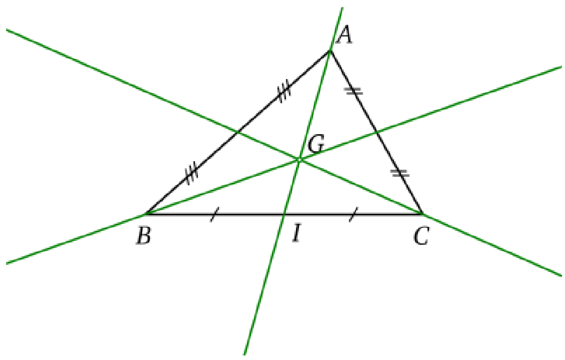
1. Géométrie élémentaire

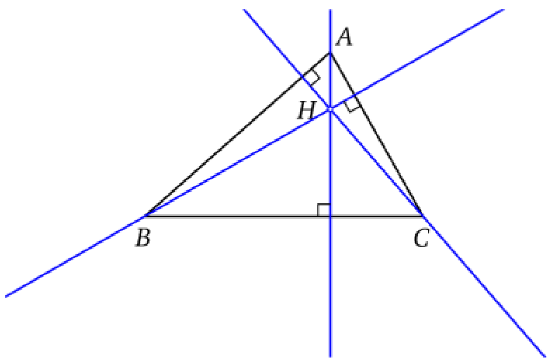
1.1. Le triangle

Définitions Un triangle ayant deux côtés de même longueur (ou deux angles de même grandeurs) est dit **isocèle**.
Un triangle ayant ses trois côtés de même longueur (ou ses trois angles de même grandeurs) est dit **équilatéral**.
Un triangle ne présentant pas de symétrie particulière est dit **scalène**.
Un triangle présentant un angle droit est qualifié de triangle **rectangle**. Dans ce cas, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse**.

Médianes On appelle **médiane** du triangle toute droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé. Chacune des trois médianes divise le triangle en deux triangles d'aires égales.
Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point G qui est le **centre de gravité** triangle. Si le triangle était une plaque solide homogène, on pourrait le faire tenir en équilibre sur une pointe en le posant exactement sur le point G.



Hauteurs On appelle **hauteur** l'une des trois droites passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé. L'intersection de la hauteur et du côté opposé s'appelle le *pied* de la hauteur.
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection s'appelle **l'orthocentre** du triangle.

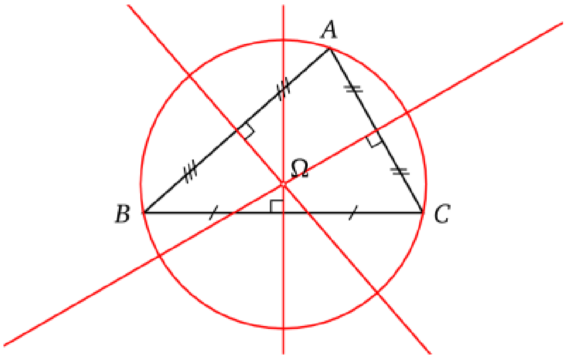


Médiatrices et cercle circonscrit La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
On appelle *médiatrice* du triangle l'une quelconque des médiatrices des trois segments [AB], [AC] et [BC].
Si on note Ω l'intersection des deux médiatrices des segments [AB] et [AC] alors Ω est à égale distance de A, B et C : par suite Ω est aussi sur la médiatrice du segment [BC]. Les trois médiatrices d'un triangle sont donc concourantes.

Leur point d'intersection est le centre du cercle **circonscrit** au triangle. C'est le seul cercle passant à la fois par les trois sommets du triangle.

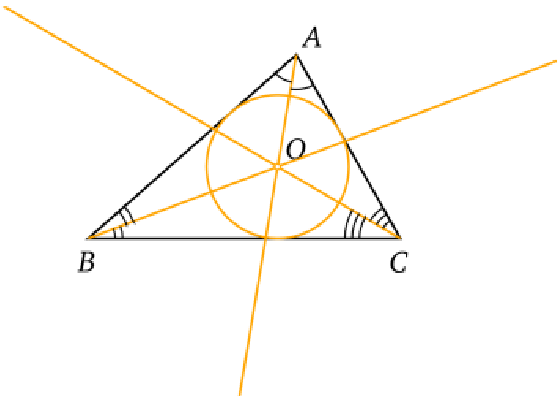
Le saviez-vous ?
Les points G, H et Ω sont alignés. Ils forment ce qu'on appelle la **droite d'Euler** du triangle ABC.

