

Fonctions polynomiales

Ex 5.1

factorisation par groupement

$$a. f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x^2 - 4)(x+1) =$$

$$(x+2)(x-2)(x+1)$$

identité remarquable

$$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$$

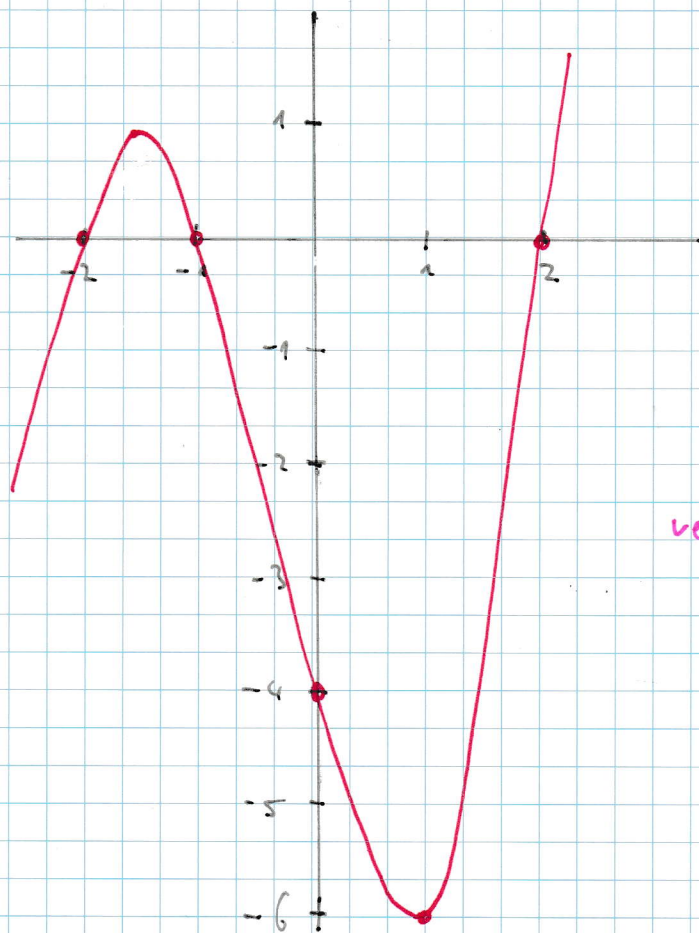
x		-2		-1		2	
(x+2)	-	0	+	+	+	+	+
(x-2)	-	-	-	-	-	0	+
(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

→ racines par ordre croissant

} remplissage par lignes

→ remplissage par colonnes

b.



$$f(0) = -4$$

$$f(1) = -6$$

vérifier avec DESMOS !

Ex 5.2.

- a. Q : nombre de moutons
 t : temps (unités?)
- b. Utilisez DESMOS (explications sur la chaîne youtube)
- c. $t \in [0; 5]$. Quand $t=5$, il n'y a plus de moutons...
- d. Oui. Comme on est sur une petite île, la population de moutons va d'abord croître. Puis, la nourriture se raréfiant, la population va diminuer de plus en plus vite.

Ex 5.3.

$$P(x) = (x+1) \cdot x \cdot (x-2)(x-3)(x-5) = x^5 - 9x^4 + 21x^3 + x^2 - 30x$$

Ex 5.4.

cymath  (sur youtube)

$x^5 - 1$ est divisible par $x - 1$ si 1 est une racine. C'est le cas ici puisque $1^5 - 1 = 0$.

Schéma de Horner: $x^5 \quad x^4 \quad x^3 \quad x^2 \quad x \quad c$

	1	0	0	0	0	-1
racine $\rightarrow$ 1		1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	0
		x^4	x^3	x^2	x	c

$\leftarrow$ racine (doit être nul)

$$\Rightarrow (x^5 - 1) / (x - 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Ex 5.5.

Comme 5.4: $f(-1) = 0 \Rightarrow$ on peut diviser

	x^3	x^2	x	c
	1	4	4	1
racine $\rightarrow$ -1		-1	-3	-1
	1	3	1	0
	x^3	x^2	x	c

$$\Rightarrow f(x) / (x+1) = x^2 + 3x + 1$$

$\leftarrow$ ok!

Ex 5.6

Il faut que $f(3) = 0 \Rightarrow 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + C = 0$

$$27 - 18 + 9 + C = 0 \Rightarrow C = -18$$

	x^3	x^2	x	C
	1	-2	3	-18
3		3	3	18
	1	1	6	0

ok!

$$\Rightarrow f(x)/(x-3) = x^2 + x + 6$$

Ex 5.7

a. parabole ayant -2 et 3 comme racines

$$\Rightarrow f(x) = a \cdot (x+2)(x-3) = a(x^2 - x - 6)$$

pour trouver a , on lit sur le graphique que $f(0) = -6$

$$\Rightarrow a(0^2 - 0 - 6) = -6a = -6 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \underline{\underline{x^2 - x - 6}}$$

b. $f(x) = a(x-2)^2$ (2 est une racine de multiplicité paire)

on voit que $f(0) = -2$

$$\Rightarrow a(0-2)^2 = -2 \Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2}}$$

c. $f(x) = a(x+2)(x-1)(x-3)$

on voit que $f(0) = 3$

$$\Rightarrow a(0+2)(0-1)(0-3) = 3 \Rightarrow 6a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-3) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

racine double

cymath



on est au 21^{ème} siècle monde!

