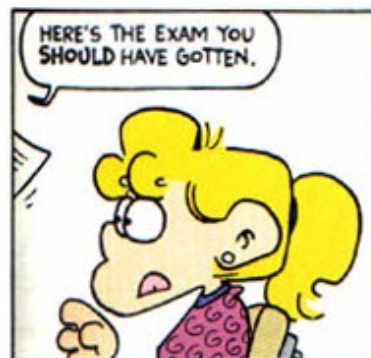
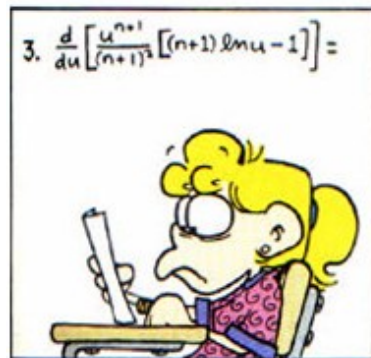
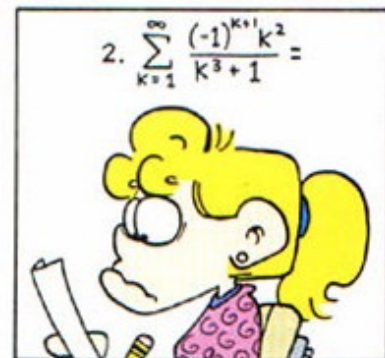
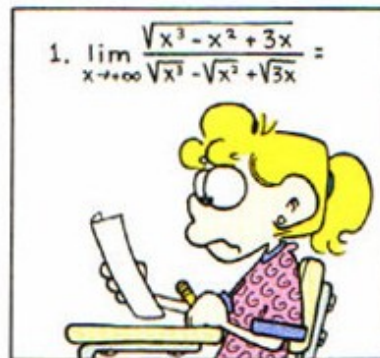
ok

Savoir résoudre les types de limites vus dans ce chapitre

ok

# FoxTrot

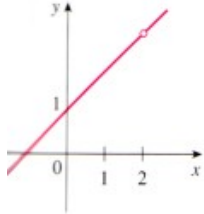
BILL AMEND



## 2. Continuité des fonctions

### 2.1. Continuité en un point

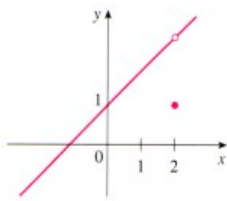
**Définition**  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .



Où les fonctions ci-dessous sont-elles discontinues ?

a.  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

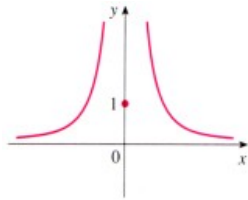
On remarque que  $f$  n'est pas définie en 2. Donc  $f$  est discontinue en 2.



b.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Comme  $f(2) = 1$ ,  $f$  est définie en 2, et  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3$  existe, mais  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ .

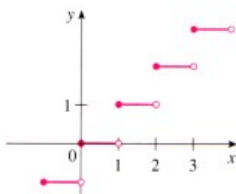
Donc,  $f$  est discontinue en 2.



c.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Comme  $f(0) = 1$ ,  $f$  est définie en 0, mais  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

Donc,  $f$  est discontinue en 0.



d.  $f(x) = [x]$

La fonction partie entière  $f(x) = [x]$  présente une discontinuité en chaque valeur entière de  $x$  parce que  $\lim [x]$  n'existe pas si  $n$  est un entier.

**Continuité à gauche et continuité à droite**

Une fonction est **continue à droite** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  et **continue à gauche** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

#### Exercice 2.1

Esquissez le graphe d'une fonction qui est continue partout sauf en  $x = 3$ , et qui est continue à gauche en  $x = 3$ .

#### Exercice 2.2

On dira que le parking est ouvert de 8h à 20h.

Un parking fait payer 2 francs pour la première heure (ou fraction d'heure) et 1 franc pour chaque heure suivante jusqu'à un maximum journalier de 10 francs.

- Représentez graphiquement ce tarif de parking en fonction du temps.
- Remarquez les discontinuités de cette fonction et expliquez leur signification à quelqu'un qui met sa voiture dans ce garage.

**Exercice 2.3**

Examinez la continuité des fonctions ci-dessous pour la valeur de  $a$  donnée. Dessinez le graphe de ces fonctions.

**Remarque**

Il n'est pas pertinent de parler de la continuité d'une fonction en un point où elle n'est pas définie. La première chose à faire est d'étudier son domaine de définition et, ensuite, de se poser la question de la continuité sur celui-ci.

$$\text{a. } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad a = -1$$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ 6 & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad a = -1$$

$$\text{c. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 6 & \text{si } x = 4 \end{cases} \quad a = 4$$

$$\text{d. } f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad a = 2$$

**2.2. Continuité sur un intervalle**

**Définition graphique** Redonnons d'abord une définition graphique intuitive :

« Une fonction  $f$  est continue sur un intervalle si on peut dessiner son graphe sans lever le crayon d'un bout à l'autre de l'intervalle. »

**Continuité sur un intervalle**

On dit qu'une fonction est **continue sur un intervalle** si elle est continue en tout point de l'intervalle. Aux extrémités de l'intervalle, il faut comprendre *continue par continue à droite* ou *continue à gauche*.

**Rappel**

Une fonction est une règle qui assigne à chaque élément  $x$  d'un ensemble  $A$  exactement un élément, noté  $f(x)$ , d'un ensemble  $B$ . L'ensemble  $A$  est appelé le **domaine de définition** de la fonction.

Toutes les fonctions suivantes sont continues **sur leur domaine de définition** :

- polynomiales
- rationnelles
- racines
- trigonométriques
- trigonométriques réciproques (arcsin, arccos, arctan, arccot)
- exponentielles
- logarithmes

**Attention !** Une fonction continue sur son domaine de définition n'est pas forcément continue dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple,  $\tan(x)$  est continue sur son domaine de définition, mais pas dans  $\mathbb{R}$ .

**2.3. Opérations sur les fonctions continues**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ ; soit un réel  $a \in I$ . Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$ , alors

1.  $\lambda f$  est continue en  $a$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ),
2.  $f + g$  est continue en  $a$  (idem pour « - »),
3.  $f \cdot g$  est continue en  $a$ ,
4.  $\frac{f}{g}$  est continue en  $a$  si  $g(a) \neq 0$  et non définie en  $a$  si  $g(a) = 0$ ,
5. si une fonction  $g$  est continue au point  $a$  et une fonction  $f$  est continue au point  $g(a)$ , alors  $f \circ g$  est continue en  $a$ .

Chacun de ces résultats découle de la loi des limites correspondante (voir chapitre 1, §1.4)

Où la fonction  $f(x) = \frac{\ln(x) + \arctan(x)}{x^2 - 1}$  est-elle continue ?

La fonction  $y = \ln(x)$  est continue pour  $x > 0$  et  $y = \arctan(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Il s'ensuit que la fonction  $\ln(x) + \arctan(x)$  est continue sur  $]0; +\infty[$ , d'après la règle 2.

La fonction du dénominateur est polynomiale et donc partout continue. D'autre part,  $x^2 - 1$  est nul quand  $x = 1$  et  $x = -1$ .

Finalement,  $f$  est continue sur les intervalles  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .

**Exercice 2.4**

Expliquez pourquoi les fonctions ci-dessous sont continues en chaque point de leur domaine de définition.

Précisez ce domaine de définition.

a.  $f(x) = \frac{x^4 + 17}{6x^2 + x - 1}$

b.  $f(t) = 2t + \sqrt{25 - t^2}$

c.  $f(x) = e^x \sin(5x)$

d.  $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$

e.  $f(t) = \ln(t^4 - 1)$

f.  $f(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

**2.4. Deux théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues**



Bernhard Bolzano  
(1781 - 1848)

**Théorème de Bolzano**

Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que  $f(a)$  et  $f(b)$  ont des signes opposés, alors il existe au moins un réel  $c$  dans l'intervalle ouvert  $]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .

Moins formel :

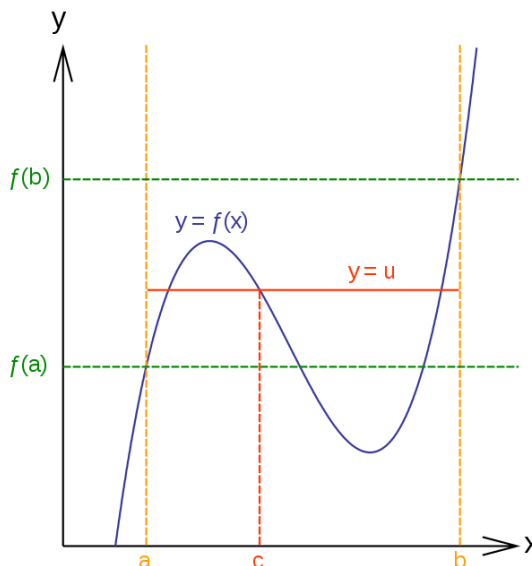
« Une fonction **continue** ne peut changer de signe qu'après s'être annulée. »

**Théorème de la valeur intermédiaire**

Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $f(a) \neq f(b)$ , alors, pour tout réel  $u$  strictement compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  de l'intervalle ouvert  $]a, b[$  tel que  $f(c) = u$ .

Le théorème de la valeur intermédiaire certifie qu'une fonction continue passe par toutes les valeurs intermédiaires entre les valeurs  $f(a)$  et  $f(b)$ .

**Attention ! L'inverse n'est pas vrai !** En effet, pour un réel  $c$  strictement compris entre  $a$  et  $b$ , il n'existe pas forcément un réel  $u = f(c)$  dans l'intervalle  $]f(a), f(b)[$ .



**Un exemple de la vie courante**

Si à 13h, je roule à 80 km/h, et qu'à 13h05, je roule à 120 km/h, alors, entre 13h et 13h05, il y a eu un ou plusieurs moments où j'ai roulé à 100 km/h.

**Exercice 2.5**

Hier matin, à 7 heures, il faisait 8 degrés.

Hier soir à 19 heures, il faisait 17 degrés.

Ce matin, à 7 heures, il faisait à nouveau 8 degrés.

Entre 19 heures hier soir et 7 heures ce matin, y a-t-il eu au moins un instant où la température était exactement la même que douze heures auparavant ?

Le théorème de la valeur intermédiaire est mis à contribution dans la localisation des zéros des équations, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Quand  $u = 0$ , on peut aussi utiliser le **théorème de Bolzano**, qui est un cas particulier du théorème de la valeur intermédiaire.

« Montrez qu'une solution de l'équation  $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$  est située entre 1 et 2. »

Posons  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ . Nous sommes à la recherche d'un zéro de l'équation donnée, c'est-à-dire d'un nombre  $c$  situé entre 1 et 2 tel que  $f(c) = 0$ . Voilà pourquoi nous prenons  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $u = 0$ , en vue d'exploiter ce théorème. On a :

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

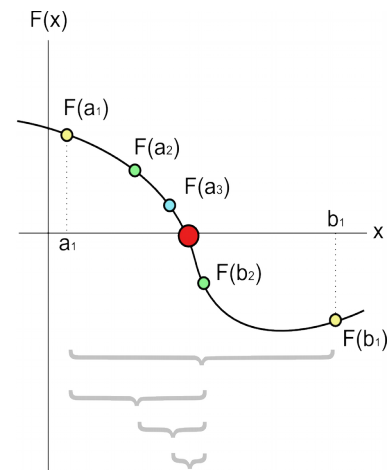
Donc  $f(1) < 0 < f(2)$  et  $u = 0$  est bien un nombre situé entre  $f(1)$  et  $f(2)$ . De plus,  $f$ , étant une fonction polynomiale, est continue. Dans ces conditions, le théorème de la valeur intermédiaire affirme l'existence d'un nombre  $c$  entre 1 et 2 tel que  $f(c) = 0$ . Autrement dit, l'équation  $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$  a au moins une solution dans l'intervalle  $]1 ; 2[$ .

**Algorithme de recherche de zéros d'une fonction**

Les algorithmes de recherche des zéros d'une fonction sont étudiés en *analyse numérique*.

L'algorithme le plus simple permettant de trouver un zéro d'une fonction est la **méthode de dichotomie**. On commence avec deux abscisses  $a$  et  $b$  qui encadrent un zéro de la fonction. À chaque itération, on coupe l'intervalle en deux sous-intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$ ,  $c = (a+b)/2$  étant le milieu de  $a$  et  $b$ . On garde le sous-intervalle qui contient un zéro, puis on recoupe en deux ce sous-intervalle, et ainsi de suite. L'intervalle encadrant le zéro devient ainsi de plus en plus petit.

La méthode de dichotomie garantit la convergence vers un zéro lorsque la fonction est continue.



Étapes successives de la méthode de dichotomie avec comme intervalle initial  $[a_1; b_1]$ .

**Exercice 2.6**

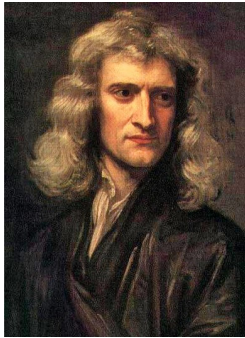
Montrez que la fonction  $\sin(4x^4 + 3x + 2)$  a une racine comprise entre 0 et  $\frac{1}{2}$ , puis calculez-la à 0.01 près.

## 2.5. Ce qu'il faut absolument savoir

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| Connaître la définition de la continuité en un point                           | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître la définition de la continuité à gauche, à droite, sur un intervalle | <input type="checkbox"/> ok |
| Reconnaître une fonction continue  | <input type="checkbox"/> ok |
| Dire où une fonction est discontinue   | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître le théorème de Bolzano   | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître le théorème de la valeur intermédiaire                               | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître la méthode de dichotomie   | <input type="checkbox"/> ok |

## 3. Dérivées

### 3.1. Un peu d'histoire



Isaac Newton  
(1642 - 1727)



Gottfried Wilhelm von Leibniz  
(1645 - 1716)



Christiaan Huygens  
(1629 - 1695)

Isaac **Newton** est né le jour de Noël 1642, l'année de la mort de **Galilée**, à Woolsthorpe, petit bourg de la région de Lincoln, sur la côte est de l'Angleterre. Admis au Trinity College de Cambridge en 1661, il se familiarise avec les œuvres de **Descartes**, **Galilée**, **Wallis** et Isaac **Barrow**. Entre 1665 et 1666, il est contraint de quitter l'Université de Cambridge qui ferme ses portes à cause de la peste qui sévit dans la région. De retour à Woolsthorpe, c'est au cours de cette parenthèse qu'il pose les fondements du calcul infinitésimal, de la nature de la lumière blanche et de sa théorie de l'attraction universelle. De retour à Cambridge en 1669, il succède à Isaac **Barrow** à la chaire de mathématiques de l'Université, qu'il conservera jusqu'en 1695. En 1671, il conçoit lui-même un télescope à miroir, exceptionnel pour l'époque, qui grossit 40 fois. Le 11 janvier 1672, il est élu à la Royal Society de Londres. En 1687, **Newton** publie son œuvre maîtresse, *Principes mathématiques de philosophie naturelle*, exposant sa théorie de l'attraction universelle. En 1693, il plonge dans une profonde dépression qui marquera la fin de sa période créatrice. Les *Méthodes des fluxions*, qu'il avait écrites en 1671, ne seront publiées qu'en 1736, après sa mort. **Newton** y faisait alors naître le calcul infinitésimal, en même temps que **Leibniz** dont le *Calcul différentiel* fut, lui, édité en 1686. À l'époque, les deux hommes s'étaient vivement opposés, chacun revendiquant la paternité de la découverte. À la mort de **Newton**, le débat continua.

**Leibniz** est né à Leipzig le 1er juillet 1646. Il est donc parfaitement contemporain à **Newton**. À quinze ans, maîtrisant les langues anciennes, il entre à l'université de Leipzig pour étudier le droit mais il y découvre **Kepler**, **Galilée** et **Descartes**, ce qui l'incite à s'initier aux mathématiques. En 1663 il soutient une thèse sur *le principe d'individuation*, part étudier les mathématiques à Iena, puis le droit à Altorf où il obtient un doctorat en 1667. En 1672, **Leibniz** rejoint une mission diplomatique à la cour de Louis XIV – pour convaincre le roi de conquérir l'Égypte. Là, il se lie avec les grands esprits de l'époque, dont le mathématicien hollandais Christiaan **Huygens** (1629-1695), se plonge dans la lecture de **Pascal** et invente une machine à calculer. **Leibniz** est ébloui par les méthodes que lui dévoile **Huygens** ; au cours d'un voyage à Londres en 1673, il rencontre des mathématiciens anglais à qui il montre ses premiers travaux et assiste à des séances de la Royal Society dont il est élu membre étranger. De retour à Paris, il retrouve **Huygens** qui l'encourage vivement à poursuivre ses recherches. À l'issue de son séjour parisien, il élabore le calcul différentiel. En 1684, il publie son *Calcul différentiel*. Il fonde en 1700 l'académie de Berlin dont il est le premier président. **Leibniz** est aussi célèbre en tant que théologien et philosophe.

D'autres grands noms sont liés à l'intégration. Citons entre autres Jacques **Bernoulli** (1654-1705), Jean **Bernoulli** (1667-1748) le frère de Jacques, Daniel **Bernoulli** (1700-1782) le fils de Jean, le marquis de **L'Hôpital** (1661-1704), Leonhard **Euler** (1707-1783), Joseph Louis **Lagrange** (1736-1813), Pierre Simon de **Laplace** (1749-1827) et Augustin **Cauchy** (1789-1857).

### 3.2. Définition de la dérivée

**Définition 1** Si la limite  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  existe, elle est appelée fonction **dérivée** de la fonction  $f$ .  $f$  est alors dite **dérivable**.



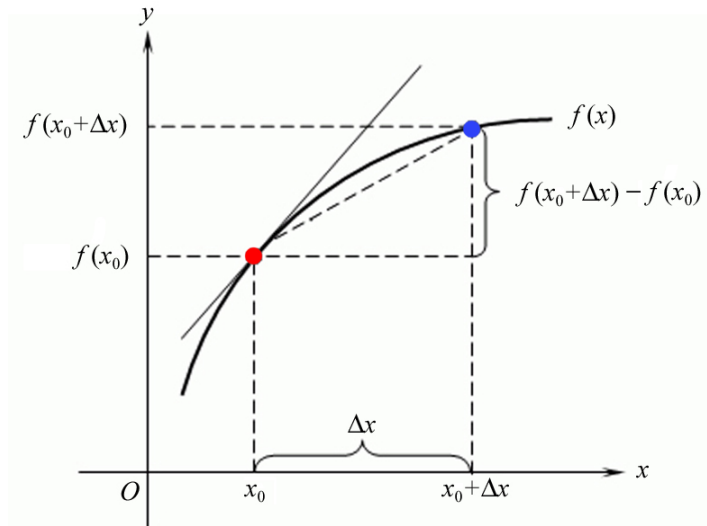
**Remarque :**  $\Delta x$  peut être positif ou négatif. Si  $\Delta x > 0$  on parle de *dérivée à droite* ; si  $\Delta x < 0$ , on parle de *dérivée à gauche*. La fonction est dérivable si la dérivée à droite et la dérivée à gauche existent et si elles sont égales.

$\Delta x$  est un **accroissement** (une variation) de la variable  $x$ .

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  est l'accroissement de  $f$ .

$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  est le **taux d'accroissement** moyen.

Quand  $\Delta x \rightarrow 0$ , on parle de taux de variation **instantané**.



**Attention !**  $\Delta x$  ne signifie pas  $\Delta \cdot x$ . Cela signifie « un petit accroissement de  $x$  ». On ne peut pas séparer le  $\Delta$  du  $x$ .

### Interprétation géométrique

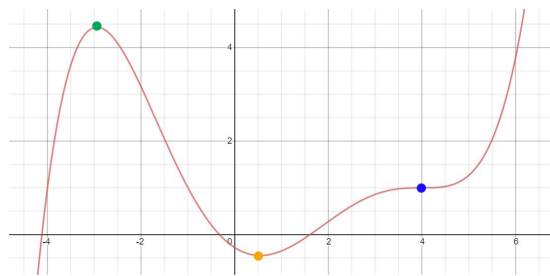
La valeur  $f'(x_0)$  est la  **pente de la tangente**  à la courbe  $f(x)$  en  $x = x_0$ .

De cette interprétation géométrique, on peut déduire que :

Si  $f' > 0$  sur un intervalle, alors  $f$  est **croissante** sur cet intervalle.

Si  $f' < 0$  sur un intervalle, alors  $f$  est **décroissante** sur cet intervalle.

Si  $f' = 0$  en un point, alors ce point est soit un **maximum local** de la fonction (en vert ci-dessous), soit un **minimum local** (en orange), soit un **point d'inflexion à tangente horizontale** (en bleu).



**Définition 2** Si une fonction  $f(x)$  est dérivable en tout point de l'intervalle  $I = ]a ; b[$ , elle est dite **dérivable** sur l'intervalle  $I$ .

**Notations** Il existe plusieurs notations pour désigner la dérivée d'une fonction  $y = f(x)$  :

$$f'(x), f', y', \frac{dy}{dx}$$

La dernière notation a été introduite par **Leibniz**.

Elle remplace parfois avantageusement les autres notations. En effet, dans de nombreux calculs, on est en droit de travailler comme s'il s'agissait d'un rapport banal, ce qui donne un aspect immédiat à certains résultats.

## Dérivabilité et continuité

Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.

**Attention ! La réciproque est fautive :** une fonction continue n'est pas forcément dérivable. Par exemple la fonction  $y = |x|$  est continue mais pas dérivable en  $x = 0$  (les dérivées à gauche et à droite ne sont pas égales). Il en est ainsi pour toutes les fonctions possédant des « pointes ».

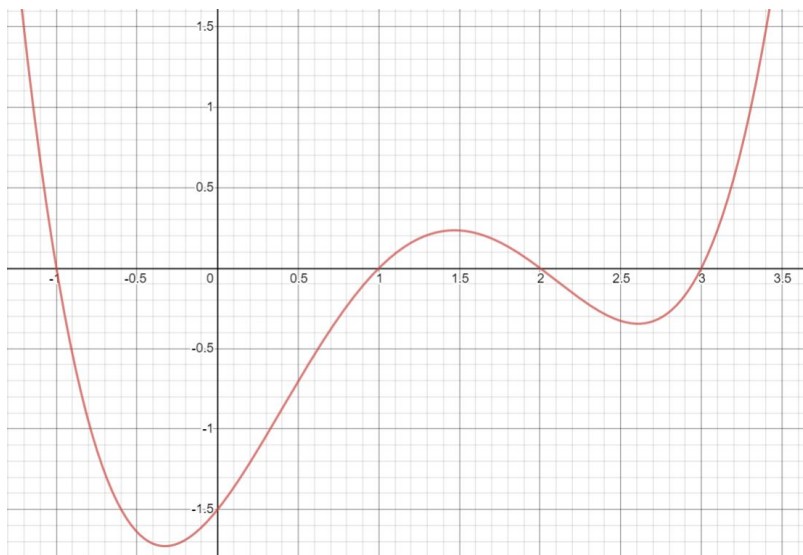
**Exercice 3.1**

Sur le graphe de la fonction  $f(x)$  ci-dessous, indiquez les valeurs approximatives de  $x$  pour lesquelles :

- a.  $f'(x) = 0$       b.  $f'(x) = 0$       c.  $f'(x) = 1$       d.  $f'(x) = -4$       e.  $f'(x) = -\frac{1}{2}$

**Indication**

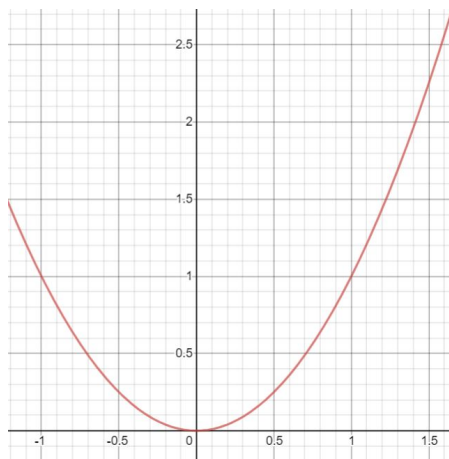
Utilisez l'interprétation géométrique de la dérivée.

**Exercice 3.2**

Esquissez le graphe de  $\sin(x)$  et utilisez ce graphe pour décider si la dérivée de  $\sin(3\pi)$  est positive ou négative.

**Exercice 3.3**

Trouvez la pente des tangentes à la parabole  $y = x^2$  aux points  $A(1 ; 1)$  et  $D(-2 ; 4)$ .

**Exercice 3.4**

Utilisez la **définition 1** pour estimer numériquement la dérivée de...



- a.  $f(x) = x^x$       en  $x = 2$   
 b.  $f(x) = \ln(\cos(x))$       en  $x = \frac{\pi}{4}$   
 c.  $f(x) = \sin(e^x)$       en  $x = 3$

**Exercice 3.5**

La position d'un mobile est donnée par l'équation du mouvement  $s = f(t) = \frac{1}{1+t}$ , où  $t$  est mesuré en secondes et  $s$  en mètres. Calculez la vitesse du mobile après 2 secondes.

**Exercice 3.6**

Pour trouver  $f(x+\Delta x)$ , il suffit de remplacer le symbole «  $x$  » par «  $x+\Delta x$  ».