Vous pouvez vous amuser à le vérifier avec Geogebra.



Bissectrices et cercle inscrit

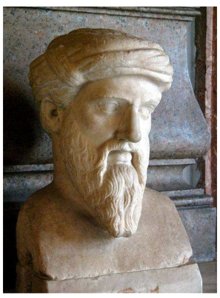
La **bissectrice** d'un secteur angulaire est la demi-droite issue du sommet de l'angle qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure. Elle forme de ce fait l'axe de symétrie de cet angle.
Les bissectrices du triangle sont simplement les trois bissectrices des angles du triangles.
La bissectrice de deux droites est l'ensemble des points à égale distance des deux droites : de ce fait le point d'intersection O de deux bissectrices est à égale distance des droites (AB), (AC) et (BC). Ce point est donc sur la troisième bissectrice : les trois bissectrices sont concourantes.
D'après les propriétés des bissectrices, on peut tracer un cercle de centre O qui est tangent aux trois droites (AB), (AC) et (BC) : c'est le cercle **inscrit** dans le triangle.



1.2. Quelques théorèmes classiques

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
La réciproque est aussi vraie : si dans un triangle de côtés a, b, c on a $a^2 + b^2 = c^2$ (c est la longueur du plus long côté), alors le triangle est rectangle.



Pythagore de Samos
(vers 580 - vers 495 av. J.-C.)

Ce théorème est nommé d'après **Pythagore de Samos** qui était un mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce antique.
Que la propriété de Pythagore soit connue depuis l'antiquité est un fait dont on peut trouver trace dans l'histoire. Il suffit pour cela d'observer la *corde à treize nœuds* dont se servaient les arpenteurs égyptiens et dont on retrouve des illustrations dans de nombreuses représentations des travaux des champs. Cette corde permettait de mesurer des distances mais aussi de construire, sans équerre, un angle droit puisque les 13 nœuds (et les douze intervalles) permettaient de construire un triangle dont les

dimensions étaient (3 - 4 - 5), triangle qui s'avère être rectangle. Cette corde restera un outil de géomètre pendant encore tout le Moyen Âge.

La plus ancienne représentation de triplets pythagoriciens (triangle rectangle dont les côtés sont entiers) se trouve sur des mégalithes (vers 2500 av. J.-C., Grande-Bretagne). On retrouve aussi la trace de triplets pythagoriciens sur des tablettes babyloniennes (tablette Plimpton 322, vers 1800 av. J.-C.) qui prouvent que, plus de 1000 ans avant Pythagore, les géomètres connaissaient l'existence de triplets pythagoriciens.

Euclide d'Alexandrie
(vers 300 av. J.-C.)

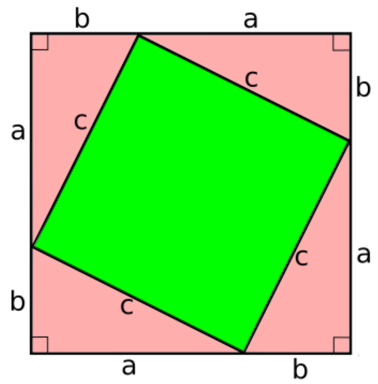
Mais entre la découverte d'une propriété : « on observe que certains triangles rectangles vérifient cette propriété », sa généralisation : « il semble que tous les triangles rectangles vérifient cette propriété » et sa démonstration : « il est vrai que tous les triangles rectangles (et eux seuls) dans un plan euclidien vérifient cette propriété », il faut souvent attendre plusieurs siècles.

Les preuves historiques de la vie de Pythagore sont déjà si rares qu'il n'est pas étonnant qu'on ne puisse pas lui attribuer avec certitude la paternité de la démonstration. La première trace écrite figure dans les *Éléments* d'**Euclide** sous la forme suivante :

> « Aux triangles rectangles, le carré du côté qui soutient l'angle droit, est égal aux carrés des deux autres côtés. »
>
> (Livre I, proposition XLVII)

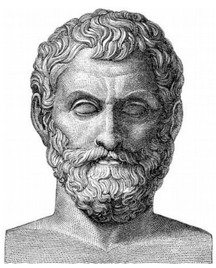
Une preuve moderne du théorème de Pythagore

Considérons un triangle rectangle dont les côtés sont de longueurs a, b et c. Ensuite recopions ce triangle trois fois et plaçons le triangle et ses copies dans un carré dont le côté est $a + b$, comme dans la figure ci-dessous.