d. $f(x) = a(x+1)^2(x-1)$

$$f(0) = -3 \Rightarrow a(0+1)^2(0-1) = -3 \Rightarrow -a = -3 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = 3(x+1)^2(x-1) = \underline{\underline{3x^3 + 3x^2 - 3x - 3}}$$

e. $f(x) = a(x+1)(x-1)^2(x-2)$

$f(0) = -2 \Rightarrow a(0+1)(0-1)^2(0-2) = -2a = -2 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow f(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2) = \underline{x^4 - 3x^2 + x^2 + 3x - 2}$

symétrie (on va pas s'en occuper...) 

f. $f(x) = a(x+2)x(x-2)^2$

on voit que $f(0) = 0$, ce qui ne nous aide pas pour trouver a ($0 \cdot a = 0$)

il semble que $f(1) = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow f(1) = a(1+2) \cdot 1 \cdot (1-2)^2 = 3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-2)^2 \cdot x = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x}}$

Ex. 5.8

a. $(x-1)^4$ est la courbe rouge : 1 seule racine de multiplicité 4 en $x = 1$

b. $x^4 - x = x(x^3 - 1)$ est la bleue : racines en 0 de mult 1 et en 1 de mult. 3

c. $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x+1)(x-1)$ est la verte : racines en 0 (mult paire), -1 et 1 (mult impaire)

Ex 5.9

a. $(x-1)^3$ est la courbe rouge : 1 seule racine en $x = 1$

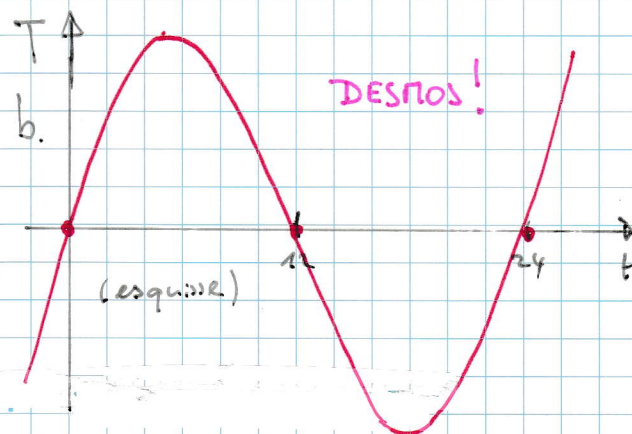
b. $x(x+1)^2$ est la verte : racine en 0 et en -1 (mult. paire)

c. $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$: 3 racines en -1, 0 et 1. c'est la bleue!

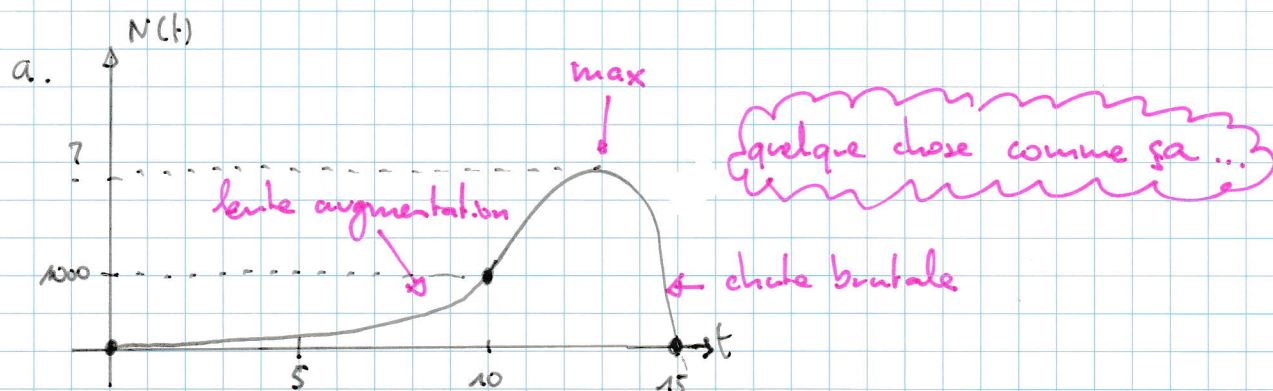
Ex 5.10

a.

t	0	12	24
$\frac{1}{20}t$	-	0	+
$t-12$	-	-	0
$t-24$	-	-	-
T	-	0	+



← réponse de a.

Ex 5.11

b. Zéros en 0 (mult. paire) et en 15 (mult. impaire)

c. $N(t) = a \cdot t^2 \cdot (t-15)$

on a $N(10) = 1000 = a \cdot 10^2 (10-15) = -500a \Rightarrow a = \frac{1000}{-500} = -2$

$\Rightarrow N(t) = -2t^2(t-15) = -2t^3 + 30t^2$

dessin avec DESMOS ou voir le corrigé

d. $N(5) = -2 \cdot 5^2 (5-15) = -50 \cdot (-10) = 500$ bactéries

e. $N(t) = a \cdot t^4 (t-15)$

on a $N(10) = 1000 = a \cdot 10^4 (10-15) = -50000a \Rightarrow a = \frac{1000}{-50000} = -\frac{1}{50}$

$\Rightarrow N(t) = -\frac{1}{50} t^4 (t-15) = -\frac{1}{50} t^5 + \frac{3}{10} t^4$

f. $N(5) = -\frac{1}{50} 5^4 (5-15) = 125$ bactéries

Ex 5.12

a. $x \geq 0$ (évident) et $x \leq 10$, car on ne peut pas couper plus que la moitié de la largeur...

$\Rightarrow x \in [0; 10]$

b.

$\Rightarrow V(x) = x(20-2x)(30-2x)$
 $= 4x^3 - 100x^2 + 600x$

c.

x	< 0	0		10	15	> 15
$20-2x$	+	+	+	0	-	-
$30-2x$	+	+	+	+	0	-
$V(x)$	-	0	+	0	-	+

d. DESMOS!

→ réponse de c.

car $x < 0$ dans cette colonne