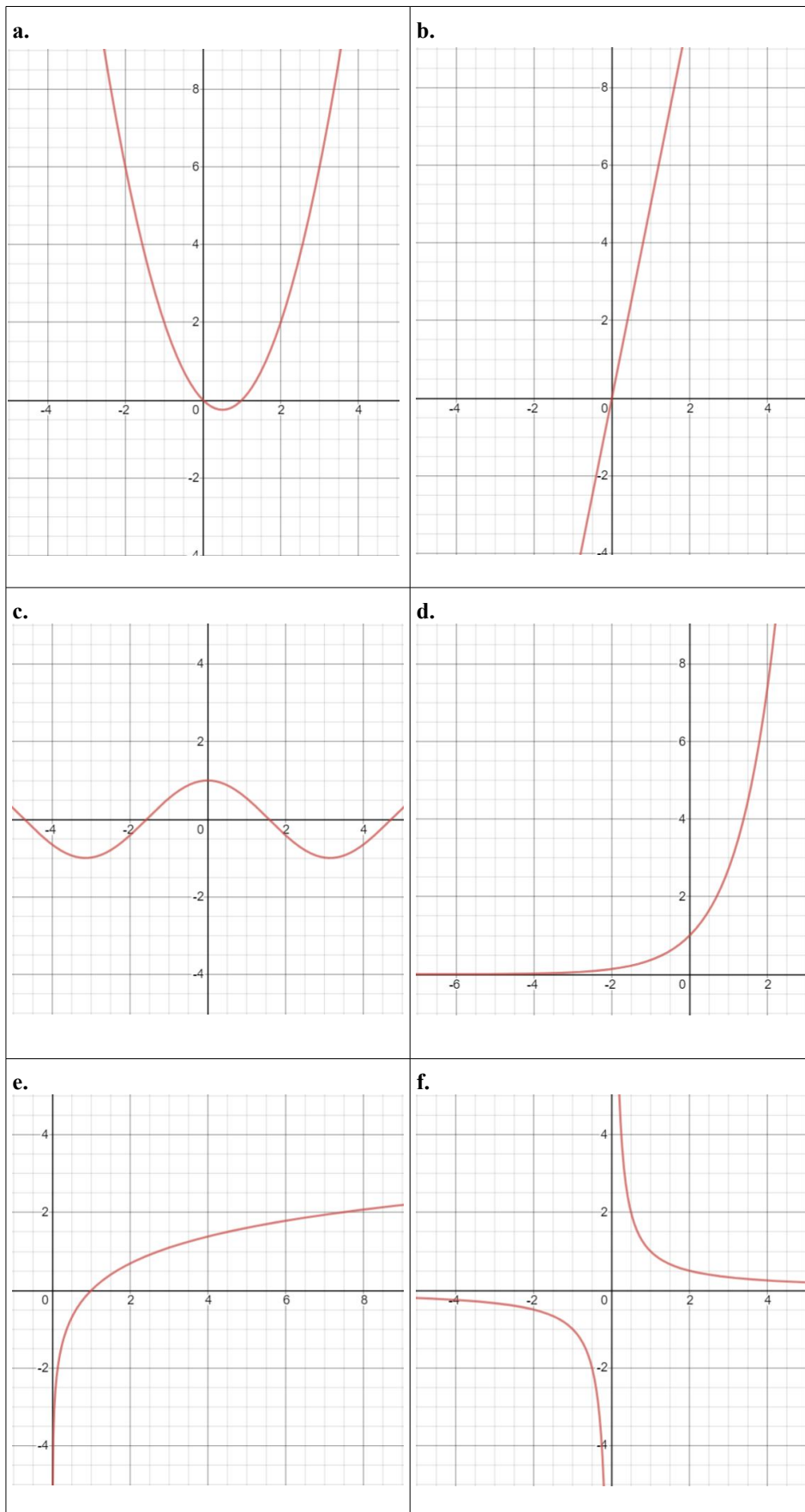
En utilisant la **définition 1** de la dérivée, trouvez algébriquement la dérivée  $f'$  de...

- a.  $f(x) = x^3 + 5$       b.  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 c.  $f(x) = \sqrt{x}$       d.  $f(t) = 3t^2 + 5t$

**Exercice 3.7**

Esquissez le graphe de la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

Pouvez-vous donner l'équation de chacune de ces fonctions ?



**Exercice 3.8**

En mettant en correspondance les courbes de  $f(x)$  et  $f'(x)$  de l'exercice 3.7, remplissez les cases vides du tableau ci-dessous avec les réponses suivantes :

= 0, < 0, > 0, min ou max

$f(a)$	décroît	croît	minimum	maximum	point d'inflexion	pt. d'infl. à tg. horiz.
$f'(a)$						

**Exercice 3.9**

Dans une expérience de laboratoire, le nombre de bactéries après  $t$  heures est donné par  $n = f(t)$ .

- Quelle est la signification de  $f'(5)$  ? En quelles unités s'exprime  $f'(5)$  ?
- Si la quantité de nourriture et d'espace n'est pas limitée, lequel des deux nombres  $f'(5)$  et  $f'(10)$  sera le plus grand ?

**Exercice 3.10**

- Dessinez une courbe dont la pente partout positive croît continûment.
- Dessinez une courbe dont la pente partout positive décroît continûment.
- Dessinez une courbe dont la pente partout négative croît continûment.
- Dessinez une courbe dont la pente partout négative décroît continûment.

**Exercice 3.11**

Dessinez un graphe possible de  $y = f(x)$  connaissant les informations suivantes sur la dérivée :

- $f'(x) > 0$  pour  $1 < x < 3$
- $f'(x) < 0$  pour  $x < 1$  ou  $x > 3$
- $f'(x) = 0$  en  $x = 1$  et  $x = 3$

**Exercice 3.12**

- Utilisez le traceur de courbe desmos pour vérifier visuellement que la dérivée de  $\sin(x)$  est  $\cos(x)$ .
- On pourrait penser que la dérivée de  $\sin(2x)$  est  $\cos(2x)$ . Pourtant, si on dessine les courbes de ces deux fonctions sur un même graphique, on voit que quelque chose cloche... Pourrez-vous deviner quelle est vraiment la dérivée de  $\sin(2x)$  ?

**Exercice 3.13**

Par des expériences, on peut constater que le chemin parcouru ( $\ell$ ) par un corps en chute libre est proportionnel au carré du temps écoulé :

$$\ell(t) = \frac{g}{2} t^2 \quad \text{où } g \text{ est la gravité terrestre (9.81 m/s}^2\text{).}$$

- Quelle est la vitesse moyenne entre le moment  $t$  et le moment  $t + \Delta t$  ?

Quand  $\Delta t \rightarrow 0$ , la vitesse moyenne tend, par définition, vers la *vitesse instantanée* au moment  $t$ .

- Quelle est la vitesse instantanée au moment  $t$  ?

### 3.3. La dérivée seconde

Comme la dérivée est elle-même une fonction (cf. ex. 3.7), on peut calculer sa dérivée. Pour une fonction  $f$ , la dérivée de sa dérivée est appelée *dérivée seconde* et notée  $f''$ .

#### Remarque

On peut aussi calculer la dérivée troisième, quatrième, etc. Cependant, elles ont moins d'intérêt que les dérivées première et seconde.

#### Que nous dit la dérivée seconde ?

Puisque  $f''$  est la dérivée de  $f'$  :

Si  $f'' > 0$  sur un intervalle, alors  $f'$  est **croissante** sur cet intervalle.

Si  $f'' < 0$  sur un intervalle, alors  $f'$  est **décroissante** sur cet intervalle.

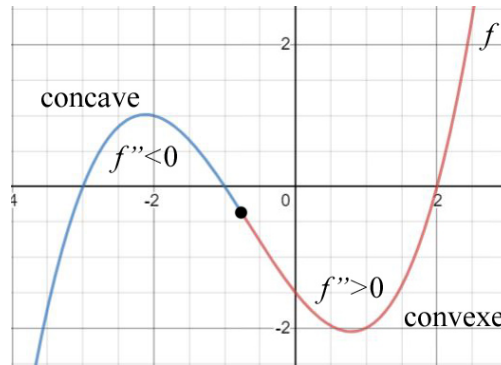
Lorsque  $f'$  est croissante, la courbe  $f$  se redresse : elle est **convexe**.

Lorsque  $f'$  est décroissante, la courbe  $f$  s'infléchit vers le bas : elle est **concave**.

**Deux trucs mnémotechniques**

Pour se rappeler la différence entre convexe et concave, penser qu'une courbe concave a la forme d'une caverne.

Si la dérivée seconde est positive, on peut imaginer que « la courbe sourit ». Inversement, quand elle est négative, « elle tire la tronche ».



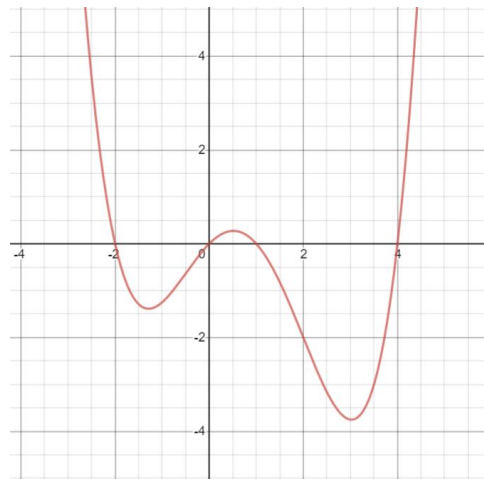
Pour trouver les points d'inflexion (point noir sur la figure ci-dessus) de  $f(x)$ , il faut poser  $f''(x) = 0$  et résoudre. **Mais attention !** Il faudra vérifier que c'est bien un point d'inflexion :  $f''(x-\varepsilon)$  et  $f''(x+\varepsilon)$  devront être de signes opposés.

**Exercice  $\pi$**

Esquissez la dérivée  $f'$  et la dérivée seconde  $f''$  sur le graphe de la fonction  $f$  donnée ci-dessous.

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x)$$

Observez où la dérivée seconde est positive et où elle est négative. Voyez à quoi cela correspond sur la fonction  $f$ .



Où sont les points d'inflexion ?

**Exercice 3.15**

Donnez trois moyens de faire la différence entre un minimum local d'une fonction  $f$ , un maximum local et un point d'inflexion à tangente horizontale.

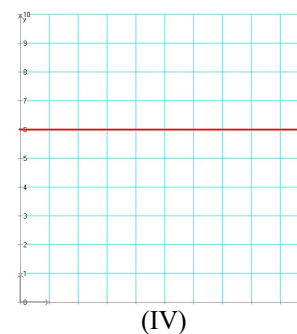
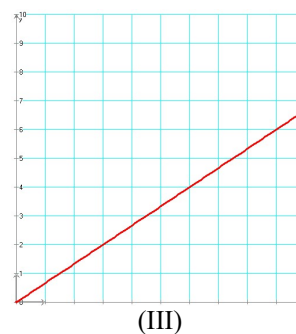
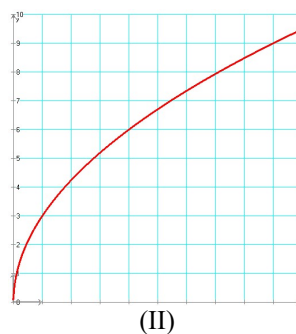
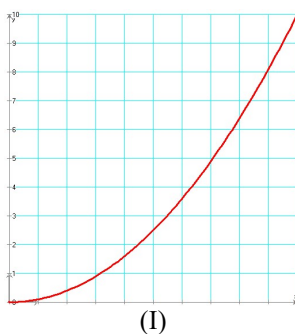
**Exercice 3.16**

Chacun des graphes ci-dessous montre la position de quatre wagonnets se déplaçant sur une ligne droite en fonction du temps au cours d'une expérience de physique. Les échelles de tous les graphes sont les mêmes. Quel(s) wagonnet(s) a (ont) :

**Rappels de physique**

La fonction vitesse est la dérivée de la fonction horaire (position). La fonction accélération est la dérivée de la fonction vitesse.

- a. une vitesse constante ?
- b. la plus grande vitesse juste après le début de l'expérience ?
- c. une vitesse nulle ?
- d. une accélération nulle ?
- e. une accélération toujours positive ?
- f. une accélération toujours négative ?



**Exercice 3.17**

Colorez sur le graphe de la fonction  $f$  ci-dessous les « tronçons de la fonction  $f$  » où  $f \geq 0$  (en vert),  $f' \geq 0$  (en rouge) et  $f'' \geq 0$  (en bleu).

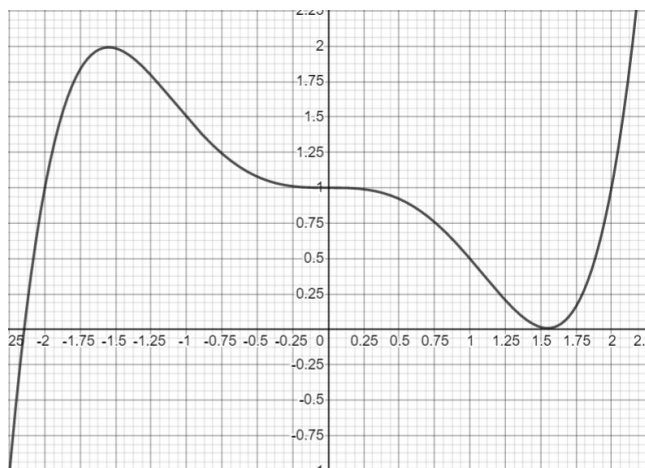
Précisions :

Maximum en  $(-1.6 ; 2)$

Minimum en  $(1.55 ; 0)$

Points d'inflexion en  $x = -1.15, x = 0$  et  $x = 1.1$ .

La pente de  $f$  en  $(0 ; 1)$  est nulle.



On se donne les abscisses suivantes :  $-2.25, -1.6, -1.15, -0.5, 0, 0.7, 1.55, 2$ .

Dites pour lesquelles de ces abscisses...

- $f$  et  $f''$  sont non nulles et de même signe.
- au moins deux des valeurs de  $f, f'$  et  $f''$  sont nulles.

**Exercice 3.18**

- Dessinez une courbe dont la première et la seconde dérivée sont partout positives.
- Dessinez une courbe dont la seconde dérivée est partout négative, mais dont la première dérivée est partout positive.
- Dessinez une courbe dont la seconde dérivée est partout positive, mais dont la première dérivée est partout négative.
- Dessinez une courbe dont la première et la seconde dérivée sont partout négatives.

**Exercice 3.19**

(suite de l'ex. 3.6)

Trouvez algébriquement la dérivée seconde de...

- $f(x) = x^3 + 5$  en  $x = 1$
- $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x = 2$
- $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 1$
- $f(t) = 3t^2 + 5t$  en  $t = -1$

**3.4. Dérivées de fonctions usuelles**

Les tables ci-dessous regroupent les fonctions usuelles.

$a$  et  $n$  sont des constantes.

$f(x)$	$f'(x)$
$a$	$0$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x \ln(a)$
$ x $	$\text{sgn}(x) \quad (x \neq 0)$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

### 3.5. Règles de dérivation

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables et  $\lambda$  un nombre réel. Les propriétés suivantes servent au calcul des dérivées :



- |   |  |
|---|--|
| 1. $(f+g)' = f' + g'$                       | 2. $(f-g)' = f' - g'$                                  |
| 3. $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$  | 4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ |
| 5. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ | 6. $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$              |

La règle la plus difficile est la sixième. Elle concerne la dérivation de fonctions composées. Nous la traiterons en détails un peu plus loin.

#### 3 exemples de calculs de dérivées

1. Dérivons  $h(x) = e^x + x^3$

On a  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = x^3$  et  $h(x) = f(x) + g(x)$ .

D'après la règle 1 :  $h'(x) = \underbrace{e^x}_{f'} + \underbrace{3x^2}_{g'}$

2. Dérivons  $h(x) = \frac{\sin(x)}{e^x}$

On a  $f(x) = \sin(x)$ ,  $g(x) = e^x$  et  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

D'après la règle 4 :  $h'(x) = \frac{\underbrace{\cos(x)}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \underbrace{\sin(x)}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'}}{\underbrace{(e^x)^2}_{g^2}} = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{e^x}$

3. Dérivons  $h(x) = x^2 \cdot 3^x$

On a  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 3^x$  et  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ .

D'après la règle 5 :  $h'(x) = \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{3^x}_{g} + \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{3^x \ln(3)}_{g'} = x \cdot 3^x (2 + x \ln(3))$

#### Exercice 3.20

$a, b, c, d$  sont des nombres réels. On donne  $f(x)$ . Calculez  $f'(x)$  pour les cas suivants :

La règle 6 n'intervient dans aucun de ces calculs, car il n'y a pas de fonctions composées.

Pour les exercices 17 à 20, il faut d'abord transformer les racines en puissances.

- |                          |                        |                       |  |
|--------------------------|------------------------|-----------------------|--|
| 1. $x + 1$               | 2. $2x$                | 3. $-3x + 5$          | 4. $ax + b$                            |
| 5. $x^2$                 | 6. $4x^2 - 5x - 4$     | 7. $2x^3 + 2x + 6$    | 8. $ax^2 + bx + c$                     |
| 9. $(3x^2 + 5)(x^2 - 1)$ | 10. $ax^3 + bx^2 + cx$ | 11. $(x + 5)(x - 3)$  | 12. 0                                  |
| 13. $(ax + b)(cx + d)$   | 14. $\frac{a}{x}$      | 15. $\frac{x+5}{x-1}$ | 16. $\frac{x^2 - x + 5}{x^2 - 2x + 1}$ |
| 17. $\sqrt{x}$           | 18. $\sqrt[3]{x}$      | 19. $\sqrt[3]{x^2}$   | 20. $\frac{1}{\sqrt{x}}$               |

#### Rappel sur la composition de fonctions

Remarquez bien que l'ordre des opérations est l'inverse de l'ordre d'écriture !

Envisageons les fonctions  $f(x) = 6x - 4$  et  $g(x) = \sqrt{x}$ . On peut les appliquer à la queue leu leu, par exemple : la fonction «  $f$  suivie de  $g$  ».

$$x \rightarrow \begin{array}{c} \text{arbre} \\ \boxed{\phantom{x}} \\ f \end{array} \rightarrow 6x - 4 \rightarrow \begin{array}{c} \text{arbre} \\ \boxed{\phantom{x}} \\ g \end{array} \rightarrow \sqrt{6x - 4}$$

On écrira  $g(f(x)) = \sqrt{6x - 4}$  ou  $g \circ f(x) = \sqrt{6x - 4}$ .

### 3 exemples d'utilisation de la règle 6

En anglais, la règle 6 s'appelle *the chain rule*.



On peut aussi voir une composition de fonctions comme l'emboîtement de poupées russes. On « dérive toutes les poupées » de l'extérieur vers l'intérieur.

1. Dérivons  $h(x) = \sin(\sqrt{x})$ . Le schéma est  $x \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow \sin(\sqrt{x})$ .

$$\text{D'après la règle 6 : } h'(x) = \underbrace{\cos(\sqrt{x})}_{g' \circ f} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{f'}$$

2. Dérivons  $h(x) = e^{x^2}$ . Le schéma est  $x \rightarrow x^2 \rightarrow e^{x^2}$ .

$$\text{D'après la règle 6 : } h'(x) = \underbrace{e^{x^2}}_{g' \circ f} \cdot \underbrace{2x}_{f'}$$

3. Dérivons  $h(x) = \ln|\cos(3x^2)|$ .

Le schéma est  $x \rightarrow 3x^2 \rightarrow \cos(3x^2) \rightarrow \ln|\cos(3x^2)|$ .

$$\text{D'après la règle 6 : } h'(x) = \underbrace{\frac{1}{\cos(3x^2)}}_{k' \circ g \circ f} \cdot \underbrace{(-\sin(3x^2))}_{g' \circ f} \cdot \underbrace{6x}_{f'} = -6x \tan(3x^2)$$

Remarquez que l'on dérive les fonctions successivement de droite à gauche tout en gardant intact « l'intérieur » des fonctions. On parle souvent de « dérivée de l'intérieur ».

Pour se rappeler l'ordre de dérivation, il est utile quand on débute de faire le petit schéma fléché.

### Exercice 3.21

Rappelez-vous que l'erreur la plus courante dans le calcul des dérivées est l'oubli de la dérivée intérieure !

$a$  et  $b$  sont des nombres réels. On donne  $f(x)$ . Calculez  $f'(x)$  pour les cas suivants :

1.  $\sqrt{x^2 + 5x - 1}$

2.  $\sqrt[3]{(x-1)^2}$

3.  $x^2 \sqrt{2x+1}$

4.  $\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$

5.  $(x^2 - 16)\sqrt{4-x}$

6.  $(x^2 + 5x - 1)^5$

7.  $(3x^2 - x - 1)(2x - 3)^3$

8.  $(2x^2 - x - 1)^3$

9.  $(x+2)^3 x^2$

10.  $\sin(x) + \cos(x)$

11.  $\tan(x) - x$

12.  $\sin(2x - 1)$

13.  $\sin^5(4x)$

14.  $\sqrt{\sin(x)}$

15.  $\cos^3(\sqrt{x})$

16.  $\frac{1}{\tan(2x)}$

17.  $e^{2x}$

18.  $e^{ax+b}$

19.  $e^{\sin(x)}$

20.  $e^x \sin(x)$

21.  $\cos(2x) e^{4x}$

22.  $\ln(3x)$

23.  $\ln(\sin(4x))$

24.  $\ln(\ln(x))$

25.  $\log(2x)$

26.  $\sqrt[3]{3x^2 - 2x - 1}$

27.  $\sqrt{x + \tan(x)}$

28.  $\sqrt{\cos(3x)}$

29.  $\frac{3+2x}{\sqrt{1+x}}$

30.  $\sqrt{\frac{x^2+9}{x+3}}$

31.  $\arctan(2-x)$

32.  $\sin^2(x) + \cos^2(x)$

33.  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

34.  $\sqrt{x^2 + \sqrt{1+x}}$

35.  $\sqrt[3]{\cos^2(x) + 3 + \sin^2(x)}$

36.  $\arcsin(2x)$

37.  $x^{2e}$

38.  $10^x$

39.  $x^x$

## 3.6. Quatre théorèmes relatifs aux fonctions dérivables

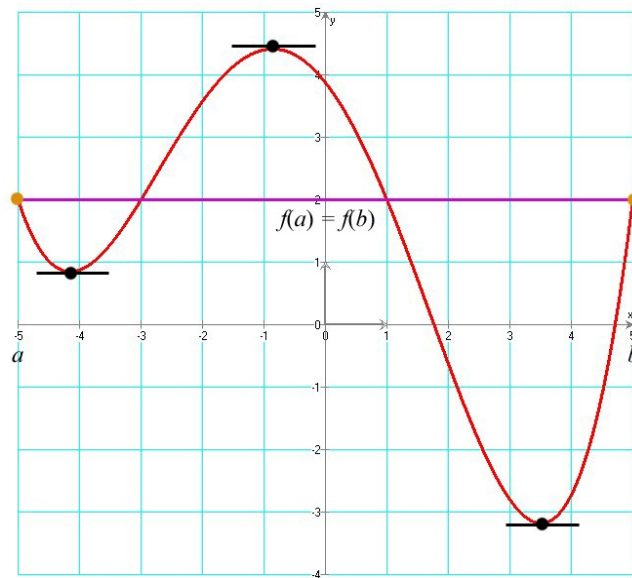
### Théorème de Rolle

Michel Rolle (1652-1719) est un mathématicien français.

Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

1.  $f$  est continue sur  $[a; b]$
2.  $f$  est dérivable sur  $]a; b[$
3.  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe une valeur  $c$  dans l'intervalle  $]a; b[$  telle que  $f'(c) = 0$ .



### Démonstration

Puisque la fonction  $f$  est continue sur  $[a ; b]$ , elle admet une valeur maximale  $M$  et une valeur minimale  $m$  sur  $[a ; b]$ . Deux cas sont alors possibles :

- $M = m$ . Dans ce cas,  $f$  est constante et on a  $f'(x) = 0$  pour tout  $x$  dans  $]a ; b[$ .
- $M > m$ . Dans ce cas, il existe un  $x$  tel que  $f(x) = M$  ou  $f(x) = m$ , avec  $x$  dans  $]a ; b[$ .  
Pour fixer les idées, supposons que ce soit  $M$  : il existe donc une valeur  $c$  dans l'intervalle  $]a ; b[$  telle que  $f(c) = M$ . Comme  $M$  est un maximum, alors  $f'(c) = 0$ .

□

### Théorème des accroissements finis

(aussi appelé théorème de la moyenne)

Soit  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- $f$  est continue sur  $[a ; b]$
- $f$  est dérivable sur  $]a ; b[$ .

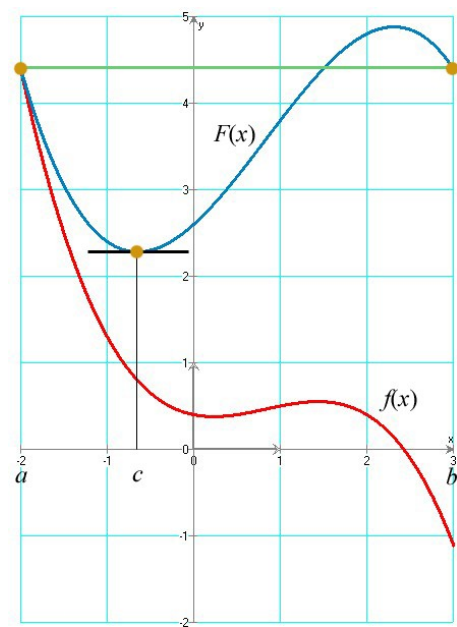
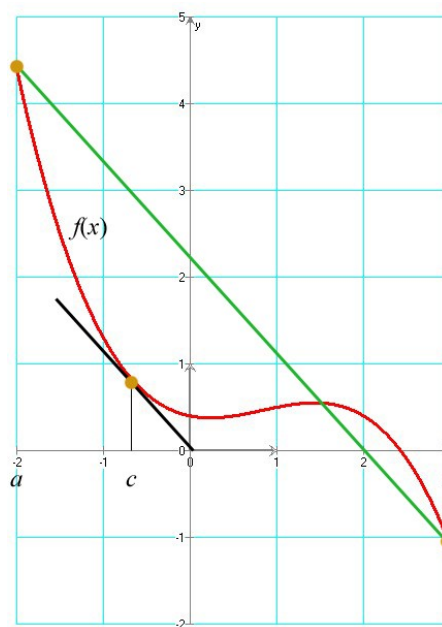
Alors il existe au moins une valeur  $c$  dans l'intervalle  $]a ; b[$  où :  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

#### A gauche :

Illustration du théorème des accroissements finis

#### A droite :

La fonction auxiliaire  $F(x)$



Voici une conséquence pratique du théorème des accroissements finis :  
 si une voiture relie Zurich à Bâle à une vitesse moyenne de 112 km/h, alors il y a un moment où la vitesse instantanée de la voiture (la vitesse lue au compteur) est exactement de 112 km/h.