Essayons de trouver l'aire du carré vert de côté c. Évidemment, c'est c^2, mais c'est aussi égal à la différence entre l'aire du grand carré extérieur et la somme des aires des triangles rouges. L'aire du carré est $(a + b)^2$ (car son côté est $a + b$) et l'aire totale des triangles est quatre fois l'aire d'un seul, c'est-à-dire $4(a \cdot b/2)$. Donc la différence est $(a + b)^2 - 4(a \cdot b/2)$, ce qu'on peut simplifier en $a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$, ou bien $a^2 + b^2$.
Nous avons démontré que $c^2 = a^2 + b^2$.

Théorème de Thalès



Thalès de Milet
(vers 624 - vers 547 av. J.-C.)

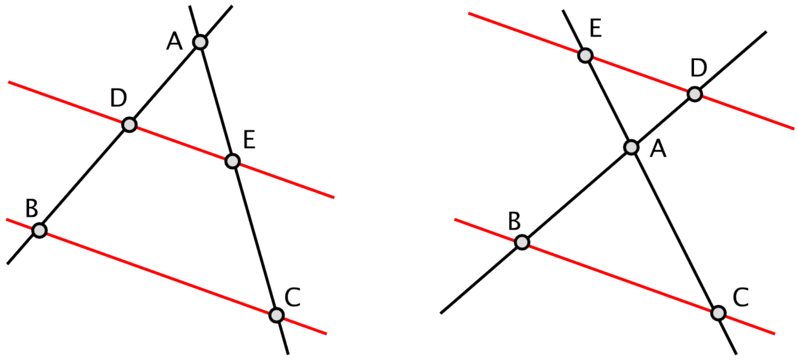
Le **théorème de Thalès** est un théorème de géométrie, attribué selon la légende au mathématicien et philosophe grec **Thalès de Milet** ; en réalité Thalès s'est davantage intéressé aux angles opposés dans des droites sécantes, aux triangles isocèles et aux cercles circonscrits. Les Anglo-Saxons nomment d'ailleurs théorème de Thalès une propriété plus proche de la réalité historique - voir théorème de Thalès (cercle).

Cette propriété de proportionnalité était connue des Babyloniens. Mais la première démonstration de ce théorème est attribuée à Euclide qui la présente dans ses *Éléments* (proposition 2 du livre VI).

Le Théorème de Thalès sert notamment à calculer des longueurs dans un triangle, à condition d'avoir deux droites parallèles. D'une manière plus générale, pour appliquer le théorème de Thalès, il faut que les triangles ABC et ADE (voir dessin ci-après) soient semblables (homothétiques).

Le théorème de Thalès permet aussi de savoir si deux droites sont parallèles.

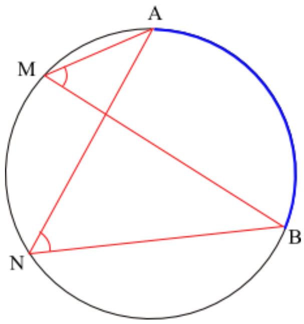
Comparez cette planche à repasser avec le schéma de droite !



Si les droites rouges sont parallèles, alors $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ et réciproquement.

Théorème de l'angle inscrit

Deux angles inscrits dans un cercle interceptant le même arc de cercle ont la même mesure.

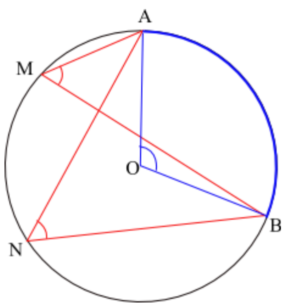


Théorème de Thalès (cercle)

Un triangle inscrit dans un cercle et dont un côté est un diamètre est un triangle rectangle.

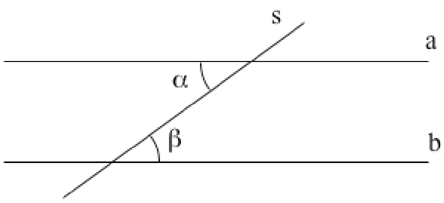
Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre

Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit qui intercepte le même arc.