**Démonstration**

On va utiliser le théorème de Rolle.

Définissons une fonction auxiliaire  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ .

La dérivée de cette fonction  $F$  est  $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

$F$  vérifie les trois hypothèses du théorème de Rolle. Donc il existe une valeur  $c$  dans l'intervalle  $]a ; b[$  telle que  $F'(c) = 0$ . Donc  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

□

**Théorème de Cauchy**



Augustin Louis Cauchy  
(1789 - 1857)

Ce théorème est aussi appelé « Théorème des accroissements finis généralisé ».

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a ; b]$ , dérivables sur  $]a ; b[$ . Supposons que  $g(a) \neq g(b)$  et que  $g'$  ne s'annule pas sur  $]a ; b[$ .

Alors il existe une valeur  $c$  dans l'intervalle  $]a ; b[$  telle que :  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**Démonstration**

La démonstration est analogue à celle du théorème des accroissements finis, en posant comme fonction auxiliaire :  $F(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$ .

La dérivée de cette fonction  $F$  est  $F'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x) - [f(b) - f(a)]g'(x)$ .

$F$  vérifie les trois hypothèses du théorème de Rolle. Donc, il existe une valeur  $c$  dans l'intervalle  $]a ; b[$  telle que  $F'(c) = 0$ . Donc  $[g(b) - g(a)]f'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x)$ , ce qui implique bien que  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

□

**Règle de l'Hôpital**



Guillaume François Antoine  
Marquis de l'Hôpital  
(1661 - 1704)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que :

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
2. il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $f$  et  $g$  sont dérivables dans  $V \setminus \{a\}$ .
3.  $g'$  ne s'annule pas dans  $V \setminus \{a\}$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe.

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Démonstration**

Choisissons  $x \neq a$  arbitraire dans  $V$ . En appliquant le théorème de Cauchy, nous avons :

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ où } \xi \text{ est un nombre compris entre } a \text{ et } x.$$

Mais par la condition 1, on sait que  $f(a) = g(a) = 0$ . Par conséquent :  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

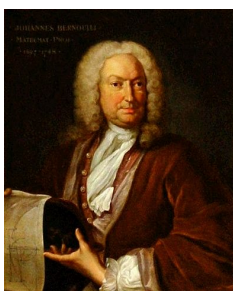
Si  $x \rightarrow a$ , alors  $\xi$  tend aussi vers  $a$ , puisque  $\xi$  est compris entre  $x$  et  $a$ .

En outre, si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  existe et est égale à  $A$ .

Par conséquent, il est évident que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ,

et en définitive :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

□



Jean Bernoulli  
(1667 - 1748)

**Remarque importante**

La règle de l'Hôpital est aussi valable si  $a = \pm\infty$ , ou si  $\lim f = \pm\infty$  et  $\lim g = \pm\infty$ .

**Utilisation de la règle de l'Hôpital**

Ici, quand on écrit « 0 », cela veut dire « presque » 0 !

On peut au besoin réitérer ce processus plusieurs fois.

La règle de l'Hôpital (dont l'auteur est sans doute le bâlois Jean **Bernoulli**) remplace une limite par une autre qui *peut* être plus simple. Cette règle s'utilise en trois étapes :

1. Vérifier que  $\frac{f(x)}{g(x)}$  est une **forme indéterminée** ( $\frac{0}{0}$ ,  $0 \cdot \infty$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ ).  
Si ce n'est pas le cas, **on ne peut pas** utiliser la règle de l'Hôpital.
2. Dériver  $f(x)$  et  $g(x)$  **séparément**.
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Exemples**

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2}$

La solution est  $+\infty$ .

**Solutions**

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , on a bien une forme indéterminée.

La règle de l'Hôpital peut s'appliquer :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(2x)}{1} = 2$ .

Ici, nous avons  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2}$  n'est pas une forme indéterminée. On ne peut pas utiliser la règle de l'Hôpital.

**Exercice 3.22**

La règle de l'Hôpital ne s'applique pas au calcul des limites ci-dessous, bien que celles-ci existent. Expliquez pourquoi et calculez ces limites par une autre méthode.

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x}$       b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2 + 1}$       c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

**Exercice 3.23**

Calculez les limites suivantes, si elles existent, en utilisant la règle de l'Hôpital. N'oubliez pas de d'abord **contrôler si vous avez le droit d'utiliser cette règle !**

a.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$       b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{x^3 - 3x + 2}$   
 c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin(x)}$       d.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right)$   
 e.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e}$       f.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \quad (m \neq n)$   
 g.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{\cot^2(x)}$       h.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \sin(bx)}{\sin(ax) + \sin(bx)} \quad (a \neq -b)$   
 i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x} \quad (x > 0)$       j.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

**3.7. Ce qu'il faut absolument savoir**

Connaître la définition de la dérivée en tant que limite

 ok

Comprendre l'interprétation géométrique de la dérivée

 ok

Connaître les dérivées des fonctions usuelles

 ok

Connaître les six règles de dérivation par cœur

 ok

Pouvoir dériver n'importe quelle fonction

 ok

Connaître le théorème de l'Hôpital et savoir quand on peut l'appliquer

 ok

# 4. Applications des dérivées

## 4.1. Calculs de tangentes à des courbes

On cherche parfois à connaître l'équation d'une droite tangente à une fonction.

**Rappels sur les droites** Rappelons qu'une droite a pour équation  $y = mx + h$ , où  $m$  est la pente de la droite.

Il est aussi utile de savoir qu'une droite de pente  $m$  passant par le point  $A(x_0; y_0)$  a pour équation  $y - y_0 = m(x - x_0)$ .

Rappelons enfin que  $f'(a)$  donne la pente de la tangente à la courbe  $f(x)$  en  $x = a$ .

### Cas où le point de tangence est connu

Si le point de tangence  $T(x_T; y_T)$  est donné, le problème est simple à résoudre.

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Calculer  $m = f'(x_T)$ . C'est la pente de la tangente.
3. Introduire les coordonnées du point de tangence  $(x_T; y_T)$  dans l'équation  $y - y_T = m(x - x_T)$ .
4. Simplifier cette équation pour en obtenir une de la forme  $y = mx + h$ .

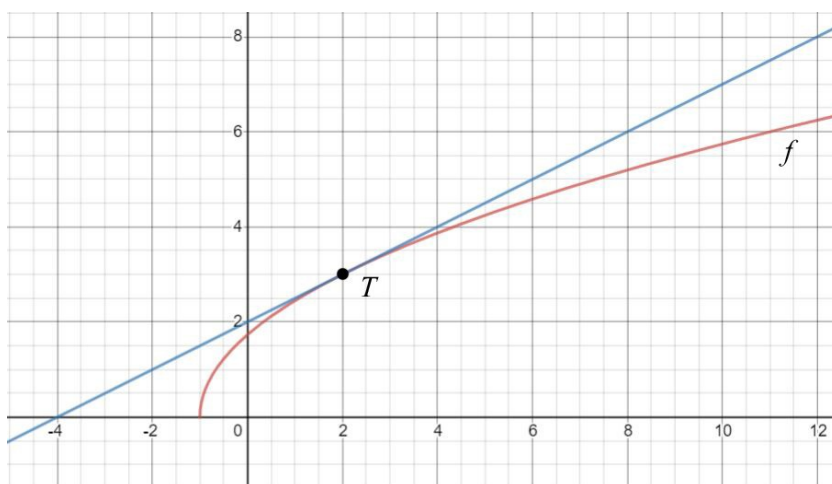
**Exemple** Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{3(x+1)}$  et le point  $T(2; 3)$ . Donnez l'équation de la tangente à la courbe passant par le point  $T$ .

$T$  appartient à la courbe, car  $f(x) = \sqrt{3 \cdot (2+1)} = 3$ . C'est donc le point de tangence.

La numérotation correspond à celle du plan de résolution.

1.  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3(x+1)}}$
2.  $m = f'(2) = \frac{1}{2}$  C'est la pente de la tangente.
3.  $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$
4.  $y = \frac{x}{2} + 2$  C'est l'équation de la tangente.

On peut vérifier le résultat avec



### Exercice 4.1

Pour les fonctions  $f$  suivantes, donnez l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en  $x_T$  :

Rappel :  $y_T = f(x_T)$

- a.  $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$      $x_T = 1$                       b.  $f(x) = \sqrt{x}$      $x_T = 4$
- c.  $f(x) = \frac{3x-2}{5x+1}$      $x_T = 0$

### Cas où le point de tangence n'est pas connu

À l'étape 5, on peut aussi utiliser le point  $A$ .

Si le point  $A(x_0; y_0)$  n'est pas le point de tangence, le problème est un peu plus compliqué. Il faut d'abord trouver  $x_T$ , l'abscisse du point de tangence.

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Poser  $y_0 - f(x_T) = f'(x_T)(x_0 - x_T)$  et résoudre pour trouver  $x_T$ .
3.  $y_T = f(x_T)$ .
4.  $m = f'(x_T)$ .
5. Introduire les coordonnées du point de tangence  $(x_T; y_T)$  dans l'équation  $y - y_T = m(x - x_T)$ .
6. Simplifier cette équation pour en obtenir une de la forme  $y = mx + h$ .

L'équation de l'étape 2 provient de  $y - y_T = m(x - x_T)$ . En effet,  $m = f'(x_T)$  et comme le point  $A$  appartient à la droite, ses coordonnées doivent satisfaire l'équation de celle-ci.

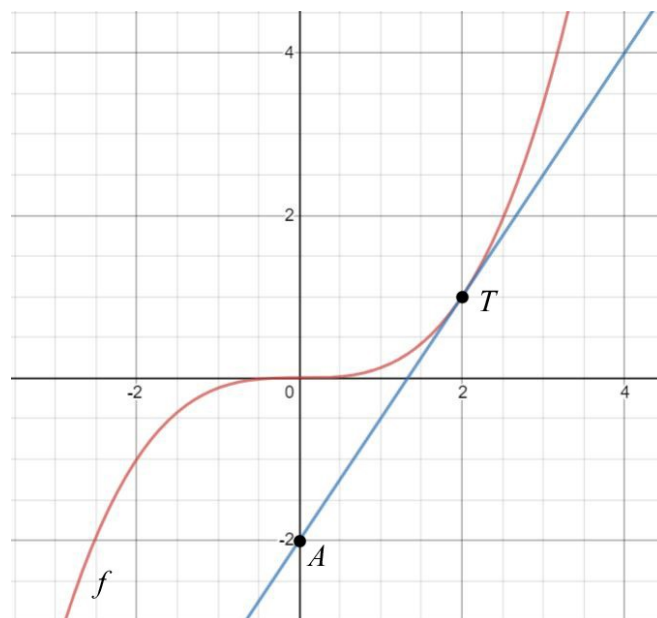
**Exemple** Soit la fonction  $f(x) = \frac{x^3}{8}$  et le point  $A(0; -2)$ .

La numérotation correspond à celle du plan de résolution.

Donnez l'équation de la tangente à la courbe passant par le point  $A$ .

1.  $f'(x) = \frac{3}{8}x^2$
2.  $-2 - \frac{x_T^3}{8} = \frac{3}{8}x_T^2(0 - x_T)$       Après simplifications, on trouve  $x_T = 2$ .
3.  $y_T = f(2) = 1$       Le point de tangence est donc  $T(2; 1)$
4.  $m = f'(2) = \frac{3}{2}$       C'est la pente de la tangente.
5.  $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$
6.  $y = \frac{3}{2}x - 2$       C'est l'équation de la tangente.

Vérifions le résultat avec



### Exercice 4.2

Pour les fonctions  $f$  suivantes, donnez l'équation de la tangente passant par le point  $A$  :

- a.  $f(x) = \frac{x^2}{5}$        $A(-1; -3)$
- b.  $f(x) = 2 \cdot \ln(x)$        $A(0; -4)$
- c.  $f(x) = e^x$        $A(0; 0)$

**Exercice 4.3**

Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure ci-dessous, on peut voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire indiquée et qui tirent au rayon laser selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3 et 4.

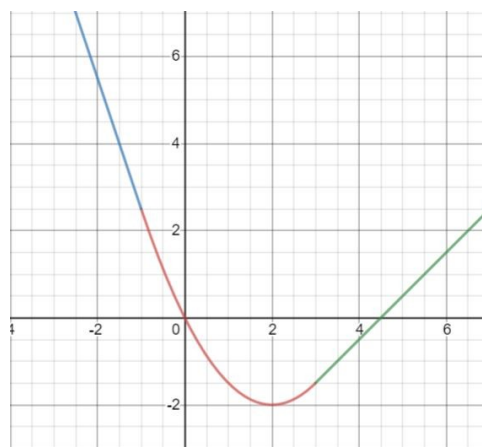


On sait que la trajectoire de l'avion a pour équation  $y = \frac{2x+1}{x}$  ( $x > 0$ ).

- a. Le centre de la cible n° 4 sera-t-il touché si le joueur tire au moment où l'avion est en (1 ; 3) ?
- b. Déterminez l'abscisse de l'avion permettant d'atteindre le centre de la cible n° 2.

**Exercice 4.4**

On veut prolonger un segment de parabole par deux droites (voir le dessin ci-contre), de sorte que la fonction  $f$  soit partout dérivable, c'est-à-dire lisse, sans pointe.



Il s'agit évidemment de calculer les équations des droites, pas de les trouver d'après le dessin...

Complétez la formule ci-dessous avec les équations des droites.  
L'équation de la parabole est donnée.

$$f(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2}{2} - 2x & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ \dots\dots\dots & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

**Exercice 4.5**

Soient les fonctions  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

- a. Tracez les courbes de ces deux fonctions sur un même graphique. Il pourra vous être utile pour la suite...
- Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels.
- b. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de  $f(x)$  au point d'abscisse  $a$ .
- c. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de  $g(x)$  au point d'abscisse  $b$ .
- d. Donnez l'équation de la tangente commune aux deux courbes.



**Angle** L'angle sous lequel se coupent les graphes de deux fonctions  $f$  et  $g$  en leur point d'intersection  $I$  est l'angle que forment leurs tangentes au point  $I$ .

**Exercice 4.6**

Trouvez l'angle d'intersection des graphes des fonctions  $f$  et  $g$  suivantes :

Angle aigu entre deux droites de pente  $m_1$  et  $m_2$  :

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

- a.  $f(x) = x^2$   $g(x) = x^3$   
 b.  $f(x) = x^2$   $g(x) = \frac{x^2}{4} + 3$   
 c.  $f(x) = \sin(x)$   $g(x) = \cos(x)$   $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

**Exercice 4.7**

Soit  $f(x) = \frac{1}{x}$

- a. Esquissez le graphe de  $f(x)$  pour  $x > 0$ .  
 b. Soit un point  $A$  sur le graphe de  $f$  (d'abscisse supérieure à 0). Calculez l'aire du triangle  $OAB$ , où  $O$  est l'origine et  $B$  est le point d'intersection de la tangente au graphe de  $f$  en  $A$  avec l'axe horizontal.

**4.2. Problèmes de taux d'accroissement****Exercice résolu**

Une brèche s'est ouverte dans les flancs d'un pétrolier. Supposons que le pétrole s'écoulant du tanker s'étend autour de la brèche selon un disque dont le rayon augmente de 2 m/s. À quelle vitesse augmente la surface de la marée noire quand le rayon de la nappe de pétrole est de 60 m ?

**Solution** Soit  $A$  l'aire du disque (en  $m^2$ ),  $r$  le rayon du disque (en m) et  $t$  le temps écoulé depuis l'accident (en secondes).

Dans ce genre de problème, la notation de *Leibniz* est très pratique.

Cela peut paraître étrange, mais on peut faire comme si ces dérivées étaient des fractions !

On va utiliser la relation suivante :  $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$   
cherché à calculer donné

Le taux d'accroissement du rayon est  $\frac{dr}{dt} = 2$  m/s (voir la donnée).

Il faut maintenant exprimer  $A$  par rapport à  $r$  pour pouvoir calculer  $\frac{dA}{dr}$ .

L'aire du disque  $A$  est donnée par la formule :  $A = \pi r^2$ .

En dérivant  $A$  par rapport à  $r$ , on obtient :  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$ . Comme  $r = 60$ ,  $\frac{dA}{dr} = 120\pi$ .

On veut le taux d'accroissement de l'aire polluée par rapport au temps, c'est-à-dire  $\frac{dA}{dt}$ .

D'après la relation de départ  $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ , on trouve que  $\frac{dA}{dt} = 120\pi \cdot 2 = 754$   $m^2/s$ .

**Exercice 4.8**

- a. Si les arêtes d'un cube de 2 cm de côtés croissent de 1 cm/min, comment le volume croît-il ?  
 b. Si l'aire d'une sphère de 10 cm de rayon croît de 5  $cm^2/min$ , comment le rayon croît-il ?  
 c. Soit un cône dont le rayon de la base est égal à la hauteur. Si le volume de ce cône haut de 10 cm croît de 15  $cm^3/min$ , comment la hauteur croît-elle ?

**Exercice 4.9**

À l'altitude de 4000 pieds, une fusée s'élève verticalement à une vitesse de 880 pieds par seconde. Une caméra au sol, située à 3000 pieds de la rampe de lancement, la filme. À quelle vitesse doit augmenter l'angle d'élévation de cette caméra pour qu'elle ne perde pas de vue la fusée ?

**Exercice 4.10**

Une échelle longue de 5 mètres est appuyée contre un mur. Quand l'extrémité posée sur le sol est à une distance de 4 mètres du mur, l'échelle glisse à une vitesse de 2 m/s. À quelle vitesse l'extrémité appuyée contre le mur glisse-t-elle alors vers le bas ?

### 4.3. Problèmes d'optimisation

Beaucoup de problèmes pratiques conduisent à la détermination des valeurs maximales et minimales prises par une quantité variable. Ces valeurs, qui sont les plus favorables dans un contexte donné, sont appelées **valeurs optimales**. Déterminer ces valeurs constitue un **problème d'optimisation**.

#### Plan de résolution



Voici la marche à suivre pour résoudre un problème d'optimisation :

1. Exprimer la quantité variable  $Q$  à rendre optimale (maximale ou minimale) comme fonction d'une ou de plusieurs variables.
2. Si  $Q$  dépend de plus d'une variable, disons  $n$  variables, trouver  $(n-1)$  équations liant ces variables.
3. Utiliser ces équations pour exprimer  $Q$  comme fonction d'une seule variable.
4. Déterminer l'ensemble  $D$  des valeurs admissibles de cette variable.
5. Calculer les extrema de  $Q$  (sans oublier de contrôler ce qui se passe aux bords de  $D$ ). Il faut donc dériver  $Q$  par rapport à la variable utilisée et résoudre  $Q' = 0$ .
6. Vérifier le résultat : a-t-on bien trouvé l'optimum cherché (voir ex. 3.15) ?

#### Premier exemple

On veut fabriquer une gouttière à profil rectangulaire avec une longue feuille de métal, large de 12 cm, en pliant les deux longs côtés et en les relevant.



Quelle hauteur doivent avoir les côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?

#### Résolution

La numérotation correspond à celle du plan de résolution.

1. Supposons que la gouttière ait une longueur  $L$ . Soit  $V$  le volume de la gouttière.

On a :  $V = (12 - 2x) \cdot x \cdot L$

2. Il n'y a qu'une inconnue. Donc rien à faire.

3.  $V(x) = (12 - 2x) \cdot x \cdot L = 12 \cdot L \cdot x - 2 \cdot L \cdot x^2$

4. Le volume  $V$  doit être positif, donc  $D(x) = [0 ; 6]$ .

Sur le bord gauche de  $D$ ,  $x$  vaut 0, ce qui correspond à un volume nul.

Sur le bord droit de  $D$ ,  $x$  vaut 6, ce qui correspond aussi à un volume nul.

5.  $V'(x) = 12 \cdot L - 4 \cdot L \cdot x = 0 \Rightarrow \underline{x = 3}$

6. Pour  $x = 3$ , on trouve un volume de  $18 \cdot L$ .

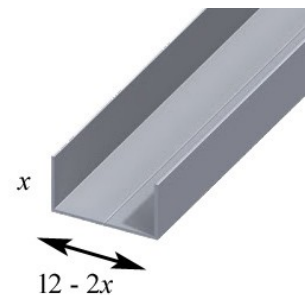
Comparons ce résultat avec le volume obtenu pour  $x = 2.9$  et  $x = 3.1$ .

Dans les deux cas, on obtient un volume de  $17.98 \cdot L$ . On avait donc bien trouvé le volume maximal.

On aurait aussi pu calculer la dérivée seconde de  $V(x)$  en  $x = 3$ , et étudier son signe.

On a :  $V''(x) = -4 \cdot L$ .

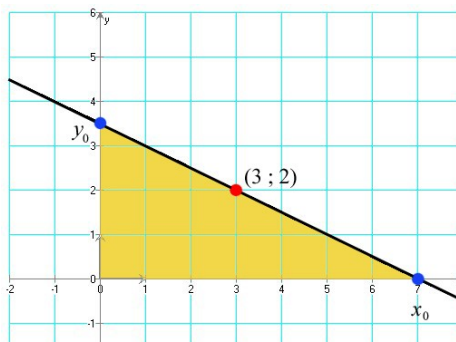
Comme la dérivée seconde est partout négative, la fonction  $V$  est partout concave (c'est en effet une parabole), donc aussi en  $x = 3$ . Le résultat est donc bien un maximum.



Pour vérifier qu'on a bien trouvé un maximum, on peut utiliser soit la fonction  $V(x)$ , soit la dérivée, soit la dérivée seconde (voir ex. 3.15).

## Deuxième exemple

On considère une famille de droites de pente négative passant par le point de coordonnées  $(3; 2)$ . Pour quelle droite de la famille le triangle délimité par la droite et les axes de coordonnées a-t-il la plus petite aire ?



**Résolution** 1. La droite que l'on cherche a pour équation  $y = m \cdot x + h$ . Appelons  $x_0$  l'endroit où la droite coupe l'axe des  $x$ , et  $y_0$  l'endroit où elle coupe l'axe des  $y$ .

Elle coupe l'axe des  $y$  quand  $x = 0$ . Donc,  $y_0 = h$ .

Elle coupe l'axe des  $x$  quand  $y = 0$ . Donc,  $x_0 = -\frac{h}{m}$ .

L'aire sera  $A = \frac{x_0 \cdot y_0}{2} = -\frac{h^2}{2m}$ .

2. On sait que la droite passe par le point  $(3; 2)$ . Donc, on a  $2 = 3m + h$ , ou  $h = 2 - 3m$ .

$$3. \quad A(m) = -\frac{(2-3m)^2}{2m}.$$

4. Domaine de validité de  $m$  :  $D(m) = ]-\infty; 0[$ .

$$5. \quad A'(m) = -\frac{2(2-3m)(-3) \cdot 2 \cdot m - (2-3m)^2 \cdot 2}{4m^2} = \dots = \frac{(2-3m)(2+3m)}{2m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{2}{3}} \quad \text{La solution } m = \frac{2}{3} \text{ n'est pas dans le domaine de validité } D(m).$$

$$6. \quad A\left(-\frac{2}{3}\right) = 12. \quad A(-0.66) = 12.0003. \quad A(-0.67) = 12.00007.$$

C'est donc bien l'aire minimale.

### Exercice 4.11

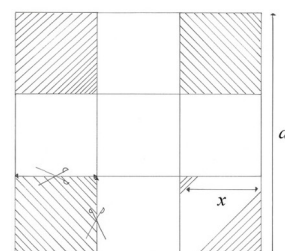
Parmi tous les rectangles de périmètre  $2p$ , quel est celui dont l'aire est maximale ? Quelle est son aire ?

### Exercice 4.12

Un rectangle a ses deux coins inférieurs sur l'axe des  $x$  tandis que ses deux coins supérieurs sont sur la parabole  $y = 16 - x^2$ . Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?

### Exercice 4.13

Vous disposez d'une plaque de carton carrée, de côté  $a$ . On vous demande de fabriquer une boîte sans couvercle de volume maximum. Vous découperez un carré de côté  $x$  dans chacun des quatre coins de la plaque pour obtenir une croix, puis vous relèverez les bords. Donnez les dimensions de la boîte optimale.



**Exercice 4.14**

Un aquarium ouvert a une base carrée et est conçu pour contenir  $62.5 \text{ dm}^3$  d'eau. Quelle est la valeur minimum de l'aire de la surface extérieure de l'aquarium ?

**Exercice 4.15**

Dimensionnez une boîte de conserve cylindrique d'un décimètre cube, l'objectif étant d'utiliser le moins de fer-blanc possible.

**Exercice 4.16**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 1$ . Quelles sont les abscisses des points de la courbe représentative de  $f$  les plus proches de l'origine ?

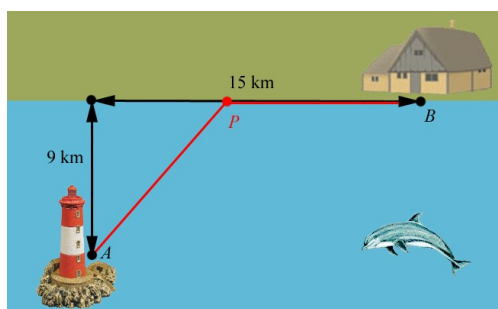
**Exercice 4.17**

Le gardien d'un phare (point  $A$ ) doit rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (point  $B$ ). Il se déplace en canot à la vitesse de  $4 \text{ km/h}$  et à pied à la vitesse de  $5 \text{ km/h}$ . Où doit-il accoster (point  $P$ ) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.

Vérifiez votre résultat avec



Profitez-en pour visualiser comment se déplace le minimum en fonction des vitesses sur l'eau et sur la terre ferme.



**Exercice 4.18**

Un fil de longueur  $L$  doit être coupé en deux parties de manière à pouvoir former un triangle équilatéral avec l'une et un carré avec l'autre. Comment faut-il couper ce fil pour que l'aire totale des deux figures construites soit...

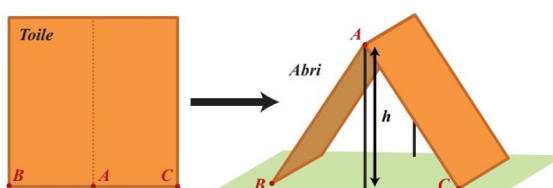


pourra vous être utile...

- a. maximale ?
- b. minimale ?

**Exercice 4.19**

Vous disposez d'une bâche carrée de  $4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$  pour monter une tente :



Déterminez la hauteur  $h$  de l'abri pour que son volume soit maximal.

**Exercice 4.20\***

Quelles dimensions faut-il donner à un tipi de volume donné pour minimiser la toile ?

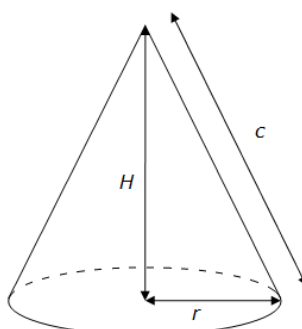
Donnez le rapport  $\frac{H}{r}$ .

**Formules pour le cône**

$c$  est l'apothème du cône,  
 $r$  le rayon de la base,  
 $H$  la hauteur,  
 $A_{lat}$  l'aire latérale.

$$A_{lat} = \pi r c$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$



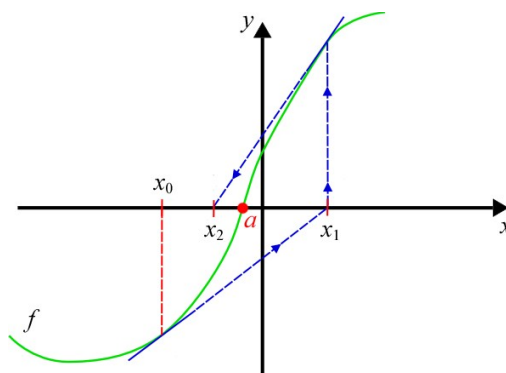
Il est impossible de dire si les Indiens d'Amérique se posaient la question. La forme de leurs tipis est cependant optimale de ce point de vue. Hasard ?

## 4.4. Méthode de Newton-Raphson

En analyse numérique, la **méthode de Newton-Raphson**, est un algorithme efficace pour approcher un zéro d'une fonction. De manière informelle, le nombre de décimales correctes double à chaque étape.

Partant d'une valeur approximative raisonnable d'un zéro  $x_0$  d'une fonction  $f$ , on approche la fonction par sa tangente au point  $(x_0; f(x_0))$ . Cette tangente est une fonction affine dont on sait trouver l'unique zéro (que l'on appellera  $x_1$ ). Ce zéro de la tangente sera généralement plus proche du « vrai » zéro de la fonction ( $a$ ). On recommence les mêmes calculs en partant cette fois de  $x_1$ , ce qui va nous donner l'abscisse  $x_2$ , etc.

Par récurrence, on définit la suite  $x_n$  par  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ . En principe, cette suite va converger vers  $a$ .



### Exercice

Retrouvez la valeur de  $x_{n+1}$  en partant de l'équation de la droite  $y - y_0 = m(x - x_0)$

Si la fonction présente un extremum local, il y a un risque que la méthode ne converge pas, car la valeur de la dérivée est nulle en un extremum et le nouveau point à l'infini.

**Exemple** Cherchons un zéro de la fonction  $f(x) = \cos(x) - x^3$ .

La dérivée est  $f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$ .

Nous savons que le zéro se situe entre 0 et 1. Prenons comme valeur de départ  $x_0 = 0.5$ .

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5^3}{-\sin(0.5) - 3 \cdot 0.5^2} = 1.11214$$

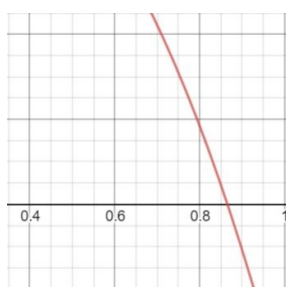
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.11214 - \frac{\cos(1.11214) - 1.11214^3}{-\sin(1.11214) - 3 \cdot 1.11214^2} = 0.90967$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.90967 - \frac{\cos(0.90967) - 0.90967^3}{-\sin(0.90967) - 3 \cdot 0.90967^2} = 0.86626$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.86626 - \frac{\cos(0.86626) - 0.86626^3}{-\sin(0.86626) - 3 \cdot 0.86626^2} = 0.86547$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 0.86547 - \frac{\cos(0.86547) - 0.86547^3}{-\sin(0.86547) - 3 \cdot 0.86547^2} = 0.86547$$

Après cinq itérations, les cinq premiers chiffres après la virgule sont déjà exacts.



$$f(x) = \cos(x) - x^3$$



### Exercice 4.21

Cherchez le zéro de la fonction  $e^x + \sin(x) - 3$ , sachant qu'il se trouve dans l'intervalle  $[0; 2]$ . On veut que les quatre premiers chiffres après la virgule soient exacts.

## 4.5. Ce qu'il faut absolument savoir

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| Calculer une tangente à une courbe                             | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître la notation de Leibniz pour les dérivées             | <input type="checkbox"/> ok |
| Résoudre un problème de taux d'accroissement                   | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître la démarche pour résoudre un problème d'optimisation | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître la méthode de Newton-Raphson                         | <input type="checkbox"/> ok |

# 5. Études de fonctions

## 5.1. Asymptotes

**Asymptote verticale** La droite  $x = a$  est dite **asymptote verticale** (A. V.) de la fonction  $f$  si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty \text{)}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty \text{)}$$

Une A. V. ne peut exister que si la fonction  $f$  n'est pas définie en  $x = a$ .

**Asymptote affine** La droite d'équation  $y = mx + h$  est une **asymptote affine** (A. A.) de la courbe représentative de la fonction  $f$  si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0 \quad (\text{propriété analogue en } -\infty)$$

Les valeurs de  $m$  et  $h$  sont calculées avec les formules suivantes :

**Remarque**

Si  $m = 0$ , l'asymptote est horizontale.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

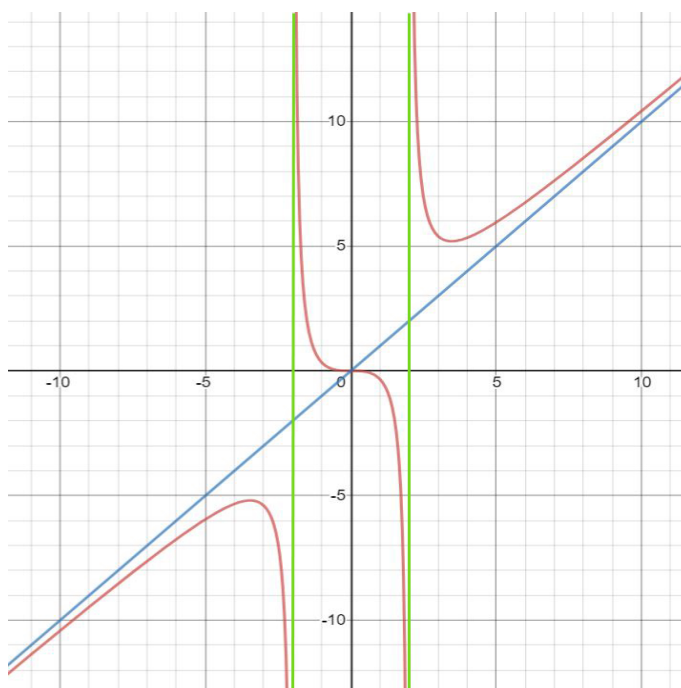
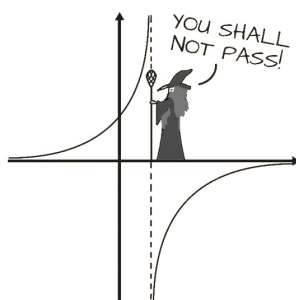
$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] \quad (\text{idem en } -\infty)$$

**Remarque :** Si  $m$  tend vers l'infini, alors il n'y a pas d'asymptote affine. Inutile donc d'essayer de calculer  $h$ .

C'est en particulier le cas avec des fonctions exponentielles ou la fonction  $\arctan(x)$ .

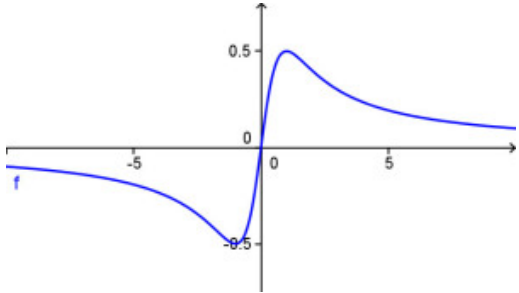
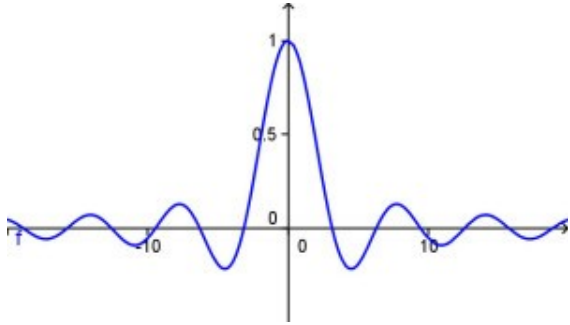
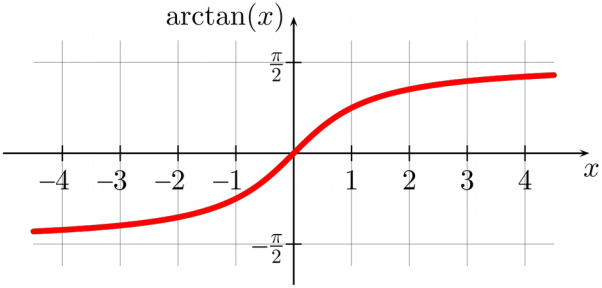
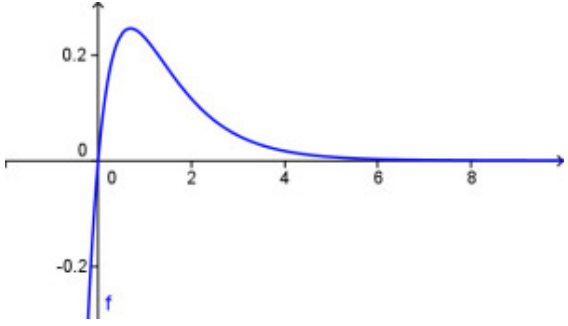
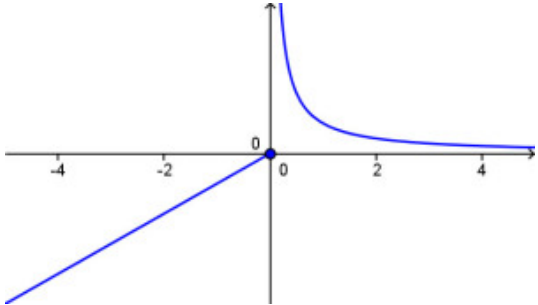
**Attention !** L'asymptote affine n'est pas forcément la même en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Il faut donc étudier les deux cas.

On a dessiné ci-dessous (en rouge) le graphe de la fonction  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ . Il y a deux asymptotes verticales (en vert) et une asymptote affine (en bleu).



Remarquez que la fonction n'est pas définie en  $x = -2$  et  $x = 2$ .

## Cinq exemples un peu particuliers

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ <p>une asymptote horizontale : <math>y = 0</math></p> <p>la courbe coupe l'asymptote.</p>	
$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ <p>une asymptote horizontale : <math>y = 0</math></p> <p>elle est coupée une infinité de fois par la fonction.</p> <p>il y a un trou en <math>x = 0</math>.</p>	
$f(x) = \arctan(x)$ <p>vers <math>+\infty</math>, une asymptote horizontale : <math>y = \frac{\pi}{2}</math></p> <p>vers <math>-\infty</math>, une autre asymptote horizontale : <math>y = -\frac{\pi}{2}</math></p>	
$f(x) = -e^{-2x} + e^{-x}$ <p>une asymptote horizontale vers <math>+\infty</math>, mais pas d'asymptote vers <math>-\infty</math>.</p>	
$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ <p>une asymptote verticale en <math>x = 0</math>. Pourtant la fonction est définie en <math>x = 0</math>...</p>	

## 5.2. Méthode

L'étude d'une fonction  $f$  comprend huit étapes.

Vous trouverez au § 5.3 un exemple complet qui vous servira d'aide-mémoire.

<b>1. Ensemble de définition</b>	Déterminer le domaine $D$ où la fonction $f(x)$ est définie.
<b>2. Parité</b>	Voir si la fonction est paire, impaire, périodique ou rien du tout. Cela permet, si la fonction est « agréable », de gagner du temps par la suite. La fonction $f$ est paire si $f(x) = f(-x)$ , et impaire si $f(x) = -f(-x)$ , $\forall x$ .
<b>3. Signe de la fonction</b>	Chercher les zéros, puis faire un tableau pour voir où la fonction est négative, positive ou nulle.
<b>4. Asymptotes verticales, trous</b>	Calculer la ou les asymptotes verticales et trouver les éventuels trous.
<b>5. Asymptotes affines</b>	Calculer la ou les asymptotes affines et, si demandé, trouver le positionnement de la courbe par rapport à ces asymptotes.
<b>6. Croissance et points critiques</b>	Un point $c$ de l'ensemble de définition est un <b>point critique</b> si $f'(c) = 0$ ou si $f'(c)$ n'existe pas.  Calculer la dérivée et chercher ses zéros. Faire un tableau pour voir comment la fonction croît. Identifier les minima, les maxima et les points d'inflexion à tangente horizontale.
<b>7. Concavité et points d'inflexion</b>	Chercher la concavité de la fonction et les points d'inflexion. Pour cela, calculer la dérivée seconde si elle n'est pas trop compliquée (cette méthode est la seule qui garantit de trouver tous les points d'inflexion). Faire un tableau. Calculer les pentes des tangentes aux points d'inflexion.
<b>8. Représentation graphique</b>	Dessiner la courbe en utilisant tous les renseignements glanés aux étapes 1 à 7. Faire un grand dessin où l'on représente le graphe de la fonction, les asymptotes et les points particuliers.

## 5.3. Un exemple complet

Étudions la fonction  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ .

### 1. Ensemble de définition

L'ensemble de définition de  $f$  est  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

### 2. Parité

$f$  est paire si  $f(x) = f(-x)$ . Est-ce le cas ?

Si la fonction est paire ou impaire, on peut alors n'étudier que le côté positif. Le côté négatif se déduira du côté positif.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \frac{-x^3}{(x+1)^2} \neq f(x). \quad f \text{ n'est donc pas paire.}$$

$f$  est impaire si  $f(x) = -f(-x)$ . Est-ce le cas ?

$$-f(-x) = -\frac{(-x)^3}{(x+1)^2} = \frac{x^3}{(x+1)^2} \neq f(x). \quad f \text{ n'est donc pas impaire.}$$

Par « symétrique », on veut dire que toutes les valeurs doivent être présentes dans  $D$  avec les signes  $+$  et  $-$ .

En fait, puisque le domaine de définition  $D$  n'est pas « symétrique », il est évident que la fonction ne peut être ni paire, ni impaire.

### 3. Signe de la fonction

Cherchons d'abord le(s) zéro(s) de  $f$  :

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0.$$

Le signe de la fonction est donné par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de  $x$  trouvées aux étapes 1 et 3) :

$x$	$< 0$	$0$	$] 0 ; 1 [$	$1$	$> 1$
$x^3$	-	0	+		+
$(x-1)^2$	+	+	+		+
$f(x)$	-	0	+		+

### 4. Asymptotes verticales (A.V.), trous

On peut s'aider du tableau de signes de l'étape 3 pour déterminer le signe de l'infini.

Par exemple, on a vu que  $\frac{\sin(x)}{x}$  a un trou en  $x=0$ .

Les asymptotes verticales, s'il y en a, se trouvent aux abscisses trouvées à l'étape 1. Il s'agit de vérifier que ce sont bien des asymptotes verticales et non pas des trous.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$$

Si on avait un trou, on trouverait que la limite à gauche est égale à la limite à droite et que ces limites seraient égales à un **nombre**.

### 5. Asymptotes affines (A.A.)

Une asymptote affine est de la forme  $y = m \cdot x + h$ . On va analyser ce qui se passe en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

$$\text{Du côté de } +\infty \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} h &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

Du côté de  $+\infty$ , l'A.A. est donc  $y = x + 2$ .

Du côté de  $-\infty$  Idem que pour  $+\infty$  (le signe ne change rien).

### 6. Croissance et points critiques

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \text{ s'annule en } 0 \text{ et } 3.$$

Les points du graphe dont les abscisses sont des points critiques de  $f$  sont donc  $(0 ; 0)$  et  $(3 ; \frac{27}{4})$ .

La croissance de  $f$  est donnée par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de  $x$  trouvées aux étapes 1 et 6) :

$x$		$0$		$1$		$3$	
$f'(x)$	+	0	+		-	0	+
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗

pt. d'infl.  
à tg. hor.

minimum

**7. Concavité et points d'inflexion**

$$f'''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \text{ s'annule en } 0.$$

La concavité de  $f$  est donnée par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de  $x$  trouvées aux étapes 1 et 7) :

$x$		0		1	
$f''(x)$	-	0	+		+
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$		$\cup$

pt. d'infl.

*Calcul de la pente de la tangente  
au point d'inflexion*

Il y a un seul point d'inflexion en  $(0 ; 0)$ .

$$m = f'(0) = \frac{0^2(0-3)}{(0-1)^3} = \frac{0}{1} = 0$$

(on savait déjà d'après l'étape 6 que c'était un point d'inflexion à tangente horizontale).

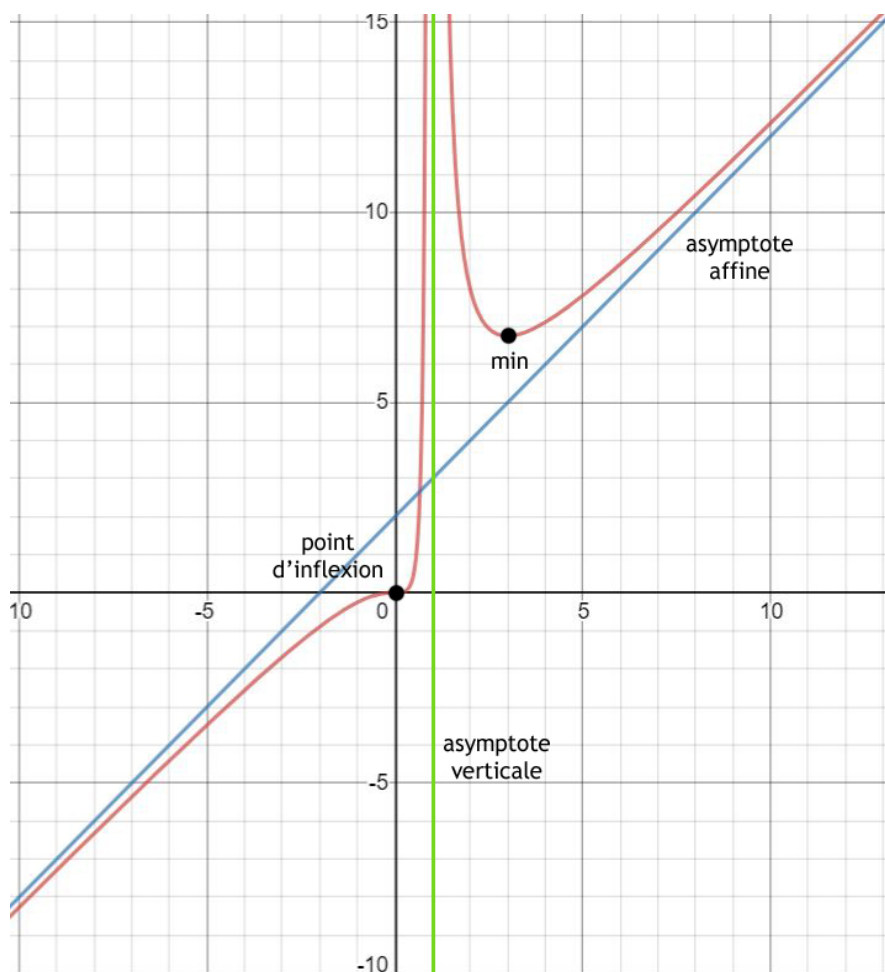
**8. Représentation  
graphique**

On trace d'abord les asymptotes trouvées aux étapes 4 et 5.

On place ensuite tous les points que l'on a trouvés aux étapes 3, 6 et 7.

On trace enfin la courbe d'après les indices récoltés aux étapes 2, 3, 6 et 7. Les tableaux en particulier sont d'une aide très précieuse.

Il est conseillé de calculer d'autres points de la fonction et de les reporter sur le dessin.

**Remarque**

Plutôt que de faire ce graphique à la fin de l'étude, on peut aussi le dessiner au fur et à mesure des étapes.

**Exercice 5.1**

Étudiez les fonctions suivantes selon l'exemple du § 5.3.  
Vous trouverez des corrigés détaillés sur le site de ce cours.

**Fonctions rationnelles**

1.  $f(x) = \frac{-3x+4}{2x+3}$

2.  $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{2(x^2-4x+3)}$

aide :  $f''(x) = \frac{-8(3x^2-12x+13)}{(x^2-4x+3)^3}$

3.  $f(x) = \frac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$

aide :  $f''(x) = \frac{6(4-x)}{(x-2)^4}$

4.  $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-1}$

**Autres types de fonctions**

5. a.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

5. b.  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

6.  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

7.  $f(x) = (2x^2+2x-1) \cdot e^{-2x}$

8.  $f(x) = \frac{\ln(x^2)+1}{2x}$

9.  $f(x) = (e^x-5)(e^x+1)$

**Exercice 5.2**

En photographie, la *profondeur de champ* correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.



En optique, pour que la netteté s'étende de la distance  $a$  à la distance  $r$ , la mise au point doit être faite à la distance  $p = \frac{2ar}{a+r}$  (les distances sont exprimées en mètres).

- a. À quelle distance doit être faite la mise au point pour photographier un sujet dont les éléments intéressants sont à une distance comprise entre 1.5 m et 3 m ?

On souhaite désormais que les sujets soient nets à partir d'une distance de 5 m.

b. Démontrez que pour  $a > 5$ ,  $p = 10 - \frac{50}{5+r}$ .

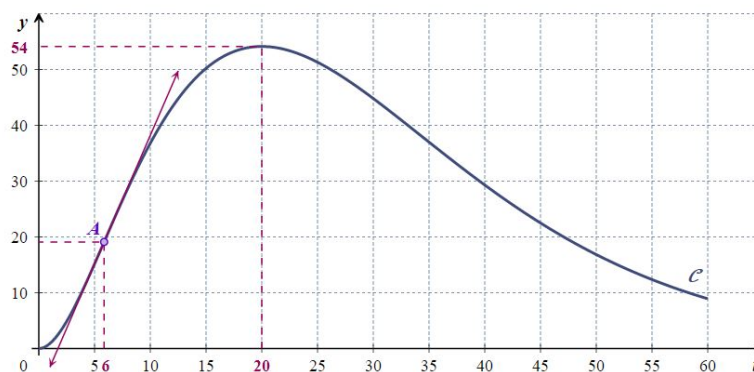
- c. Étudiez la fonction  $p$  du point b et dessinez son graphe.

- d. On souhaite que la netteté s'étende de « 5 m à l'infini ». Quelle distance de mise au point doit-on choisir ?

**Exercice 5.3**

La courbe  $\mathcal{C}$  ci-après représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre  $t$  de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Baccalauréat ES 2015  
Nouvelle Calédonie



a. Estimez graphiquement le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte. Expliquez la démarche utilisée.

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 60]$  par  $f(t) = t^2 e^{-0.1t}$  où  $t$  représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Pour étudier les propriétés de la fonction  $f$ , on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0.1 t(20-t) e^{-0.1t}$
- $f''(t) = (0.01t^2 - 0.4 t + 2) e^{-0.1t}$
- $F(t) = (-10 t^2 - 200 t - 2000) e^{-0.1t}$

Primitive : voir chapitre 7

où  $f'$  désigne la **dérivée** de  $f$ ,  $f''$  désigne sa **dérivée seconde** et  $F$  une **primitive** de  $f$ .

b. Confirmez le résultat  $f'(t) = 0.1 t(20-t) e^{-0.1t}$  qui a été fourni par le logiciel.

c. Déterminez le signe de  $f'(t)$  sur  $[0 ; 60]$ .

d. Dressez le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 60]$ .

e. la théorie est au chapitre 8

e. Le nombre moyen  $M$  de malades par jour, en milliers, durant les  $n$  premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par  $M(n) = \frac{1}{n} (F(n) - F(0))$ .

Calculez  $M(10)$ ,  $M(20)$  et  $M(60)$ .