Angles alternes-internes

Sur la figure suivante, les droites *a* et *b* sont parallèles, *s* est une sécante quelconque.



Les angles α et β sont égaux et appelés **angles alternes-internes**.

1.3. Mini-formulaire

Carré Diagonale = $\sqrt{2} \cdot c$ Aire = c^2

Triangle Somme des angles = 180° Aire = $\dfrac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2}$

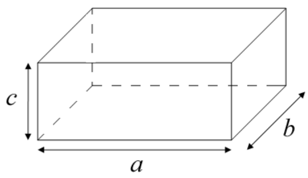
Triangle équilatéral Hauteur = Aire = (à compléter, voir ex 1.2)

Cercle, disque Périmètre = $2\pi r$ Aire = πr^2

Cube Grande diagonale = $\sqrt{3} \cdot c$ Aire = $6c^2$ Volume = c^3

Sphère Aire = $4\pi r^2$ Volume = $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

Parallélépidède rectangle

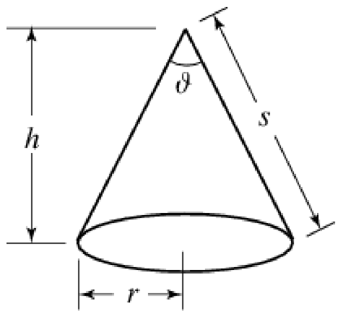


Grande diagonale = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Aire = $2(ab + ac + bc)$

Volume = abc

Cône circulaire droit (ou cône de révolution)



Apothème du cône : $s=\sqrt{r^2+h^2}$

$\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{r}{s}$

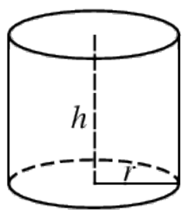
Angle de développement : $\phi=2\pi\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Aire latérale = $\pi r\, s=\dfrac{1}{2}s^2\phi$

Aire totale = $\pi r(r+s)$

Volume = $\dfrac{\pi}{3}r^2 h$

Cylindre circulaire droit (ou cylindre de révolution)



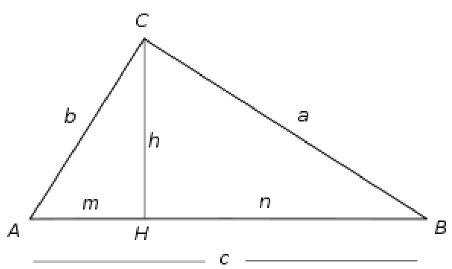
Aire latérale = $2\pi r h$

Aire totale = $2\pi r(r+h)$

Volume = $\pi r^2 h$

1.4. Exercices

Exercice 1.1



Attention ! Ce théorème n'est valable qu'avec des triangles rectangles !

Démontrez **le théorème de la hauteur** : dans un triangle rectangle en C, $h^2 = m \cdot n$.

Exercice 1.2 Quelle est la valeur de la hauteur h d'un triangle équilatéral de côté a ? Que vaut son aire A ? Complétez la ligne du mini-formulaire avec vos résultats.

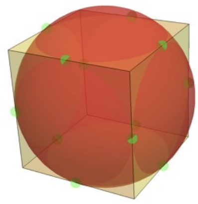
Exercice 1.3 Un pare-brise est balayé par deux essuie-glaces de longueur L articulés autour de deux points distants de L. Chacun d'eux couvre ainsi un demi-disque.
Quelle est l'aire totale balayée ?

Exercice 1.4 Soit un triangle inscrit dans un cercle de rayon 15. Un de ses côtés passe par le centre du cercle. Un autre de ses côtés a une longueur de 24.
Quelle est la longueur du troisième côté ?

Exercice 1.5 On dispose d'une corde d'une longueur $\ell = \pi$. Parmi les trois figures géométriques suivantes, laquelle doit-on former avec la corde pour couvrir la plus grande aire : un triangle équilatéral, un carré ou un cercle ? Calculez les trois aires et comparez !

Exercice 1.6 Depuis la Terre, la Lune et le Soleil semblent à peu près de même grosseur. Sachant que le Soleil est environ 387 fois plus éloigné que la Lune, combien faudrait-il de Lunes pour occuper un volume équivalent à celui du Soleil ?