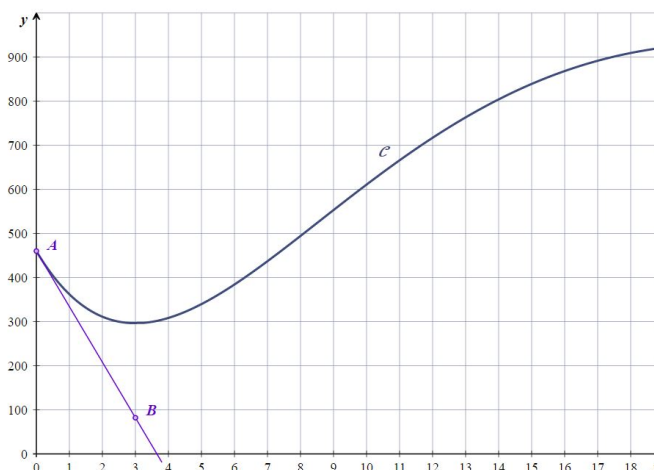
f. Justifiez par le calcul que, sur l'intervalle  $[0 ; 15]$ , la courbe de la fonction  $f$  admet un unique point d'inflexion. Calculez l'abscisse de ce point d'inflexion.

g. Donnez une interprétation concrète de cette abscisse.

### Exercice 5.4

Baccalauréat ES 2019  
Amérique du Sud

La courbe  $\mathcal{C}$  ci-après, associée à une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 19]$ , représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1<sup>er</sup> janvier 2000 (année numéro 0) et le 1<sup>er</sup> janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1<sup>er</sup> janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460'000 téléspectateurs.

- a. Donnez une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1<sup>er</sup> janvier 2014.
- b. La droite  $(AB)$ , où les points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées  $A(0 ; 460)$  et  $B(3 ; 82)$ , est la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $A$ .  
Déterminez la valeur de  $f'(0)$ , sans calculer la dérivée.  
Comment interprétez-vous ce résultat ?

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années. On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 29]$  par  $f(x) = (20x^2 - 80x + 460) e^{-0.1x}$ , où  $x$  représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple  $x = 19$  pour l'année 2019).

- c. Calculez au millier près le nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1<sup>er</sup> janvier 2014.
- d. Démontrez que la dérivée  $f'$  est définie par  $f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126) e^{-0.1x}$ .
- e. Construisez le tableau de signes de  $f'$  sur l'intervalle  $[0 ; 29]$ .
- f. Construisez le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 29]$ .
- g. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifiez.
- h. Montrez que l'équation  $f(x) = 800$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[3 ; 21]$ . Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800'000 ?

On admet que  $F(x) = (-200x^2 - 3200x - 36600) e^{-0.1x}$  est une primitive de la fonction  $f$ .

Voir exercice 5.3 e

- i. Déterminez à mille près l'audience journalière moyenne de téléspectateurs de la chaîne de télévision entre le 1<sup>er</sup> janvier 2018 et le 1<sup>er</sup> janvier 2019.

---

## 5.4. Ce qu'il faut absolument savoir

- |   |                             |
|---|-----------------------------|
| Trouver les asymptotes d'une fonction   | <input type="checkbox"/> ok |
| Connaître les huit étapes de la méthode par cœur  | <input type="checkbox"/> ok |
| Maîtriser les huit étapes, en particulier les limites, les dérivées et les tableaux de signes | <input type="checkbox"/> ok |

## 6. Études de courbes paramétrées

### 6.1. Définitions

Soit deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur le même sous-ensemble  $D \subset \mathbb{R}$ . Le point  $M(t)$  de coordonnées  $(f(t); g(t))$  décrit un sous-ensemble  $(C)$  du plan lorsque  $t$  varie dans un intervalle  $I$ .

#### Remarques

La courbe  $(C)$  n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction ; c'est pourquoi on parle de *courbe* paramétrée et non pas de *fonction* paramétrée.

On peut parfois, en éliminant le paramètre  $t$  entre les deux équations, obtenir  $y$  comme fonction de  $x$ , et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une relation  $y = h(x)$ .

Une **représentation paramétrique** d'une courbe  $(C)$  est un système d'équations où les coordonnées des points de la courbe sont exprimées en fonction d'un **paramètre** (souvent noté  $t, k, \theta, \dots$ ).

$$(C) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Ces équations sont appelées **équations paramétriques de  $(C)$** .

On note parfois également  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Pour que cette définition ait un sens, il faut que  $x(t)$  et  $y(t)$  existent simultanément.

C'est pourquoi le **domaine de définition  $D$**  de la courbe  $(C)$  est l'intersection des domaines de définition  $D_x$  et  $D_y$  des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ . On a donc  $D = D_x \cap D_y$ .

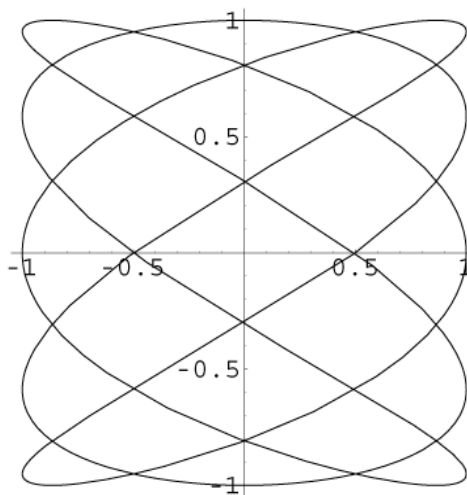
#### Exercice 6.1

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Trouvez le domaine de définition de la courbe paramétrée :  $\begin{cases} x = \sqrt{t-a} \\ y = \sqrt{b-t} \end{cases}$

### 6.2. Exemple de courbes paramétrées : figures de Lissajous



Jules Antoine Lissajous  
(1822 - 1880)



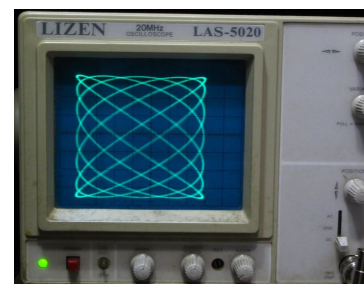
$$\begin{cases} x = \sin(5t) \\ y = \cos(3t) \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi[$$

Les figures de Lissajous (ou courbes de Bowditch) sont de la forme :

$$\begin{cases} x = a \sin(t) \\ y = b \sin(nt + \phi) \end{cases}$$

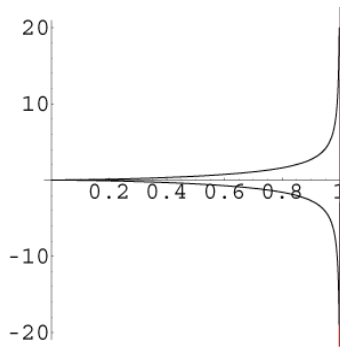
avec  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  et  $n \geq 1$

En électronique, on peut faire apparaître des figures de Lissajous sur un oscilloscope.



## 6.3. Asymptotes

### Asymptote verticale



Asymptote verticale  $x = 1$

On obtient une telle asymptote lorsque  $x$  tend vers une valeur finie  $a$  et  $y$  tend vers une valeur infinie.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a, \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

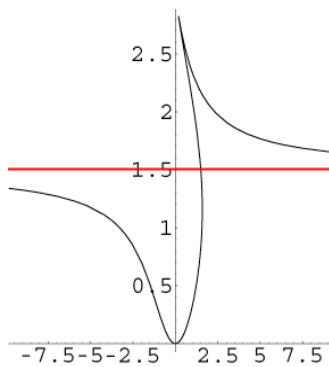
$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty$$

L'asymptote verticale est une droite qui a pour équation  $x = a$ .

Si  $x(t) - a$  est positif, la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche.

La courbe coupe l'asymptote lorsque  $x(t) = a$ .

### Asymptote horizontale



Asymptote horizontale  $y = 1.5$

Cette fois,  $x$  tend vers l'infini et  $y$  tend vers une valeur finie  $b$  lorsque  $t$  tend vers  $t_0$ .

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty$$

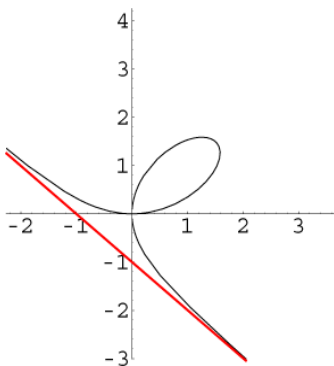
$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b, \text{ avec } b \in \mathbb{R}$$

L'asymptote horizontale est une droite qui a pour équation  $y = b$ .

Si  $y(t) - b$  est positif, la courbe est en dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous.

La courbe coupe l'asymptote lorsque  $y(t) = b$ .

### Asymptote oblique



Asymptote oblique  $y = -x - 1$

Une asymptote oblique ne peut exister que si  $x$  et  $y$  tendent tous deux vers l'infini lorsque  $t$  tend vers  $t_0$ . Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty$$

La droite  $y = mx + h$  est une asymptote oblique si :

$$m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \in \mathbb{R}$$

$$h = \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - m \cdot x(t)) \in \mathbb{R}$$

Ces formules sont analogues à celles rencontrées au chapitre 5, page 33.

La position de la courbe est donnée par le signe de  $y(t) - mx(t) - h$ .

Si cette expression est positive, la courbe est en dessus de l'asymptote, sinon, elle est en dessous.

Si  $m = \infty$ , il n'y a pas d'asymptote oblique.

## 6.4. Dérivées et points particuliers

### Dérivées

Les valeurs de  $t$  décrivant le domaine d'étude, on étudie, lorsque c'est possible, le signe des dérivées  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{dy}{dt}$ .

Comme pour les fonctions d'une seule variable (voir chapitre 5), on présentera les résultats sous forme d'un tableau, qui est constitué de deux tableaux accolés, donnant les variations de  $x$  et  $y$  (voir § 6.6).

### Calcul de $\frac{dy}{dx}$

Regardons deux points voisins de la courbe :  $M(t_0)$  et  $M(t_0 + \epsilon)$ . La droite passant par ces deux points tend vers la tangente à la courbe au point  $M(t_0)$  lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro.

La pente de la droite passant par  $M(t_0)$  et  $M(t_0 + \epsilon)$  est :

On peut écrire :

$$m = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$m(t_0; \epsilon) = \frac{y(t_0 + \epsilon) - y(t_0)}{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)} = \frac{y(t_0 + \epsilon) - y(t_0)}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)} = \frac{\frac{y(t_0 + \epsilon) - y(t_0)}{\epsilon}}{\frac{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)}{\epsilon}}$$

$\frac{dy}{dx}$  donne la pente de la tangente à la courbe.

Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, la pente tend vers  $\frac{\frac{dy}{dt}(t_0)}{\frac{dx}{dt}(t_0)} = \frac{dy}{dx}(t_0)$ .

### Points particuliers

Si  $x'(t_0) \neq 0$  et  $y'(t_0) = 0$ , la courbe admet une **tangente horizontale** en  $M(t_0)$ .

Si  $x'(t_0) = 0$  et  $y'(t_0) \neq 0$ , la courbe admet une **tangente verticale** en  $M(t_0)$ .

Si  $x'(t_0) = 0$  et  $y'(t_0) = 0$ , la courbe admet un **point singulier** en  $M(t_0)$ .

On pourra compléter le tableau des dérivées par une ligne donnant les valeurs de  $\frac{y'_t}{x'_t}$  pour les valeurs de  $t$  figurant déjà dans ce tableau.

## 6.5. Méthode

L'étude d'une courbe paramétrée comprend six étapes.

### 1. Domaine de définition

Déterminer le domaine  $D$  où la courbe est définie.

### 2. Asymptotes

Déterminer, s'il y en a, les A.V, les A.H et les A.O.

### 3. Dérivées et tableau de variation

Calculer  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  et  $\frac{dy}{dx}$ . Faire le tableau de variation.

### 4. Points particuliers

Déterminer, s'il y en a, les points à tangente verticale, les points à tangente horizontale et les points singuliers.

Calculer la limite de la pente de la tangente aux points singuliers, i.e.

$$m = \lim_{t \rightarrow a} \frac{dy}{dx}(t)$$

### 5. Intersection avec les axes

Trouver les  $t$  qui satisfont  $x(t) = 0$  et  $y(t) = 0$ .

### 6. Représentation graphique

Dessiner la courbe en utilisant les renseignements glanés aux étapes 1 à 5. Il n'est pas interdit de calculer certains points de la courbe, afin de faire un dessin plus précis.

### Comment remplir le tableau de variation

Les flèches indiquent comment évolue la courbe en fonction de  $t$ .

- Commencez par écrire dans l'ordre croissant les valeurs de  $t$  trouvées aux étapes précédentes, de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Prenez soin de laisser une colonne vide entre les valeurs de  $t$ .
- Outre la première ligne que vous venez d'écrire, le tableau en comprendra cinq autres (ou seulement quatre s'il n'y a pas de point singulier).  
Dans l'ordre :  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $y$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dx}$ .
- Hachurez les colonnes où la courbe n'existe pas.
- Remplissez la ligne  $\frac{dx}{dt}$  avec des +, des - et des 0.
- Dans la ligne  $x$ , mettez des  $\rightarrow$  au-dessus des + et des  $\leftarrow$  au-dessus des -.
- Remplissez la ligne  $\frac{dy}{dt}$  avec des +, des - et des 0.
- Dans la ligne  $y$ , mettez des  $\uparrow$  au-dessus des + et des  $\downarrow$  au-dessus des -.
- Notez les coordonnées des points où  $t$  est donné (s'ils existent).
- S'il y a des points singuliers, notez dans la ligne  $\frac{dy}{dx}$  la valeur de la pente.

### Comment dessiner la courbe

- Dessinez d'abord les asymptotes et les points connus.
- Dessinez ensuite la courbe en lisant le tableau de gauche à droite. Regardez comment évoluent les coordonnées des points en fonction de  $t$ .
- Notez sur le dessin les valeurs de  $t$  aux endroits remarquables.

## 6.6. Deux exemples complets

### Premier exemple

$$\text{Étudions la courbe } \begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

#### 1. Domaine de définition

L'ensemble de définition de la courbe est  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

#### 2. Asymptotes

$$\text{Quand } t \rightarrow +\infty, \text{ il y a une A. H., car } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Quand } t \rightarrow -\infty, \text{ il y a une A. H., car } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \end{cases}$$

Quand  $t = -1$  :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -1} x(t) = -\frac{1}{2} \\ \lim_{t \rightarrow -1} y(t) \text{ n'existe pas, car } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow -1} y(t) = -\infty \\ \lim_{t < -1} y(t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow -1} y(t) = +\infty \\ \lim_{t > -1} y(t) = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

Il y a donc une A. V. quand  $t = -1$ .

Quand  $t = 1$ , il y a une A. O. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 1} x(t) \text{ n'existe pas, car } \begin{cases} \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} x(t) = -\infty \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} x(t) = +\infty \end{cases} \\ \lim_{t \rightarrow 1} y(t) \text{ n'existe pas, car } \begin{cases} \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} y(t) = -\infty \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} y(t) = +\infty \end{cases} \end{array} \right.$$

**Calcul de  $m$**

$$m = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{t}{t^2-1}}{\frac{t-1}{1}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t+1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t+1} = \frac{1}{2}$$

**Calcul de  $h$**

$$h = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t - t^2(t+1)}{2(t^2-1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^3 - t^2 + 2t}{2(t^2-1)} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(-t^2-2t)(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(-t^2-2t)}{(t+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{2} = -\frac{3}{4}$$

L' A. O. a donc pour équation  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ .

**3. Dérivées et tableau de variations**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2} \quad \text{s'annule en } t = 0 \text{ et } t = 2.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2-1) - 2t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{-t^2-1}{(t^2-1)^2} = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} \quad \text{ne s'annule pas.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} \cdot \frac{(t-1)^2}{t(t-2)} = -\frac{t^2+1}{(t-1)^2(t+1)^2} \cdot \frac{(t-1)^2}{t(t-2)} = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2} \quad \text{ne s'annule pas.}$$

Les valeurs de  $t$  intéressantes sont  $t = -1, 0, 1$  et  $2$  (valeurs trouvées aux étapes 1 et 3).

Il faut aussi voir ce qui se passe quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .

$t$	$-\infty$		$-1$		$0$		$1$		$2$		$+\infty$
$x$	$-\infty$	$\rightarrow$	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	$0$	$\leftarrow$		$\leftarrow$	$4$	$\rightarrow$	$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	$0$	$-$		$-$	$0$	$+$	
$y$	$0^-$	$\downarrow$		$\downarrow$	$0$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\frac{2}{3}$	$\downarrow$	$0^+$
$\frac{dy}{dt}$		$-$		$-$	$-1$	$-$		$-$	$-5$	$-$	

A. H.                      A. V.                      tangente verticale                      A. O                      tangente verticale                      A. H.

**4. Points particuliers**

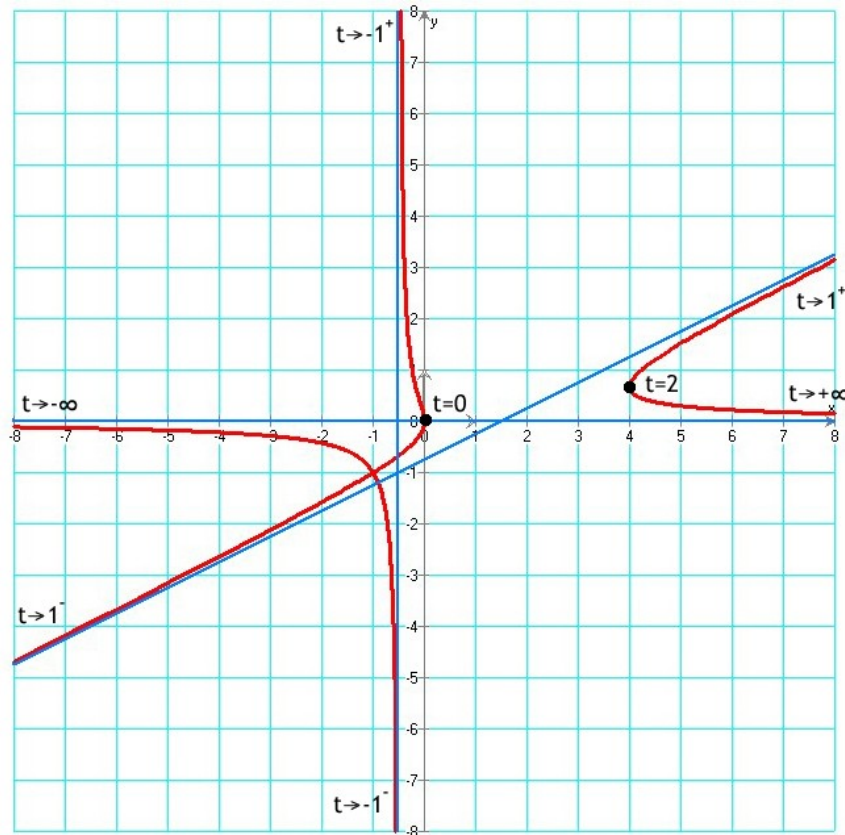
En inspectant le tableau ci-dessus, on s'aperçoit qu'il n'y a pas de point singulier, mais deux points à tangente verticale.

**5. Intersection avec les axes**

Il y a une seule intersection en  $t = 0$ . Le point d'intersection est  $(0 ; 0)$ .

## 6. Représentation graphique

En bleu, les trois asymptotes.



### Second exemple

Étudions la courbe 
$$\begin{cases} x = 2t - \frac{1}{t^2} \\ y = 2t + t^2 \end{cases}$$

#### 1. Domaine de définition

L'ensemble de définition de la courbe est  $D = \mathbb{R}^*$

#### 2. Asymptotes

Il y a une asymptote horizontale quand  $t = 0$ , puisque 
$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas d'asymptote quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .

#### 3. Dérivées et tableau de variations

$$\frac{dx}{dt} = 2 + \frac{2}{t^3} \quad \text{s'annule en } t = -1.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 + 2t \quad \text{s'annule en } t = -1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+t}{1+\frac{1}{t^3}} = \frac{1+t}{\frac{t^3+1}{t^3}} = \frac{t^3(t+1)}{t^3+1} = \frac{t^3(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{t^3}{t^2-t+1} \quad \text{ne s'annule jamais.}$$

Les valeurs de  $t$  intéressantes sont  $t = -1$  et  $0$  (valeurs trouvées aux étapes 1 et 3). Il faut aussi voir ce qui se passe quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .

$t$	$-\infty$		$-1$		$0$		$+\infty$
$x$	$-\infty$	$\rightarrow$	$-3$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$0$	$-$		$+$	
$y$	$+\infty$	$\downarrow$	$-1$	$\uparrow$	$0$	$\uparrow$	$+\infty$
$\frac{dy}{dt}$		$-$	$0$	$+$	$2$	$+$	
$\frac{dy}{dx}$			$-\frac{1}{3}$				

Point  
singulier                      Asymptote  
horizontale

**4. Points particuliers** En inspectant le tableau, on s'aperçoit qu'il y a un point singulier en  $t = -1$ . Il est utile dans ce cas de calculer  $\frac{dy}{dx}(-1)$  pour connaître la pente de la tangente en ce point.

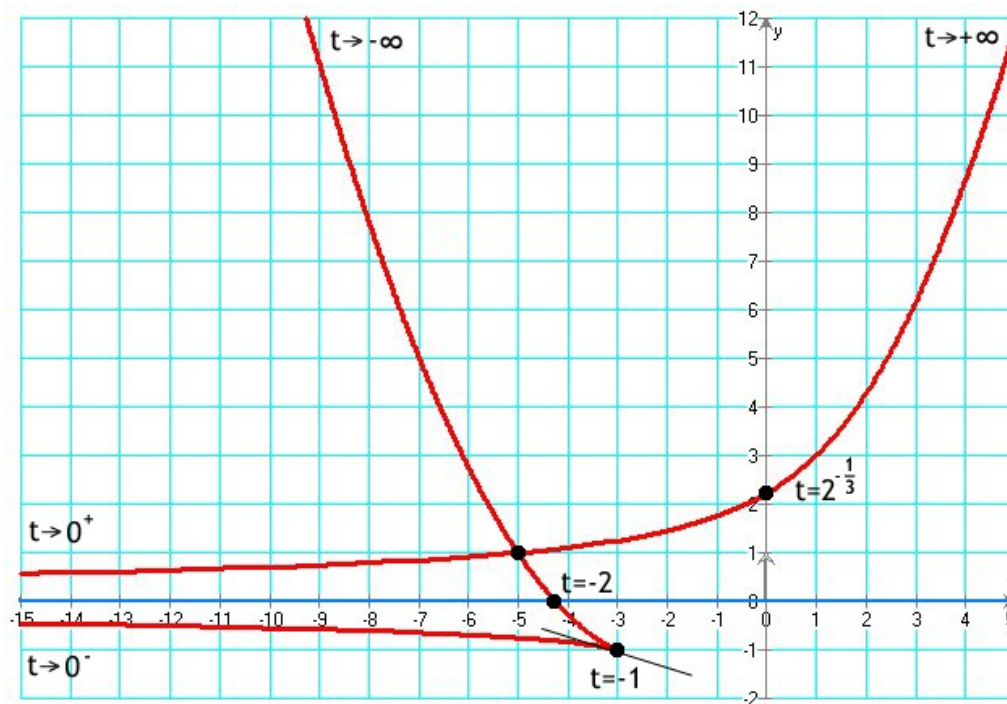
**5. Intersections avec les axes**  $x(t)=0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  qui correspond au point  $(0 ; 2.22)$

$y(t)=0 \Rightarrow t = -2$  qui correspond au point  $(-4.25 ; 0)$

**6. Représentation graphique**

En esquissant le dessin de cette courbe, on s'apercevra que cette courbe contient un point double. Pour le calculer, il faut résoudre  $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$  avec  $t \neq s$ .

Ce n'est en général pas facile ! En résolvant le système avec *Mathematica*, on a trouvé  $t = -1 - \sqrt{2}$  et  $s = -1 + \sqrt{2}$ . Ces deux valeurs correspondent au point  $(-5 ; 1)$ .



**Exercice 6.2**

Étudiez et dessinez les courbes suivantes selon les exemples du § 6.6.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} & \text{b.} & \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases} \\ \text{c.} & \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} & \text{d.} & \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^2} \end{cases} \\ \text{e.} & \begin{cases} x(t) = \frac{e^{-t}}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t(t-1)} \end{cases} & \text{f.} & \begin{cases} x(t) = \frac{e^{-t}}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t(t+2)} \end{cases} \\ \text{g.} & \begin{cases} x(t) = \frac{\ln(t)}{t} \\ y(t) = t \ln(t) \end{cases} & \text{h.} & \begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases} \quad (a > 0) \\ \text{i.} & \begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin^3(t) \end{cases} \quad (a > 0) & \text{j.} & \begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin^3(t) \end{cases} \quad (a > 0) \end{array}$$

**6.7. Ce qu'il faut absolument savoir**

Trouver les asymptotes d'une courbe paramétrée

 ok

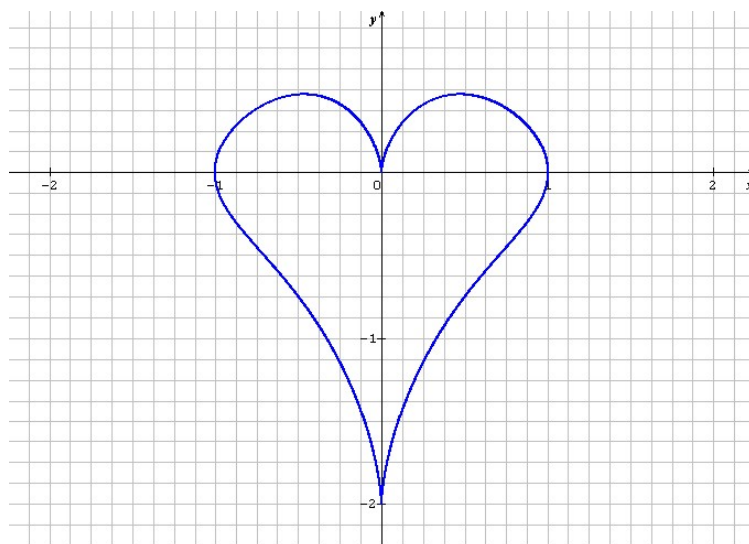
Trouver les points particuliers d'une courbe paramétrée

 ok

Connaître les six étapes de la méthode par cœur

 ok

Maîtriser parfaitement chaque étape de la méthode

 ok

$$\begin{cases} x(t) = \sin^3(t) \\ y(t) = \cos(t) - \cos^4(t) \end{cases}$$

# 7. Primitives

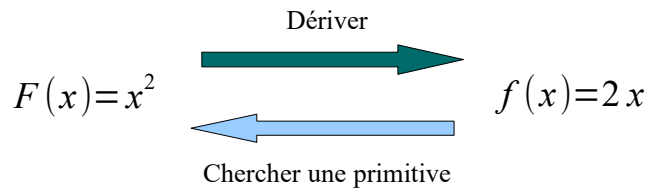
## 7.1. Recherche de primitives

On parle aussi parfois d'antidérivée.