Exercice 1.7 Soit un cube d'arête a.



a. Calculez le volume de la sphère circonscrite au cube.
b. Calculez le volume de la sphère inscrite dans le cube.
c. Calculez l'aire de la sphère tangente aux douze arêtes du cube (voir dessin ci-contre).

Exercice 1.8 Soit un cylindre de rayon r inscrit dans un cône circulaire droit de hauteur H et de rayon de base R.
a. Calculez le volume V du cylindre.
b. Calculez son aire latérale A.

Exercice 1.9 Les diagonales d'un losange ont des longueurs de 8 et 18 cm. Comparez les volumes des solides engendrés par la rotation du losange autour de...
a. sa petite diagonale ;
b. sa grande diagonale.

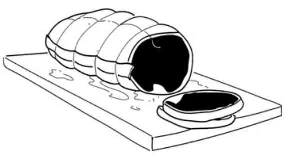
Exercice 1.10 Calculez le volume d'un cône circulaire droit de hauteur h inscrit dans une sphère de rayon R.

Exercice 1.11 Un lieu géométrique désigne l'ensemble des points du plan ou de l'espace possédant une certaine propriété.

Exemple : le lieu géométrique des points M dont la distance à un point fixe C est égale à R est le cercle de centre C et de rayon R.

Construisez le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment $[AB]$ sous un angle de 30°.

Exercice 1.12 Dans votre livre de recettes favori, il est écrit de faire cuire un rôti au four sur une grille à raison de 12 minutes par livre (500 g) à 240 °C. Vous achetez chez votre boucher une belle pièce de 1.2 kg. Avant de la mettre au four, vous prenez ses mesures : la pièce se présente comme un cylindre non pas circulaire mais plutôt ovale de 19 cm de longueur et 33 cm de circonférence.



1. Quel sera le temps de cuisson du rôti pour qu'il soit cuit à souhait selon le livre de cuisine ?
2. Quelle est l'aire de la surface latérale de la viande en contact avec l'air chaud ?

Le rôti était parfait. Le mois suivant, vous invitez vos voisins et décidez de refaire la même recette. Vous retournez chez votre boucher pour lui acheter à nouveau une pièce de 1.2 kg. Pourtant, la forme est cette fois-ci différente : elle se présente toujours comme un cylindre ovale, mais elle mesure 26 cm de long et 28 cm de circonférence. Comme le poids est le même, vous la faites logiquement cuire le même temps que l'autre rôti (voir question 1). Vous écartez comme de coutume les extrémités bien cuites du rôti, mais, en observant les tranches centrales, c'est la déception ! Le rôti est trop cuit ! Pourquoi ?

3. Que peut-on dire des volumes des deux rôtis ?
4. Quelle est l'aire de la surface latérale du second rôti ?
5. Expliquez le surplus de cuisson.
6. Combien de temps aurait dû cuire le second rôti à 240 °C pour avoir la même cuisson que le premier ?

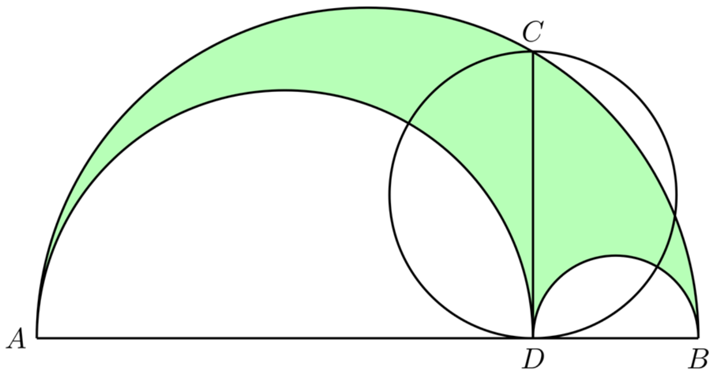
Source de l'exercice :
Les maths au quotidien, p.66

Conclusion
De nombreuses recettes donnent le temps de cuisson par rapport à la masse de la pièce de viande. On voit que la forme a aussi de l'importance.

Exercice 1.13

Le terme « arbelos » signifie couteau de savetier.