Une **primitive** d'une fonction  $f$  est une fonction  $F$  dont  $f$  est la dérivée :  $F' = f$ .

Soit la fonction  $F(x) = x^2$ . Sa dérivée est  $F'(x) = f(x) = 2x$ . Supposons que l'on ait oublié la fonction  $F(x)$  et qu'on n'ait retenu que sa dérivée  $f(x)$ . Est-il possible de retrouver la fonction originale  $F(x)$  ?

Cette recherche de la fonction originale est appelée **recherche d'une primitive** ou **intégration**.



Remarquons au passage qu'il existe une infinité de primitives pour une fonction  $f(x)$ . En effet, rappelons-nous que la dérivée d'une constante est nulle. Donc  $F(x) = x^2 + 2$ ,  $F(x) = x^2 - 5$  sont aussi des primitives de  $f(x) = 2x$ . Ainsi, **toutes** les primitives de  $f(x) = 2x$  sont de la forme  $F(x) = x^2 + C$  ( $C$  est une constante).

On peut noter l'ensemble des primitives d'une fonction avec le **symbole d'intégration**. Par exemple, l'ensemble des primitives de la fonction  $f(x) = 2x$  est noté  $\int 2x dx$ .

Vous comprendrez d'où vient  $dx$  au chapitre suivant.

Ainsi, si  $F$  est une primitive de  $f$ , on écrira :  $\int f(x) dx = F(x) + C$

Une condition suffisante pour qu'une fonction  $f$  admette des primitives sur un intervalle est qu'elle y soit continue. Par contre, on ne peut pas toujours l'exprimer. Par exemple, on ne peut pas calculer la primitive de  $e^{x^2}$  (pourtant elle existe).

### Exercice 7.1

Vous trouverez une liste des primitives les plus courantes dans votre formulaire de mathématiques.

En vous appuyant sur vos souvenirs des dérivées, trouvez les primitives ci-dessous :

$$\begin{array}{lll} \int 4 dx = & \int 6x dx = & \int x^2 dx = \\ \int -\cos(x) dx = & \int e^x dx = & \int \frac{dx}{x} = \\ \int \sin(x) dx = & \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = & \int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \end{array}$$

### Propriétés des primitives

$$\begin{array}{l} (1) \quad \int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx \\ (2) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (\text{idem pour « - »}) \end{array}$$

### Exercice 7.2

En utilisant votre formulaire, vos souvenirs sur les dérivées et les deux propriétés ci-dessus, trouvez les primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \int \cot(x) dx & \text{b. } \int \frac{5x^4}{12} dx & \text{c. } \int 7 \sin(3x) dx \\ \text{d. } \int (5 \cos(2x) - e^{5x} + 9) dx & \text{e. } \int 2 \tan(x) dx & \text{f. } \int 3^x dx \\ \text{g. } \int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x}} dx & \text{(transformez d'abord cette fonction en somme de puissances de } x) & \end{array}$$

## 7.2. Intégration par substitution

Cette importante méthode est couramment utilisée pour transformer un problème d'intégration compliqué en un problème plus simple.

On l'appelle aussi « intégration par changement de variable ».

Elle peut se généraliser ainsi :

On veut calculer  $\int f(x) dx$

**Pas 1.** Poser  $u = g(x)$ .

*Tout le problème est de bien choisir  $g(x)$  !*

**Pas 2.** Calculer  $\frac{du}{dx} = g'(x)$ .

**Pas 3.** Faire la substitution  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x) dx$ .

*À partir d'ici, plus aucun  $x$  ne doit subsister dans l'intégrale. Si tel était le cas, cela voudrait dire que la substitution du **pas 1** n'était pas judicieuse.*

**Pas 4.** Calculer  $\int h(u) du$

**Pas 5.** Remplacer  $u$  par  $g(x)$ , pour obtenir le résultat final en fonction de  $x$ .



**Exemple 1** Évaluer  $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$ .

Si on pose  $u = \sin(x)$ , on aura  $\frac{du}{dx} = \cos(x)$ , donc  $du = \cos(x) dx$ .

$$\text{Ainsi, } \int \sin^2(x) \cos(x) dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

**Exemple 2** Évaluer  $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ .

Si on pose  $u = \sqrt{x}$ , on aura  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , donc  $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$  et  $2 du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .

$$\text{Ainsi, } \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cos(u) du = 2 \int \cos(u) du = 2 \sin(u) + C = 2 \sin(\sqrt{x}) + C$$

### Exercice 7.3

Trouvez les primitives ci-dessous en faisant la substitution indiquée :

a.  $\int 2x(x^2+1)^{23} dx$        $u = x^2 + 1$

b.  $\int \cos^3(x) \sin(x) dx$        $u = \cos(x)$

c.  $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$        $u = \sqrt{x}$

d.  $\int \frac{3x dx}{\sqrt{4x^2+5}}$        $u = 4x^2 + 5$

### Exercice 7.4

Trouvez les primitives ci-dessous. Vous vérifierez chaque résultat en le dérivant.



Le logiciel en ligne **cymath** non seulement trouve les primitives, mais explique comment. Utilisez-le pour vous exercer !

a.  $\int x(2-x^2)^3 dx$       b.  $\int \cos(8x) dx$

c.  $\int t \sqrt{7t^2+12} dt$       d.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$

e.  $\int \frac{x dx}{(4x^2+1)^3}$       f.  $\int \frac{\sin(\frac{5}{x})}{x^2} dx$

- g.  $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3)}$
- h.  $\int \sin^5(3\alpha)\cos(3\alpha) d\alpha$
- i.  $\int \frac{\sin(3\theta) d\theta}{\cos^2(\cos(3\theta))}$
- j.  $\int x e^{x^2} dx$
- k.  $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$
- l.  $\int x^2 \sqrt{x^3+2} dx$
- m.  $\int 3x \sqrt{1-2x^2} dx$
- n.  $\int \frac{8x^2}{x^3+2} dx$
- o.  $\int \frac{\tan(4x)}{\cos(4x)} dx$
- p.  $\int \frac{x+2}{x+1} dx$
- q.  $\int \cos^3(\theta) d\theta$  (rappelez-vous que  $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ )

Les questions o, p et q nécessitent une opération préalable.

### 7.3. Intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un **produit de fonctions** en d'autres intégrales, afin de simplifier le calcul.

Rappelons-nous :

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

En intégrant, on obtient :

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

D'où la règle d'intégration par parties :

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$



#### Utilité de la formule d'intégration par parties

La formule de l'intégration par parties ne résout que partiellement le problème que nous nous sommes posé. Analysons-la : elle s'applique à un produit de fonctions dont nous devons pouvoir dériver l'une ( $f \rightarrow f'$ ) et intégrer l'autre ( $g' \rightarrow g$ ). Mais son point faible réside dans le fait qu'elle ramène l'intégrale d'un produit ( $f \cdot g$ ) à l'intégrale d'un autre produit ( $f' \cdot g$ ).

**Son utilisation n'a donc de sens que si le calcul de la deuxième intégrale est plus simple que celui de la première.**

#### Exemple 3 $\int x e^x dx = ?$

Les deux facteurs peuvent très facilement être dérivés et intégrés. Comme la dérivée de  $x$  est 1, on va poser :

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g'(x) = e^x$$

d'où :  $f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = e^x (+C)$

et nous trouvons :  $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$ .

La nouvelle intégrale (celle à droite du « = ») est facile à résoudre :  $\int e^x dx = e^x$

Donc, finalement :  $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

Vérifions le résultat en dérivant :  $((x-1) \cdot e^x)' = (x-1) \cdot e^x + e^x = x \cdot e^x$

#### Remarque

Lors d'une résolution en utilisant cette technique, il arrive que l'on doive intégrer par parties **plusieurs fois**.

**Exercice 7.5**

Trouvez les primitives suivantes, en intégrant par parties :

- |                                   |                            |                               |
|-----------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a. $\int x \cos(x) dx$            | b. $\int \frac{x}{e^x} dx$ | c. $\int x^3 \ln 4x  dx$      |
| d. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ | e. $\int 2x \sin(3x) dx$   | f. $\int \frac{\ln x }{x} dx$ |
| g. $\int t^2 e^t dt$              | h. $\int x^2 \sin(x) dx$   | i. $\int e^x(x^2+x+1) dx$     |
| j. $\int e^{-x} \sin(x) dx$       |                            |                               |

**7.4. Comment choisir une méthode d'intégration ?**

Lorsqu'on n'a pas l'habitude des techniques d'intégration, on peut se retrouver perdu devant chaque énoncé, ne sachant pas quelle technique utiliser.

Voici quelques questions à vous poser, dans l'ordre, pour trouver facilement une méthode d'intégration.



1. Y a-t-il dans le **formulaire** une formule applicable directement ?
2. Peut-on **simplifier l'intégrale en un (pseudo-)polynôme**  $ax^n + bx^{n-1} + \dots$  ? Si oui, alors on peut intégrer séparément chaque terme de la somme avec la formule  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ .
3. Peut-on trouver un **changement de variable** (simple) ? Ce sera le cas si on voit une expression et sa dérivée à une constante près (voir l'exemple 1 p. 48). Si oui, on intègre par substitution.
4. Peut-on **intégrer par parties** ? Cette méthode s'utilise quand on retrouve certaines multiplications de fonctions, comme polynôme fois exponentielle, polynôme fois trigonométrique, exponentielle fois trigonométrique, etc.
5. Peut-on faire une **opération préalable** qui simplifie le problème ? Voir l'exercice 7.4 (o, p et q).

 cymath

 WolframAlpha

Il faut savoir qu'il existe d'autres techniques plus spécifiques que l'on n'a pas vues ici, et aussi que parfois, on n'arrive pas à calculer une primitive...

Signalons enfin qu'il existe des outils informatiques qui calculent les primitives (on est au 21<sup>ème</sup> siècle), comme *Wolfram Alpha* ou *cymath*, ainsi que certaines calculatrices.

**Exercice 7.6\***

Trouvez les primitives suivantes :

- |  |   |
|--|---|
| a. $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1} dx$ | b. $\int x \ln(x) dx$                                     |
| c. $\int \ln^2(x) dx$                    | d. $\int \frac{x}{(x-1)^3} dx$                            |
| e. $\int \frac{1}{x^2-16} dx$            | f. $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$ (posez $u = \frac{x}{2}$ ) |
| g. $\int \tan(x) dx$                     | h. $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx$                  |
- i. Trouvez une primitive de  $x(2+x^2)$  de trois manières différentes.

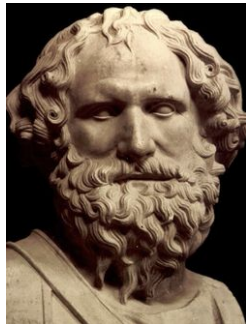
Trouvez les primitives **f** et **g** par calculs, sans consulter votre formulaire !

**7.5. Ce qu'il faut absolument savoir**

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| Savoir ce qu'est une primitive                       | <input type="checkbox"/> ok |
| Trouver une primitive par la méthode de substitution | <input type="checkbox"/> ok |
| Intégrer par partie                                  | <input type="checkbox"/> ok |

# 8. Intégrales

## 8.1. Un peu d'histoire



Archimède de Syracuse  
(287 – 212 av. J.-C.)

Les calculs d'aire de figures géométriques simples comme les rectangles, les polygones et les cercles sont décrits dans les plus anciens documents mathématiques connus. La première réelle avancée au-delà de ce niveau élémentaire a été faite par **Archimède**, le génial savant grec. Grâce à la technique d'Archimède, on pouvait calculer des aires bornées par des paraboles et des spirales. Au début du 18<sup>ème</sup> siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité. La découverte majeure de la résolution générale du problème d'aire fut faite indépendamment par **Newton** et **Leibniz** (voir le chapitre 3) lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en inversant le processus de différentiation. Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par **Newton** en 1669 et ensuite publiée en 1711 dans un article intitulé *De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*. Indépendamment, **Leibniz** découvrit le même résultat aux environs de 1673 et le formula dans un manuscrit non publié daté du 11 novembre 1675.

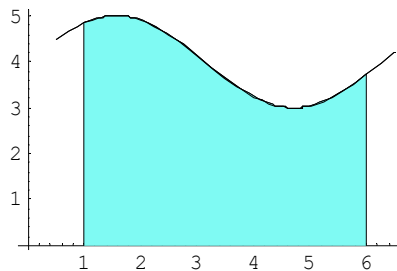
## 8.2. Calcul de l'aire entre une courbe et l'axe des x

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le deuxième problème majeur de l'analyse (le premier problème était de trouver la tangente à une courbe qui nous a conduit à la découverte des dérivées) :

### Le problème du calcul d'aire

Soit une fonction  $f$  continue et non négative sur un intervalle  $[a, b]$ .  
Trouver l'aire entre le graphe de  $f$  et l'abscisse dans l'intervalle  $[a, b]$ .

Que vaut l'aire sous la courbe  
 $y = 4 + \sin(x)$  entre 1 et 6  
(voir dessin ci-contre) ?



Georg Friedrich Bernhard  
**Riemann**  
(1826 - 1866)

L'idée est de subdiviser l'intervalle  $[a, b]$  en plusieurs sous-intervalles de même largeur  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , avec  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ .

La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle  $[a, b]$  divisé par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire : de  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

Pour chaque  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , on dessine un rectangle ayant comme base le segment  $x_i x_{i+1}$  et comme hauteur  $f(x_i)$  (voir dessins page suivante).

Ainsi, l'aire du  $i^{\text{ème}}$  rectangle (hauteur  $\times$  largeur) est :

$$f(x_i) \times \Delta x$$

L'aire totale des  $n$  rectangles est :

$$A(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

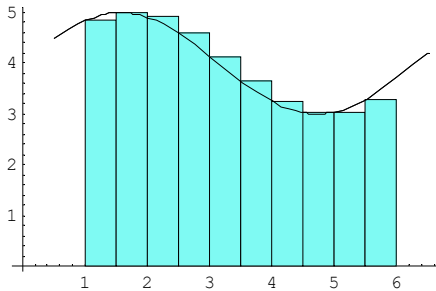
**Note :** cette somme est appelée  
**somme de Riemann.**

Lorsque le nombre  $n$  de sous-intervalles augmente, la largeur de chaque sous-intervalle diminue et l'approximation de l'aire sous la courbe devient plus précise. À la limite, nous obtenons l'expression exacte pour l'aire  $A$  :

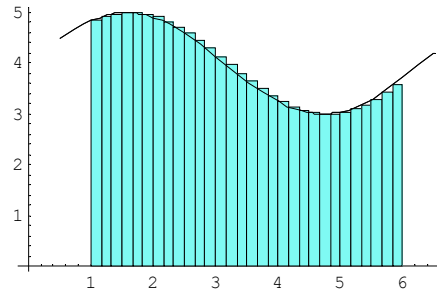
**Rappel**

$$\sum_{i=0}^3 x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$$

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



Approximation avec 10 rectangles : aire = 19.8691

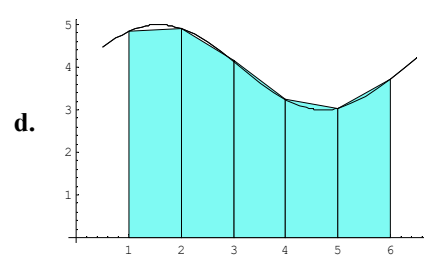
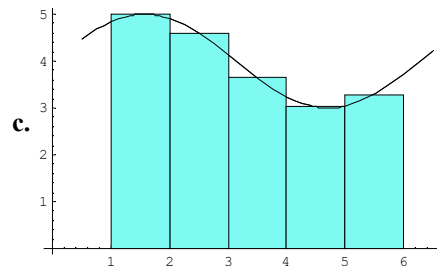
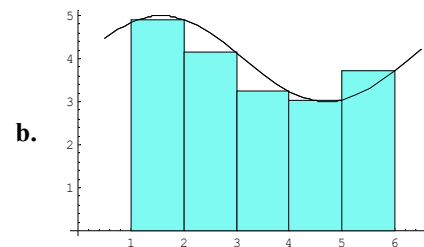
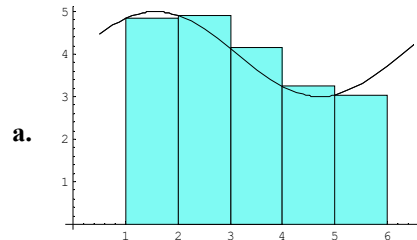


Approximation avec 30 rectangles : aire = 19.6745

**Exercice 8.1**

Voici quatre manières d'approcher l'aire sous la courbe de  $y = 4 + \sin(x)$ . Les trois premières utilisent cinq rectangles, la quatrième cinq trapèzes. Calculez ces approximations.

L'aire exacte est 19.5801.



**8.3. Définition de l'intégrale définie**

D'une manière générale, et indépendamment du calcul d'aire, la quantité

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

(si la limite existe) est appelée **intégrale définie** de la fonction  $f(x)$  de  $a$  à  $b$ . Elle est notée

**Note importante**

$$\int_a^b f(x) dx \text{ est un } \text{nombre.}$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Les nombres  $a$  et  $b$  sont appelés **bornes d'intégration** et  $x$  **variable d'intégration**.

«  $dx$  » est un symbole insécable (on ne peut pas séparer le  $d$  du  $x$ ). Il indique que l'on intègre sur  $x$ . Il se place toujours en dernière position et marque la fin de l'intégrale.

### 8.4. Le théorème fondamental du calcul intégral

L'usage de la définition de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f(x_i)$$

se révèle être très peu pratique car demandant des calculs longs et parfois difficiles. Cependant, pour certaines fonctions (pas toutes), il existe une alternative plus simple. Il se trouve qu'il y a une relation entre intégration et différenciation. Cette relation s'appelle le *théorème fondamental du calcul intégral*.

**Théorème fondamental du calcul intégral**



Soit une fonction  $f$  continue définie sur l'intervalle  $[a, b]$ . Alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

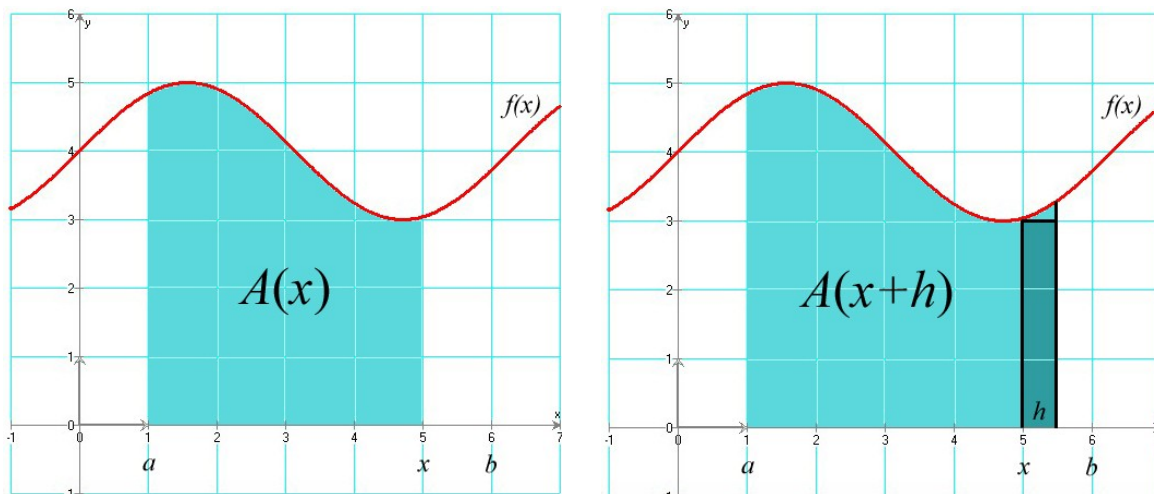
où  $F(x)$  est une fonction telle que  $F'(x) = f(x)$ .

$F(x)$  est la primitive de  $f(x)$  et on écrit  $F(x) = \int f(x) dx$ .

**Preuve du théorème** Pour simplifier, nous allons prouver le théorème pour une fonction  $f$  positive sur l'intervalle  $[a, b]$ . Le cas général est similaire.

Pour tout nombre réel  $x$  compris entre  $a$  et  $b$ , notons  $A(x)$  l'aire bornée par la courbe, l'abscisse, la droite verticale passant par  $a$  et celle passant par  $x$ . Ceci définit une fonction  $A(x)$ .

Considérons le changement de la valeur  $A(x)$  quand  $x$  augmente d'une petite quantité  $h$ .



Si  $h$  est suffisamment petit, la différence entre  $A(x)$  et  $A(x+h)$  est approximativement égale à l'aire du rectangle de largeur  $h$  et de hauteur  $f(x)$ , donc d'aire  $h \cdot f(x)$ . Ainsi :

$$A(x+h) - A(x) \approx h \cdot f(x)$$

En divisant par  $h$ , on obtient :

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$$

Plus  $h$  sera petit, plus petite sera l'erreur de l'approximation ci-dessus. À la limite, nous aurons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

En d'autres termes,  $A(x)$  est la primitive de  $f(x)$  (les Anglo-Saxons disent volontiers *antidérivée* ou encore *intégrale indéfinie*).

Cette limite n'est rien d'autre que la dérivée  $A'(x)$  de la fonction  $A(x)$ . Nous avons donc montré que :

$$A'(x) = f(x)$$

Supposons maintenant que  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ . Ainsi :

$$F'(x) = f(x) = A'(x)$$

Donc

$$F'(x) - A'(x) = [F-A]'(x) = 0$$

Cela signifie que la fonction  $F-A$  est constante sur l'intervalle  $[a, b]$  (car sa dérivée est nulle). On peut donc écrire que  $[F-A](x) = F(x) - A(x) = C$ .

En passant  $A(x)$  à droite, on a :

$$F(x) = A(x) + C$$

Comme  $A(a) = 0$ , nous pouvons déterminer  $C$  en posant  $x = a$  :

$$F(a) = 0 + C$$

Ainsi, comme  $C = F(a)$  :

$$F(x) = A(x) + F(a) \quad \text{ou} \quad A(x) = F(x) - F(a)$$

Il s'ensuit que

$$\int_a^b f(x) dx = A(b) = F(b) - F(a) \quad \text{Q.E.D.}$$

**Exemple 1** Reprenons notre exemple de départ, à savoir calculer l'aire sous la courbe de la fonction  $f(x) = 4 + \sin(x)$ , dans l'intervalle  $[1, 6]$ .

Une primitive possible de  $f(x)$  est  $F(x) = 4x - \cos(x)$ . On peut le vérifier aisément en **dérivant**  $F(x)$ .

Donc, d'après le *théorème fondamental du calcul intégral* :

**Attention !**

Il faut toujours travailler en radians !

$$\int_1^6 (4 + \sin x) dx = \underbrace{24 - \cos(6)}_{F(6)} - \underbrace{(4 - \cos(1))}_{F(1)} = 19.580132$$

## 8.5. Retour au problème du calcul d'aire

### Exercice 8.2

Nous avons introduit la notion d'intégrale à partir du problème du calcul d'aire sous une courbe (voir § 8.2). Ce problème avait une restriction : la fonction  $f$  devait être positive dans l'intervalle  $[a, b]$ . Que se passe-t-il si ce n'est pas le cas ? Pour le découvrir, calculez successivement les intégrales définies ci-dessous :



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx =$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x) dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx =$$

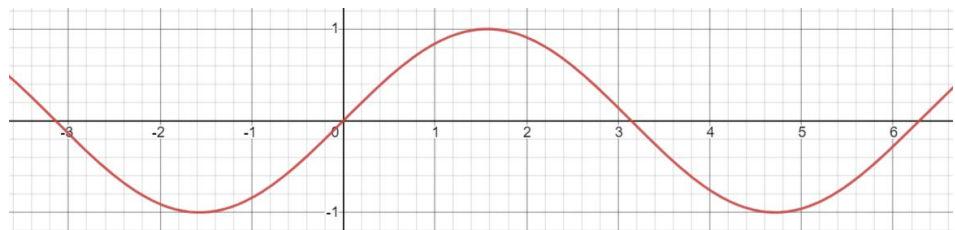
$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx =$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx =$$

$$\int_{-\pi}^0 \sin(x) dx =$$

Que constatez-vous d'étrange et comment l'expliquez-vous ?

Voici, pour rappel, le graphe de  $\sin(x)$  dans l'intervalle  $[-\pi, 2\pi]$  :



## 8.6. Calcul de l'intégrale définie

### Propriétés de l'intégrale définie

Comme vous avez pu le constater au § 8.5, l'intégrale définie représente l'**aire signée** comprise entre la courbe et l'axe  $Ox$  dans un intervalle donné. Cela signifie que l'aire est comptée négativement quand la fonction est négative. Cette constatation aide à comprendre les propriétés ci-contre.

$$(1) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$(2) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (\text{idem pour « - »})$$

$$(3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$(5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{avec } a \leq c \leq b)$$

$$(6) \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{si } f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } [a, b]$$

S'il est impossible de trouver une primitive, on peut toujours approcher numériquement le résultat par la somme des rectangles définis au § 7.2.

Chaque fois que c'est possible, le calcul de l'intégrale définie entre les bornes  $a$  et  $b$  se fait en deux temps. Premièrement, trouver une primitive  $F(x)$  de la fonction  $f(x)$  à intégrer ; deuxièmement calculer  $F(b) - F(a)$ .

Comme exemple, calculons  $\int_{-1}^3 x(2+x^2) dx$ .

Étape 1 :  $F(x) = \int x(2+x^2) dx = \int (2x+x^3) dx = x^2 + \frac{x^4}{4} + C$

Étape 2 :  $\int_{-1}^3 x(2+x^2) dx = F(3) - F(-1) = (3^2 + \frac{3^4}{4}) - ((-1)^2 + \frac{(-1)^4}{4}) = 28$

### Exercice 8.3

Calculez les intégrales définies ci-dessous :

a.  $\int_2^3 x^3 dx$

b.  $\int_{-1}^2 x(1+x^3) dx$

c.  $\int_1^2 (t^2 - 2t + 8) dt$

d.  $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

e.  $\int_1^2 (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + x^{-4}) dx$

f.  $\int_1^9 \sqrt{x} dx$

g.  $\int_4^9 2y\sqrt{y} dy$

h.  $\int_1^4 (\frac{3}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} - x^{-\frac{3}{2}}) dx$

i.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx$

j.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (x + \frac{2}{\sin^2(x)}) dx$

k.  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx$

l.  $\int_0^{\pi} x^2 \cos(x) dx$



### Exercice 8.4

Pour toutes les questions ci-contre, il est vivement recommandé de faire une esquisse.

a. Calculez l'aire sous la courbe  $y = x^2 + 1$  dans l'intervalle  $[0, 3]$ .

b. Calculez l'aire au-dessus de l'axe  $Ox$  mais en dessous de la courbe  $y = (1-x)(x-2)$ .

c. Calculez l'aire du domaine borné par la courbe de la fonction  $f(x) = \frac{1}{2} + \sin(x)$  et l'abscisse sur une période.

d. Calculez l'aire du domaine borné par la courbe  $y = x^3 - 5x^2 + 6x$  et l'abscisse dans l'intervalle  $[0, 3]$ .

### Exercice 8.5

a. Calculez  $\int_0^2 |2x-3| dx$

b. Calculez  $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos(x)| dx$

## 8.7. Théorème de la moyenne (du calcul intégral)



Pour toute fonction  $f$  à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle  $[a, b]$ , il existe un réel  $c$  dans l'intervalle  $]a, b[$  vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Le nombre  $f(c)$  est appelé la **valeur moyenne** de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Démonstration** Le théorème de la moyenne est une reformulation du théorème des accroissements finis (voir p. 22). En effet, si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors le théorème des accroissements finis pour  $F$  affirme qu'il existe au moins un réel  $c$  strictement compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ .

Comme  $F' = f$  et  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ , on a bien que  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

### Exercice 8.6

Soit la fonction  $f(x) = 4x - x^2$ .

- Trouvez la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 3]$ .
- Trouvez une valeur  $c$  dans l'intervalle  $[0, 3]$  où  $f$  atteint sa valeur moyenne.
- Dessinez le graphe de  $f$  et superposez un rectangle dont l'aire est précisément égale à l'intégrale de  $f$  entre 0 et 3.

### Exercice 8.7

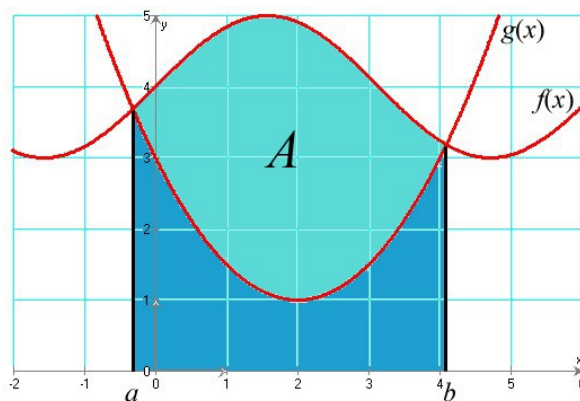
Dans une ville, la température (en °C)  $t$  heures après 9 h est approximativement donnée par la fonction :

$$T(t) = \frac{80}{9} + \frac{70}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

Quelle est la température moyenne entre 9 h et 21 h ?

## 8.8. Aire entre deux courbes

**Problème** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues dans l'intervalle  $[a, b]$  telles que  $f(x) \geq g(x)$ , pour  $a \leq x \leq b$ . Calculer l'aire  $A$  du domaine délimité par ces deux courbes.



**Solution** Si  $g$  est positive ( $g \geq 0$ ) dans l'intervalle  $[a, b]$ , alors

$$A = \text{« aire sous } f \text{ »} - \text{« aire sous } g \text{ »}$$

donc

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



**Solution**  
**(méthode des disques)**

L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire sous une courbe. On va découper l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles de même largeur  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , avec  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ .

La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle  $[a, b]$  divisé par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Pour chaque  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , on dessine un rectangle ayant comme base le segment  $x_i x_{i+1}$  et comme hauteur  $f(x_i)$ .

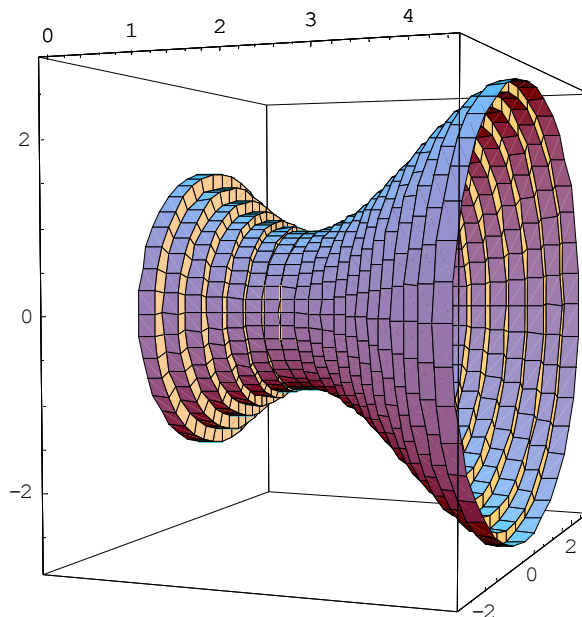
Lorsqu'ils tourneront autour de l'axe  $Ox$ , chacun de ces rectangles va définir un cylindre très fin (presque un disque) de volume  $\pi \cdot [f(x_i)]^2 \Delta x$ .

Le volume du corps de révolution sera la somme de tous ces cylindres :

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot [f(x_i)]^2 \Delta x$$

qui n'est rien d'autre que l'intégrale définie :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Volume de révolution approché par une série de cylindres

**Exercice 8.9**

Calculez le volume des solides générés par la révolution autour de l'axe  $Ox$  des courbes suivantes et donnez le nom (quand ils en ont un) de ces solides :

Il existe des formules pour calculer les volumes **a** à **e**. (à vous de les trouver...). Vérifiez que les volumes obtenus avec ces formules sont les mêmes que ceux obtenus par intégration.

- $y = 4, \quad -1 \leq x \leq 3$
- $y = 3x, \quad 0 \leq x \leq 2$
- $y = x + 1, \quad 0 \leq x \leq 3$
- $y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R$
- $y = \sqrt{3-x}, \quad x \geq -1$
- $y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$
- Donnez la formule permettant de trouver le volume engendré par une révolution autour de l'axe  $Oy$ , puis calculez le volume du solide généré par la révolution autour de l'axe  $Oy$  de la courbe :  $y = x^3, 0 \leq y \leq 1$ .
- Trouvez le volume du corps engendré par la révolution autour de l'axe  $Oy$  de la courbe  $x = \sqrt{1+y}, y \leq 3$ .

## 8.10. Mouvement rectiligne

### Remarque

Dans ce paragraphe, nous supposons que tous les mouvements se font sur une ligne droite.



Pour introduire les dérivées, nous avons parlé du problème de calculer la vitesse instantanée d'un mobile connaissant son horaire  $s(t)$ . Nous avons vu que la vitesse  $v(t)$  est la dérivée de l'horaire et l'accélération  $a(t)$  la dérivée de la vitesse :

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Inversement, on déduit que l'horaire est la primitive de la vitesse et que la vitesse est la primitive de l'accélération :

$$s(t) = \int v(t) dt \quad \text{et} \quad v(t) = \int a(t) dt$$

Ainsi, si la fonction vitesse d'un mobile est connue, on peut trouver sa position à condition d'avoir suffisamment d'informations pour déterminer la constante d'intégration.

**Exemple 2** Trouvez la fonction horaire d'une particule se déplaçant avec une vitesse  $v(t) = \cos(\pi t)$  le long d'une ligne droite, en sachant qu'en  $t = 0$ ,  $s = 4$ .

La fonction horaire est  $s(t) = \int v(t) dt = \int \cos(\pi t) dt = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) + C$ .

Comme  $s = 4$  quand  $t = 0$ , il suit que  $4 = s(0) = \frac{1}{\pi} \sin(0) + C = C$ .

Ainsi,  $s(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) + 4$ .

### Déplacement et distance parcourue



Le changement de position, ou **déplacement**, du mobile dans un laps de temps  $[t_1, t_2]$  est donné par la formule :

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = s(t_2) - s(t_1)$$

La **distance parcourue** par le mobile dans ce même laps de temps peut être différente du déplacement. Elle est donnée par la formule :

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$$

### Exercice 8.10

Donnez la fonction horaire  $s(t)$  d'un mobile sachant que

- a.  $v(t) = t^3 - 2t^2 + 1$  ;  $s(0) = 1$
- b.  $a(t) = 4$  ;  $v(0) = 1$  ;  $s(0) = 0$
- c.  $a(t) = 4\cos(2t)$  ;  $v(0) = -1$  ;  $s(0) = -3$

d. Trouvez la position, la vitesse et l'accélération en  $t = 1$ , si  $v(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$  et sachant que  $s = 0$  quand  $t = 0$ .

Donnez le déplacement et la distance parcourue par une particule le long d'une droite sachant que

- e.  $v(t) = t^2 + t - 2$  ;  $0 \leq t \leq 2$
- f.  $a(t) = t - 2$  ;  $v(0) = 0$  ;  $1 \leq t \leq 5$
- g.  $a(t) = \frac{1}{\sqrt{5t+1}}$  ;  $v(0) = 2$  ;  $0 \leq t \leq 3$

h. Sachant qu'un mobile en chute libre dans le vide subit une accélération  $a(t) = -g$ , trouvez les formules de la vitesse  $v(t)$  et de l'horaire  $s(t)$ .



## 8.11. Application au traitement d'images

### Exercice 8.11

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris.

Chaque nuance est codée par un réel de la façon suivante :

- $x = 0$  pour le blanc ;
- $x = 1$  pour le noir ;
- $x = 0.01, x = 0.02$  et ainsi de suite jusqu'à 0.99 par pas de 0.01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

L'image A ci-contre est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ». Elles sont définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  et possèdent les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$  ;
- $f(1) = 1$  ;
- $f$  est continue sur l'intervalle  $[0, 1]$  ;
- $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

Une nuance codée  $x$  est assombrie par la fonction  $f$  si  $f(x) > x$ , et éclaircie si  $f(x) < x$ . Ainsi, si  $f(x) = x^2$ , un pixel de nuance codée 0.2 prendra la nuance codée  $0.2^2 = 0.04$ . L'image A sera transformée en l'image B. On voit que l'image B est plus claire que A. Si  $f(x) = \sqrt{x}$ , la nuance codée 0.2 prendra la nuance codée  $\sqrt{0.2} \cong 0.45$ . L'image A sera transformée en l'image C. L'image C est plus sombre que A.

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$$

$$g(x) = \ln(1 + (e-1)x).$$

a. Démontrez que ces fonctions sont des fonctions de retouche.

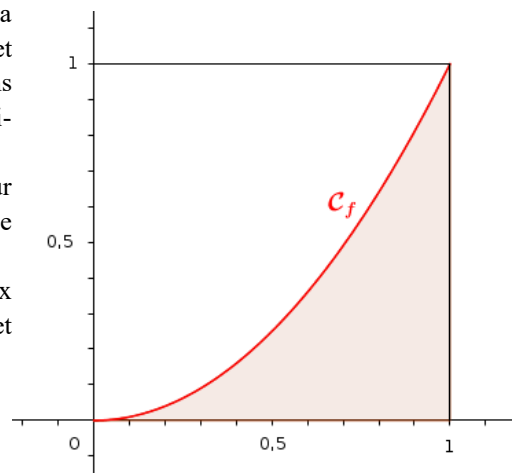
On s'intéresse à des fonctions de retouche  $f$  dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $f(x) \leq x$ . On mesurera l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire  $A_f$  de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction  $f$ , et les droites verticales d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$  (voir figure ci-contre).

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire.

On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f(x) = x e^{(x^2-1)}$$

$$g(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$$



b. Laquelle de ces deux fonctions a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

## 8.12\*. Intégrales impropres

Une intégrale définie est dite **impropre** (ou **généralisée**) dans deux cas :

1. une ou les deux bornes sont à l'infini
- ou 2. la fonction n'est pas continue dans l'intervalle d'intégration.

### Premier cas

Si la fonction  $f$  est continue dans l'intervalle d'intégration, on définit :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Dans les deux cas, si la limite existe et n'est pas infinie, on dit que l'intégrale **converge**. Autrement, elle **diverge**.

De plus,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

**Exemple 3**  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = ?$

On a :  $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C = F(x)$

D'où :  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{b}\right)}_0 - (-1) = 1$

Cette intégrale converge vers 1.

**Exemple 4**  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = ?$

On a :  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = F(x)$

D'où :  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\ln(b)}_{+\infty} - \underbrace{\ln(1)}_0 = +\infty$

Cette intégrale diverge.

### Second cas

Si la fonction  $f$  n'est pas définie en  $c$  dans l'intervalle  $[a, b]$  ( $c$  peut être une des bornes d'intégration), alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow c \\ \lambda < c}} \int_a^\lambda f(x) dx + \lim_{\substack{\lambda \rightarrow c \\ \lambda > c}} \int_\lambda^b f(x) dx$$

**Exemple 5**  $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda < 1}} \int_0^\lambda \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda > 1}} \int_\lambda^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = ?$

On a :  $\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C = F(x)$

Calcul de la première limite :  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda < 1}} \int_0^\lambda \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda < 1}} \left(-\frac{1}{\lambda-1} - 1\right) = +\infty$

Calcul de la seconde limite :  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda > 1}} \int_\lambda^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda > 1}} \left(-1 + \frac{1}{\lambda-1}\right) = +\infty$

Cette intégrale diverge. Si on avait appliqué naïvement la formule sans prendre de précaution, on aurait trouvé  $F(2) - F(0) = -1 - 1 = -2$ . Résultat aberrant puisque  $f$  n'est jamais négative : l'intégrale définie ne peut pas être négative non plus !

**Exercice 8.12\***

Calculez les intégrales impropres ci-dessous :

a.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

b.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

c.  $\int_4^{+\infty} \frac{2}{x^2-1} dx$

d.  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$

e.  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$

f.  $\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx$

g.  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$

h.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2} dx$

i.  $\int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$

j.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx$

k.  $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$

l.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}} dx$

**Exercice 8.13\***

La *Trompette de Gabriel* est une figure inventée par Evangelista **Torricelli** (1608-1647). Le nom fait allusion à la tradition d'identifier l'archange Gabriel à l'ange qui souffle dans la trompette pour annoncer le Jour du jugement.

La trompette de Gabriel est engendrée par une portion d'hyperbole d'équation  $y = \frac{1}{x}$  tracée dans l'intervalle  $[1, +\infty[$  tournant autour de l'axe Ox.



Extrémité gauche de la Trompette de Gabriel

Son aire est donnée par la formule  $A = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx = +\infty$ .

Calculez son volume.

Qu'un solide de longueur infinie puisse posséder un volume fini semble contre-intuitif aux mathématiciens de l'époque et suscite de nombreuses correspondances sur le sujet du fini et de l'infini. **Cavalieri** s'en étonne, et **Roberval** met d'abord en doute le résultat de **Torricelli**. Ce résultat déstabilise **Descartes** dans ses convictions sur l'infini et suscite un débat entre **Hobbes** et **Wallis**.

Ce solide présente aussi un second paradoxe apparent puisque sa surface est infinie. Il suffit donc d'un volume fini pour en remplir son intérieur alors qu'il faudrait une quantité infinie de peinture pour en couvrir seulement la surface. Ce paradoxe montre les limites de l'association surface = quantité de peinture nécessaire pour la peindre. En effet, la quantité de peinture suppose que la surface soit peinte sur une épaisseur  $h$ . Lorsque l'on peint l'intérieur de la trompette, il arrive un moment où le rayon intérieur devient inférieur à  $h$ . Alors on s'arrête de peindre tandis que la surface continue à se déployer indéfiniment.

### 8.13. Ce qu'il faut absolument savoir

Comprendre comment calculer une aire avec une somme de rectangles ou de trapèzes

ok

Connaître le théorème fondamental de l'analyse et savoir le démontrer

ok

Calculer une intégrale définie

ok

Calculer l'aire comprise entre une courbe et l'axe des  $x$

ok

Connaître le théorème de la moyenne

ok

Calculer l'aire entre deux courbes

ok

Calculer le volume d'un solide de révolution autour d'un des axes

ok

Trouver les valeurs de la constante  $C$  d'après les données initiales

ok

# 9. Équations différentielles

## 9.1. Introduction

En 1638, Debeaune et Galilée proposent les premiers problèmes dont la solution sera effectuée à l'aide d'équations différentielles.

Une **équation différentielle** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'**ordre** d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Ainsi, une équation différentielle d'ordre  $n$  est une équation de la forme

$$R(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0.$$

Toute fonction qui vérifie, pour tout  $x$ , l'équation  $R(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$  est une solution de cette équation.

Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des fonctions qui en sont solutions.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées et en physique.

### Exemples

- $xy' - y = 0$  est une équation différentielle du premier ordre.  
L'une des solutions est donnée par  $y = x$ . L'ensemble des solutions est donné par l'ensemble des fonctions de la forme  $y = \lambda x$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- $y'' + 4y = 0$  est une équation différentielle d'ordre 2.  
L'une des solutions est donnée par  $y = \sin(2x)$ , une autre par  $\cos(2x)$ . Les solutions de cette équation sont de la forme  $y = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
- $y''' + y' - 2e^x = 0$  est une équation différentielle d'ordre 3.  
La fonction  $y = e^x$  est solution de cette équation.

### Exercice 9.1

Trouvez des équations différentielles qui ont pour solution générale les fonctions  $y = f(x)$  données ci-dessous,  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  étant des constantes.

- |  |   |
|--|---|
| a. $y = \alpha x$                      | b. $y = \alpha e^x$                     |
| c. $y = \sin(x + \alpha)$              | d. $y = \frac{1}{2} \alpha x^2 + \beta$ |
| e. $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ |   |

## 9.2. L'équation $y' = f(x)$

Une équation différentielle d'ordre 1

$$R(x; y; y') = 0$$

admet, sous certaines conditions, une solution qui dépend d'une constante réelle arbitraire (constante d'intégration). Pour caractériser l'une des fonctions  $f$ , solution de  $R(x; y; y') = 0$ , il faut se donner une **condition initiale**.

### Méthode de résolution

Soit l'équation  $y' = f(x)$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors la solution générale de l'équation proposée est donnée par  $y = F(x) + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Exemple**  $y' = \cos(2x)$  admet comme solution générale  $y = \frac{1}{2} \sin(2x) + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 9.2**

Résolvez les équations suivantes :

a.  $y' = 0$

b.  $y' + 2x = 0$

c.  $y' = \sin(x)\cos(x)$

d.  $y' = \frac{1}{1+x^2}$

e.  $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f.  $y' = \frac{x-1}{x+1}$

**9.3. L'équation à variables séparables  $y' \cdot g(y) = h(x)$** **Méthode de résolution**

Une équation différentielle du type  $y' \cdot g(y) = h(x)$  est dite « à variables séparables ». Si  $G$  et  $H$  sont des primitives respectives de  $g$  et  $h$ , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Exemple** L'équation  $(x-1)y' - 2y = 0$  peut se ramener à

$$y' \frac{1}{y} = \frac{2}{x-1} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} \frac{1}{y} = \frac{2}{x-1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x-1} dx$$

à condition d'écarter provisoirement la solution  $y = 0$ . En intégrant, on obtient :

$$\ln|y| - \underbrace{\ln|\alpha|}_c = 2 \ln|x-1|, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

c'est-à-dire  $\ln\left|\frac{y}{\alpha}\right| = \ln(x-1)^2$ , d'où la solution  $y = \alpha(x-1)^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 9.3**

Résolvez les équations suivantes :

a.  $y' \sin(x) = y \cos(x)$

b.  $y^2 + (x+1)y' = 0$

c.  $xy' - ky = 0, \quad k \in \mathbb{R}^*$

d.  $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$

e.  $x^2y' + y = 3$

f.  $yy' = x$

g.  $y' - xe^{-y} = 0$

h.  $y = \ln(y')$

**9.4. L'équation homogène  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$** **Méthode de résolution**

Pour résoudre l'équation  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ , on pose  $\frac{y}{x} = z$  ( $y = xz$  et  $y' = z + xz'$ ) : on obtient ainsi une équation différentielle à variables séparables.

**Exemple**  $xy' = x + y$  est une équation homogène, car elle peut s'écrire :  $y' = 1 + \frac{y}{x}$ .

$y$  et  $z$  sont des fonctions de  $x$

En posant  $y = xz$ , on obtient l'équation  $z + xz' = 1 + z$ , d'où  $z' = \frac{1}{x}$ .

Sa solution générale est  $z = \ln|x| + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

D'où la solution générale de l'équation proposée :  $y = x(\ln|x| + \alpha)$

**Exercice 9.4**

Résolvez les équations suivantes :

a.  $xy' = x - y$

b.  $xy^2y' = x^3 + y^3$

c.  $x - y + xy' = 0$

d\*.  $(x^2 - y^2)y' = xy$

## 9.5. L'équation linéaire $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

**Méthode de résolution** Soit l'équation à résoudre  $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ .

1. Calculer  $\mu = e^{\int p(x) dx}$ .  $\mu$  est appelé **facteur d'intégration**.
2. Poser  $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x)$ .
3. Intégrer les deux côtés de l'équation obtenue en 2 et résoudre pour  $y$ .

**Exemple** Résoudre  $y' - 4xy = x$ .

Comme  $p(x) = -4x$ , le facteur d'intégration vaut  $\mu = e^{\int -4x dx} = e^{-2x^2}$ .

On pose  $\frac{d}{dx}(e^{-2x^2} y) = x e^{-2x^2}$ .

On intègre :  $e^{-2x^2} y = \int x e^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x^2} + C$

D'où l'on tire :  $y = -\frac{1}{4} + C e^{2x^2}$

**Remarque**

Cette équation aurait aussi pu se résoudre par séparation des variables.

### Exercice 9.5

Résolvez les équations suivantes :

- |                                |                                       |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| a. $y' + y \tan(x) = \sin(2x)$ | b. $x^2 y' + y = 1$                   |
| c. $y' - x^3 = xy$             | d. $y' \sin(x) - y \cos(x) = \cot(x)$ |
| e. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3$    | f. $xy' - y = \ln(x)$                 |

### Exercice 9.6

Résolvez les équations suivantes avec les conditions initiales indiquées :

- |  |   |
|--|---|
| a. $xy' - 2y = 2 - x$ , $y(0.5) = 0$                         | b. $2xy' + y = 1$ , $y(1) = 2$              |
| c. $xy' + y = x \cos(x)$ , $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ | d. $y' + y = e^{-x}$ , $y(0) = 0$           |
| e. $y' = y + 3x + 2$ , $y(0) = -3$                           | f. $xy' + 3y = -\frac{2}{x}$ , $y(-1) = -3$ |

## 9.6. Applications des équations différentielles d'ordre 1

### Géométrie

Trouver une courbe du plan passant par le point  $(0 ; 3)$  et dont la pente de la tangente au point  $(x ; y)$  est de  $\frac{2x}{y^2}$ .

On a  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$  et la condition initiale  $y(0) = 3$ .

On doit résoudre l'équation différentielle à variables séparables :  $y^2 dy = 2x dx$ .

D'où :  $\int y^2 dy = \int 2x dx \Rightarrow \frac{1}{3} y^3 = x^2 + C$ .

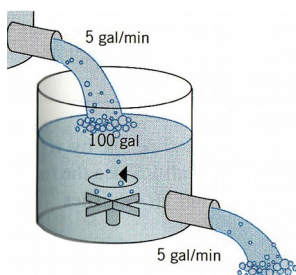
De la condition initiale, on déduit que  $C = 9$ . La courbe est donc  $y = \sqrt[3]{3x^2 + 27}$ .

### Exercice 9.7

Trouvez une courbe du plan passant par le point indiqué et dont la pente de la tangente au point  $(x; y)$  est également donnée.

- a.  $(1 ; -1)$ ; pente =  $\frac{y^2}{3\sqrt{x}}$
- b.  $(2 ; 0)$ ; pente =  $x e^y$

## Mélanges



1 lb = 1 livre = 453,6 grammes

1 gal = 1 gallon = 3.8 litres  
(USA) ou 4.5 litres (GB)

Au temps  $t = 0$ , un réservoir contient 4 lb de sel dissous dans 100 gal d'eau. Supposons qu'une saumure contenant 2 lb de sel par gallon d'eau s'écoule dans le réservoir à un débit de 5 gal/min et que la solution obtenue s'échappe du réservoir aussi avec un débit de 5 gal/min. La solution est conservée uniforme par un mélangeur. Quelle est la quantité de sel dans le réservoir après 10 min ( $t = 10$ ) ?

Soit  $y(t)$  la quantité de sel (en livres) au temps  $t$ . Commençons par trouver une expression de  $\frac{dy}{dt}$ , la vitesse de variation de la quantité de sel au temps  $t$ .

10 lb de sel pénètrent chaque minute dans le réservoir, et  $\frac{5}{100}y(t)$  en sortent.

On a donc  $\frac{dy}{dt} = 10 - \frac{y(t)}{20}$ .