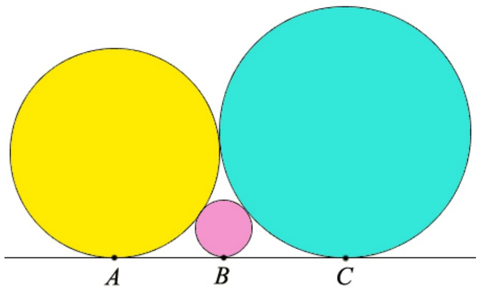
L'*arbelos* (ou tricercle de Mohr, du nom du mathématicien danois Georg **Mohr**) est une figure géométrique plane étudiée, entre autres, par Archimède (III^{e} siècle avant notre ère). Ce dernier a démontré que l'aire de l'arbelos (en vert ci-dessous) est égale à celle du disque de diamètre [CD].



Démontrez cette égalité.

Exercice 1.14*

Les *Sangaku* sont des énigmes japonaises de géométrie euclidienne gravées sur des tablettes de bois, apparues durant la période Edo (1603-1867) et fabriquées par des membres de toutes les classes sociales. Voici un problème de 1824 :



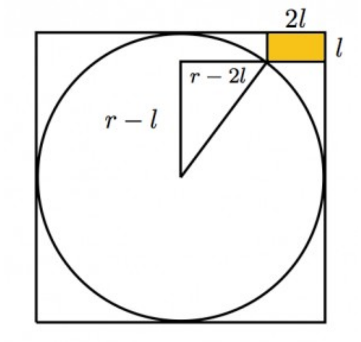
Montrez que $\frac{1}{\sqrt{r_{bleu}}}+\frac{1}{\sqrt{r_{jaune}}}=\frac{1}{\sqrt{r_{rose}}}$

Aide : Montrez d'abord que $[AC]^2 = 4 \cdot r_{\text{jaune}} \cdot r_{\text{bleu}}$.
Utilisez ensuite la relation évidente $[AB] + [BC] = [AC]$.

Exercice 1.15

Combien de rectangles orange faut-il pour recouvrir entièrement le carré ?

r est donné.

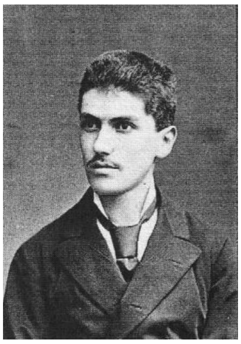


1.5. Le théorème de Pick

Théorème de Pick

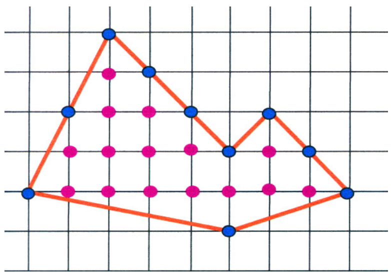
Soit un polygone construit sur une grille de points équidistants (c'est-à-dire des points de coordonnées entières) tel que tous ses sommets soient des points de la grille ; le **théorème de Pick** (1899) fournit une formule simple pour calculer l'aire A de ce polygone en se servant du nombre i de *points intérieurs* du polygone et du nombre b de *points du bord* du polygone :

$$A=i+\frac{b}{2}-1$$



Georg **Pick**
(1859 - 1942)

Dans l'exemple ci-dessous, l'aire du polygone est $A=15+\frac{10}{2}-1=19$.



Remarque : le polygone ne doit pas être troué.

Exercice 1.16*

Démontrez le théorème de Pick en procédant par étapes :

1. Prouvez que la formule fonctionne pour n'importe quel rectangle avec ses côtés parallèles aux axes.
2. Prouvez alors que la formule fonctionne pour un triangle rectangle obtenu en coupant un rectangle du point 1 par sa diagonale.
3. Montrez que si la formule fonctionne pour deux polygones ayant un bord commun, elle fonctionne aussi pour le polygone obtenu en éliminant entre eux cette frontière commune.
4. Concluez en découpant les polygones en triangles rectangles et en rectangles.

1.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Les définitions et propriétés des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices ❏ ok
Le théorème de Pythagore ❏ ok
Le théorème de Thalès ❏ ok
Les théorèmes se rapportant aux angles inscrits dans un cercle ❏ ok
Les angles alternes-internes ❏ ok
Toutes les formules importantes du mini-formulaire par cœur ❏ ok