$\frac{dy}{dt} + \frac{y(t)}{20} = 10$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On a aussi la condition initiale  $y(0) = 4$ . Résolvons.

$$\mu = e^{\int (1/20) dt} = e^{t/20}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{t/20} y) = 10 e^{t/20}$$

$$e^{t/20} y = \int 10 e^{t/20} dt = 200 e^{t/20} + C$$

$$y(t) = 200 + C e^{-t/20}$$

D'après la condition initiale,  $4 = 200 + C \Rightarrow C = -196$ .

Donc,  $y(t) = 200 - 196 e^{-t/20}$ .

Après 10 minutes, la quantité de sel sera  $y(10) = 200 - 196 e^{-0.5} = 81.1$  lb.

### Exercice 9.8

Au temps  $t = 0$ , un réservoir contient 25 lb de sel dissous dans 50 gal d'eau. Supposons qu'une saumure contenant 4 lb de sel par gallon d'eau s'écoule dans le réservoir à un débit de 2 gal/min et que la solution obtenue s'échappe du réservoir aussi avec un débit de 2 gal/min. La solution est conservée uniforme par un mélangeur.

- Quelle est la quantité de sel dans le réservoir au temps  $t$  ?
- Quelle est la quantité de sel dans le réservoir après 25 min ?

### Exercice 9.9

Un réservoir d'une capacité de 1000 gallons contient initialement 500 gal d'une saumure contenant 50 lb de sel. Au temps  $t = 0$ , de l'eau pure est ajoutée à un débit de 20 gal/min et la solution obtenue est évacuée avec un débit de 10 gal/min. Combien de sel y aura-t-il dans le réservoir quand il commencera à déborder ?

### Exercice 9.10

La **loi de Torricelli** donne une relation entre la vitesse d'écoulement d'un liquide par l'orifice d'un récipient et la hauteur de liquide au-dessus de l'orifice.

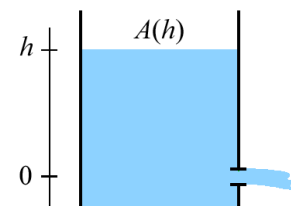
Soit  $h(t)$  la hauteur de liquide contenu dans le récipient au-dessus de l'orifice au temps  $t$  (en secondes) et  $A(h)$  l'aire de la surface du liquide quand la hauteur du liquide est  $h$ . On a la relation :

$$A(h) \frac{dh}{dt} = -k \sqrt{h}$$

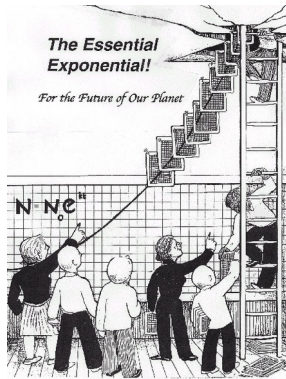
où  $k$  est une constante positive dépendant de certains facteurs, comme la viscosité du liquide et l'aire de la section du trou d'écoulement.

Au temps  $t = 0$ , un réservoir cylindrique d'un mètre de rayon contient 4 mètres d'eau au-dessus de l'orifice. La constante  $k$  vaut 0.025.

- Trouvez  $h(t)$ .
- Après combien de minutes le réservoir arrêtera-t-il de se vider ?



## Croissance exponentielle



En mathématiques, en économie et en biologie, on parle d'un phénomène à **croissance exponentielle** (ou **géométrique**) lorsque la croissance en valeur absolue de la population est proportionnelle à la population existante, c'est-à-dire lorsque le taux de croissance est constant.

Une croissance exponentielle s'exprime en mathématiques :

- pour un phénomène discret (on prend des mesures à intervalle régulier) sous forme d'une progression géométrique,
- pour un phénomène continu (on essaie de calculer ce qui se passe entre deux mesures consécutives) sous forme d'une fonction exponentielle.

Soit  $y(t)$  la population en question. Comme la croissance en valeur absolue de la population est proportionnelle à la population existante, cela se traduit par  $\frac{dy}{dt} = ky$  où  $k$  est le facteur de proportionnalité, avec  $y(0) = y_0$ .

Cette équation est à variables séparables et peut donc être résolue comme vu plus haut.

$$\int \frac{dy}{y} = \int k dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C} = e^C \cdot e^{kt}$$

De la condition initiale  $y(0) = y_0$ , il suit que  $e^C = y_0$ . Par conséquent, la solution de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} = ky$  est  $y = y_0 e^{kt}$ .

### Exercice 9.11

Vrai chiffre pour 2015 :  
7.35 milliards d'habitants

Selon les données de l'ONU, la population mondiale au début de l'année 1990 était d'environ 5.3 milliards d'habitants, avec un taux de croissance de 2 % par an.

En utilisant le modèle de la croissance exponentielle, estimez la population mondiale au début de l'année 2015.

### Exercice 9.12

Le nombre de bactéries dans une culture croît de manière exponentielle au taux de 1 % par heure. En supposant qu'il y ait actuellement 10'000 bactéries, trouvez...

- le nombre de bactéries au temps  $t$  ;
- le nombre de bactéries après 5 heures ;
- le temps nécessaire pour obtenir 45'000 bactéries.

## 9.7. Ce qu'il faut absolument savoir

Résoudre une équation à variables séparables

ok

Résoudre une équation homogène

ok

Résoudre une équation linéaire

ok



# Solutions des exercices

## Chapitre 1

- 1.1. a. -1    b. 3    c. n'existe pas    d. 2
- 1.2. 1. -2    2. -1    3. 2  
 4. 4    5. 0    6. n'existe pas  
 7. 0    8.  $+\infty$     9.  $+\infty$   
 10.  $-\infty$     11. 1/6    12. n'existe pas  
 13.  $\frac{1}{2}$     14.  $\frac{3}{2\sqrt{2}}$     15. 3  
 16. 2    17. 2    18.  $\frac{2}{3}$   
 19. 1    20. 1    21.  $+\infty$   
 22. 1    23. n'existe pas    24. n'existe pas

- 1.3. 1. 2/3    2. 0    3.  $-\infty$   
 4.  $+\infty$     5. 1    6. 1/2  
 7. 1/2    8. -2    9. 1  
 10. 0    11.  $-\infty$

- 1.4. 1. e    2.  $e^3$     3.  $e^2$   
 4. 1/e    5.  $e^{-4}$     6. 1/e  
 7.  $e^4$     8.  $e^3$

## Chapitre 2

- 2.3. a.  $f$  pas définie en -1    b.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$   
 c. continue en  $x = 4$     d.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) \neq f(2)$

- 2.4. voir § 2.3.  
 a.  $D = \{x \mid x \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$     b.  $D = [-5; 5]$   
 c.  $D = \mathbb{R}$     d.  $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$   
 e.  $D = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$     f.  $D = \{x \mid x \geq 0\}$

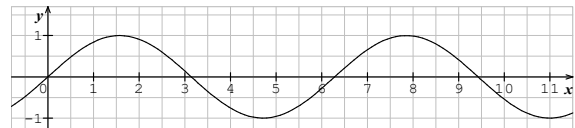
- 2.5. oui

- 2.6. environ 0.36

## Chapitre 3

- 3.1. a.  $x = -1, 1, 2, 3$     b.  $x \cong -0.3, 1.45, 2.6$   
 c.  $x \cong -0.1, 1, 2.8$     d.  $x \cong -0.8$   
 e.  $x \cong -0.4, 1.75, 2.4$

- 3.2. La dérivée est négative, car la pente de la tangente en  $3\pi$  est négative.



- 3.3. Calculons d'abord la pente de la sécante  $AB$  :

$$\text{pente} = \tan(\alpha) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

Si  $B$  tend vers  $A$ ,  $\Delta x$  tend vers 0 et la pente de la sécante tend vers 2. La pente de la *tangente* au point  $A$  est donc :

$$\lim_{B \rightarrow A} (\text{pente de la sécante } AB) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

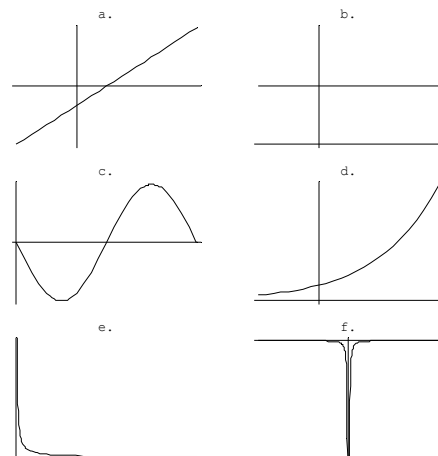
La pente en  $D$  est de  $-4$ .

- 3.4. a. 6.77259    b. -1    c. 6.599814

- 3.5.  $-\frac{1}{9}$  m/s

- 3.6. a.  $3x^2$     b.  $-\frac{1}{x^2}$     c.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$     d.  $6t + 5$

- 3.7.



- 3.9.** a. Le taux instantané de variation du nombre de bactéries après 5 heures, exprimé en nombre de bactéries par heure.  
 b.  $f'(10) > f'(5)$  car  $f(t)$  est une fonction exponentielle.

**3.12.** b.  $2\cos(2x)$

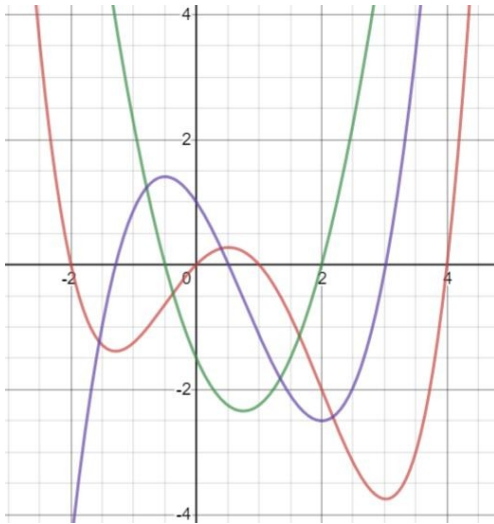
**3.13.** a.  $v_{\text{moyenne}} = \frac{\Delta \ell}{\Delta t} = \frac{\ell(t+\Delta t) - \ell(t)}{\Delta t} =$

$$\frac{\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{g}{2}(2t + \Delta t) = gt + \frac{g}{2}\Delta t$$

b.  $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (gt + \frac{g}{2}\Delta t) = gt$

- 3.14.** La dérivée seconde est négative si  $1/2 < x < 2$  :  $f$  est concave dans cet intervalle. Les points d'inflexion sont en  $x = 1/2$  et  $x = 2$ .



En rouge :  $f$ . En violet :  $f'$ . En vert :  $f''$ .

- 3.15.** Voir le corrigé complet sur la page consacrée à ce chapitre.

- 3.16.** a. III et IV      b. II      c. IV  
 d. III et IV      e. I      f. II

- 3.17.** a.  $-2.25, -0.5, 2$   
 b.  $0, 1.55$

- 3.19.** a. 6      b.  $1/4$       c.  $-1/4$       d. 6

- 3.20.** 1. 1      2. 2      3.  $-3$   
 4.  $a$       5.  $2x$       6.  $8x - 5$   
 7.  $6x^2 + 2$       8.  $2ax + b$       9.  $12x^3 + 4x$   
 10.  $3ax^2 + 2bx + c$       11.  $2x + 2$       12. 0  
 13.  $2acx + ad + bc$       14.  $-\frac{a}{x^2}$       15.  $\frac{-6}{(x-1)^2}$   
 16.  $-\frac{x+9}{(x-1)^3}$       17.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$       18.  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$   
 19.  $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$       20.  $\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

**3.21.**

1.  $\frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x-1}}$       2.  $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$   
 3.  $\frac{5x^2+2x}{\sqrt{2x+1}}$       4.  $\sqrt{2x-1}$   
 5.  $\frac{1}{2}(5x+4)\sqrt{4-x}$       6.  $5(2x+5)(x^2+5x-1)^4$   
 7.  $(30x^2-26x-3)(2x-3)^2$       8.  $3(2x^2-x-1)^2(4x-1)$   
 9.  $x(5x+4)(x+2)^2$       10.  $\cos(x) - \sin(x)$   
 11.  $\tan^2(x)$       12.  $2\cos(2x-1)$   
 13.  $20\sin^4(4x)\cos(4x)$       14.  $\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$   
 15.  $\frac{-3}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})\cos^2(\sqrt{x})$       16.  $-\frac{2}{\sin^2(2x)}$   
 17.  $2e^{2x}$       18.  $ae^{ax+b}$   
 19.  $\cos(x)e^{\sin(x)}$       20.  $(\sin x + \cos x)e^x$   
 21.  $2(2\cos(2x) - \sin(2x))e^{4x}$       22.  $\frac{1}{x}$   
 23.  $4\cot(4x)$       24.  $\frac{1}{x \ln(x)}$   
 25.  $\frac{1}{x \ln(10)}$       26.  $\frac{2(3x-1)}{3\sqrt[3]{(3x^2-2x-1)^2}}$   
 27.  $\frac{2+\tan^2(x)}{2\sqrt{x+\tan(x)}}$       28.  $-\frac{3}{2}\frac{\sin(3x)}{\sqrt{\cos(3x)}}$   
 29.  $\frac{2x+1}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$       30.  $\frac{\sqrt{x+3}(x^2+6x-9)}{2(x+3)^2\sqrt{x^2+9}}$   
 31.  $\frac{-1}{x^2-4x+5}$       32. 0  
 33.  $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$       34.  $\frac{4x\sqrt{1+x}+1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{x^2+1}+x}$   
 35. 0      36.  $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$   
 37.  $2ex^{2e-1}$       38.  $10^x \ln(10)$   
 39.  $(1+\ln(x))x^x$

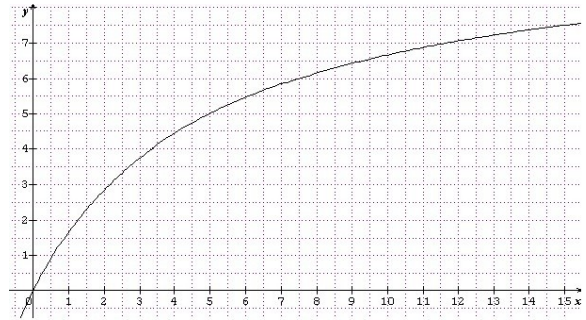
- 3.22. a. 1      b. 0      c. 0
- 3.23. a. 4      b. 1      c.  $\frac{1}{2}$   
 d.  $\frac{2}{\pi}$       e.  $\frac{1}{e}$       f.  $\frac{m}{n} a^{m-n}$   
 g.  $\frac{1}{2}$       h.  $\frac{a-b}{a+b}$       i.  $+\infty$   
 j. n'existe pas

### Chapitre 4

- 4.1. a.  $y = 4x - 3$       b.  $y = \frac{1}{4}x + 1$       c.  $y = 13x - 2$
- 4.2. a.  $y = -2x - 5$  et  $y = \frac{6}{5}x - \frac{9}{5}$   
 b.  $y = 2ex - 4$       c.  $y = ex$
- 4.3. a. oui      b.  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- 4.4.  $f(x) = \begin{cases} -3x - \frac{1}{2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2}{2} - 2x & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ x - \frac{9}{2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$
- 4.5. b.  $y = 2ax - a^2$       c.  $y = \frac{-1}{b^2}x + \frac{2}{b}$       d.  $y = -4x - 4$
- 4.6. a. 0 ;  $8.13^\circ$       b.  $30.96^\circ$       c.  $70.53^\circ$
- 4.7. b. 1
- 4.8. a.  $12 \text{ cm}^3/\text{min}$       b.  $\frac{1}{16\pi} \text{ cm}^3/\text{min}$       c.  $\frac{3}{20\pi} \text{ cm}^3/\text{min}$
- 4.9. environ  $6.05^\circ/\text{s}$
- 4.10.  $-8/3 \text{ m/s}$
- 4.11. le carré de côté  $\frac{p}{2}$  et d'aire  $\frac{p^2}{4}$
- 4.12. largeur = 4.618, hauteur = 10.666
- 4.13. base carrée de côté  $\frac{2a}{3}$ , hauteur  $\frac{a}{6}$
- 4.14.  $75 \text{ dm}^2$
- 4.15. hauteur = diamètre =  $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ dm}$
- 4.16.  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 4.17.  $PB = 3 \text{ km}$
- 4.18. a. ne faire que le carré  
 b.  $l = \frac{9L}{9+4\sqrt{3}}$  pour le triangle
- 4.19.  $h = \sqrt{2}$
- 4.20.  $\sqrt{2}$
- 4.21. 0.81944

### Chapitre 5

- 5.2. a. 2 m      d. 10 m  
 c.



### Chapitre 6

- 6.1.  $D = [a; b]$

### Chapitre 7

- 7.2. a.  $\ln|\sin x| + C$       b.  $\frac{x^5}{12} + C$   
 c.  $-\frac{7}{3}\cos(3x) + C$       d.  $\frac{5}{2}\sin(2x) - \frac{e^{5x}}{5} + 9x + C$   
 e.  $-2\ln|\cos(x)| + C$       f.  $\frac{3^x}{\ln|3|} + C$   
 g.  $\frac{2}{7}\sqrt{x(x^3+7)} + C$
- 7.3. a.  $\frac{1}{24}(x^2+1)^{24} + C$       b.  $-\frac{1}{4}\cos^4(x) + C$   
 c.  $-2\cos(\sqrt{x}) + C$       d.  $\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+5} + C$
- 7.4. a.  $-\frac{1}{8}(2-x^2)^4 + C$       b.  $\frac{1}{8}\sin(8x) + C$   
 c.  $\frac{1}{21}(7t^2+12)^{\frac{3}{2}} + C$       d.  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$   
 e.  $-\frac{1}{16}(4x^2+1)^{-2} + C$       f.  $\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5}{x}\right) + C$   
 g.  $\frac{1}{3}\tan(x^3) + C$       h.  $\frac{1}{18}\sin^6(3\alpha) + C$   
 i.  $-\frac{1}{3}\tan(\cos(3\theta)) + C$       j.  $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$   
 k.  $\frac{1}{2}\ln^2|x| + C$       l.  $\frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{2}} + C$   
 m.  $-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$       n.  $\frac{8}{3}\ln|x^3+2| + C$   
 o.  $\frac{1}{4\cos(4x)} + C$       p.  $x + \ln|x+1| + C$   
 q.  $\sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} + C$

- 7.5.** a.  $x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$     b.  $e^{-x}(-1-x) + C$   
 c.  $\frac{x^4}{4} \left( \ln|4x| - \frac{1}{4} \right) + C$   
 d.  $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C$   
 e.  $\frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} \sin(3x) - x \cos(3x) \right) + C$   
 f.  $\frac{1}{2} \ln^2|x| + C$                       g.  $e^{t(t^2-2t+2)} + C$   
 h.  $-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + C$   
 i.  $e^x(x^2 - x + 2) + C$   
 j.  $-\frac{1}{2} e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) + C$

- 7.6.** a.  $\arctan(\sin(x)) + C$   
 b.  $\frac{x^2}{2} \left( \ln|x| - \frac{1}{2} \right) + C$   
 c.  $x(\ln^2|x| - 2\ln|x| + 2) + C$   
 d.  $\frac{1-2x}{2(x-1)^2} + C$   
 e.  $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C$   
 f.  $\ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| + C$   
 g.  $-\ln|\cos(x)| + C$   
 h.  $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{3 \sin^3(x)} + C$

- 8.6.** a. 3  
 b. 1 et 3  
 c. La hauteur du rectangle est 3

**8.7.** env. 13.84 °C

- 8.8.** a. 64/3                                      b. 9  
 c. 9    d. 5/3  
 e. 9/2    f. 5/2  
 g. 1

- 8.9.** a. cylindre :  $64\pi$                       b. cône :  $24\pi$   
 c. cône tronqué :  $21\pi$                       d. sphère :  $\frac{4}{3}\pi R^3$   
 e. parabolöide :  $8\pi$                           f.  $\frac{32}{5}\pi$   
 g.  $\frac{3}{5}\pi$     h.  $8\pi$

- 8.10.** a.  $s(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{2}{3}t^3 + t + 1$                       b.  $s(t) = 2t^2 + t$   
 c.  $s(t) = -\cos(2t) - t - 2$                       d.  $s = \frac{2}{\pi}$ ;  $v=1$ ;  $a=0$   
 e. 2/3; 3    f. -10/3; 17/3  
 g. 204/25 ; 204/25  
 h.  $v(t) = -g \cdot t + v_0$  ;  $s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot t + s_0$

- 8.12.** a. 1    b. diverge                                      c.  $\ln(5/3)$   
 d. 1/2    e. -1/4    f. 1/3  
 g. 0    h. 0    i. diverge  
 j. diverge    k.  $\ln(1/2)$                                       l. 2

**8.13.**  $V = \pi$

---

## Chapitre 8

- 8.1.** a. 20.1762                                      b. 19.0553  
 c. 19.5621    d. 19.6157

- 8.3.** a. 65/4    b. 81/10    c. 22/3  
 d. 2/3    e. -1/3    f. 52/3  
 g. 844/5    h. -55/3    i.  $\sqrt{2}$   
 j.  $\frac{\pi^2}{9} + 2\sqrt{3}$     k. 0.868    l.  $-2\pi$

- 8.4.** a. 12    b. 1/6    c.  $\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$   
 d. 37/12

- 8.5.** a. 5/2    b.  $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

---

## Chapitre 9

- 9.1.** a.  $xy' = y$     b.  $y' = y$   
 c.  $y'' + y = 0$     d.  $xy'' - y' = 0$   
 e.  $y''' = 0$

- 9.2.** a.  $y = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$     b.  $y = \alpha - x^2$   
 c.  $y = \frac{1}{2} \sin^2(x) + \alpha$     d.  $y = \arctan(x) + \alpha$   
 e.  $y = \sqrt{1+x^2} + \alpha$     f.  $y = x - \ln(x+1)^2 + \alpha$

- 9.3. a.  $y = \alpha \sin(x)$       b.  $y = \frac{1}{\ln|\alpha(x+1)|}$   
 c.  $y = \alpha x^k$       d.  $y = \sin(x^2 + \alpha)$   
 e.  $y = 3 + \alpha e^{\frac{1}{x}}$       f.  $y = \pm\sqrt{x^2 + \alpha}$   
 g.  $y = \ln\left|\alpha + \frac{1}{2}x^2\right|$       h.  $y = \ln\left|\frac{1}{\alpha - x}\right|$
- 9.4. a.  $y = \frac{x^2 + \alpha}{2x}$       b.  $y = x\sqrt[3]{\ln|\alpha x^3|}$   
 c.  $y = x \cdot \ln\left|\frac{\alpha}{x}\right|$       d.  $x = \pm y\sqrt{-2\ln|\alpha y|}$
- 9.5. a.  $y = -2\cos^2(x) + \alpha \cos(x)$   
 b.  $y = 1 + \alpha e^{\frac{1}{x}}$   
 c.  $y = -x^2 - 2 + \alpha e^{x/2}$   
 d.  $y = \alpha \sin(x) - \frac{1}{2\sin(x)}$   
 e.  $y = (x + \alpha)(x + 1)^2$   
 f.  $y = \alpha x - \ln(x) - 1$
- 9.6. a.  $2x^2 + x - 1$       b.  $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 c.  $y = \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{x}$       d.  $y = xe^{-x}$   
 e.  $y = 2e^x - 3x - 5$       f.  $y = \frac{4 - x^2}{x^3}$
- 9.7. a.  $y = \frac{-3}{2\sqrt{x+1}}$       b.  $y = -\ln\left(3 - \frac{x^2}{2}\right)$
- 9.8. a.  $y = 200 - 175e^{-t/25}$   
 b. 136 lb
- 9.9. 25 lb
- 9.10. a.  $h(t) = (2 - 0.003979t)^2$   
 b. environ 8.4 min
- 9.11. 8.7 milliards
- 9.12. a.  $y = 10000e^{0.01t}$   
 b. 10'513  
 c. environ 150 heures

**BREF**, j'étais en train de regarder quelle émission je pouvais illustrer pour PodcastScience...  
 J'ai vu que le 22 février, Nicotupe, un auditeur mathéux qui en avait marre qu'on raconte n'importe quoi sur les maths parlait de maths. Autrement dit :

Super mathéux au secours de PodcastScience!

J'me suis dit que ça serait cool de faire un dessin pour son dossier. J'ai regardé le sujet : La notion d'infini en mathématiques

J'ai pensé à la note que je m'étais tapée au bac : J'ai revu mes ambitions à la baisse!

J'me suis rabattue sur ce qui me semblait de mon niveau. Du genre : Expliquer un blague de math! Je suis allée sur le forum futurasience et j'en ai piochée une au hasard...

Je l'ai pas comprise! J'en ai essayé une autre...  
 Je l'ai pas comprise! J'en ai essayé une autre...  
 Je l'ai pas comprise!... mais elle avait l'air d'avoir du succès

C'était l'histoire d'un malheureux sinus tout seul au milieu d'une soirée de cosinus. Au bout d'un moment l'un d'entre eux venait le voir et lui disait « Reste pas tout seul ! Intègre-toi ! »

J'ai cherché une heure sur internet en quoi cette chute était marrante et j'ai découvert que l'intégrale de sinus valait cosinus.

J'ai commencé à réfléchir à une explication simple. **Elémentaire mon cher Watson!**

J'ai cherché ce qu'était un sinus  
 J'ai vu qu'il s'agissait de fonctions trigonométriques

J'ai cherché ce qu'était une fonction trigonométrique...

J'en ai conclu qu'il s'agissait d'une sorte de machine dans laquelle on fourre un angle et par laquelle il ressort une valeur.

Je me suis demandée comment le fait d'intégrer la machine sinus pouvait la faire devenir cosinus...

J'ai cherché ce qu'était une intégrale...  
 J'ai pas compris!

**Bref** J'ai essayé d'expliquer une blague de math...

**Psst ! Avez-vous vu les deux erreurs dans ce strip ?**

