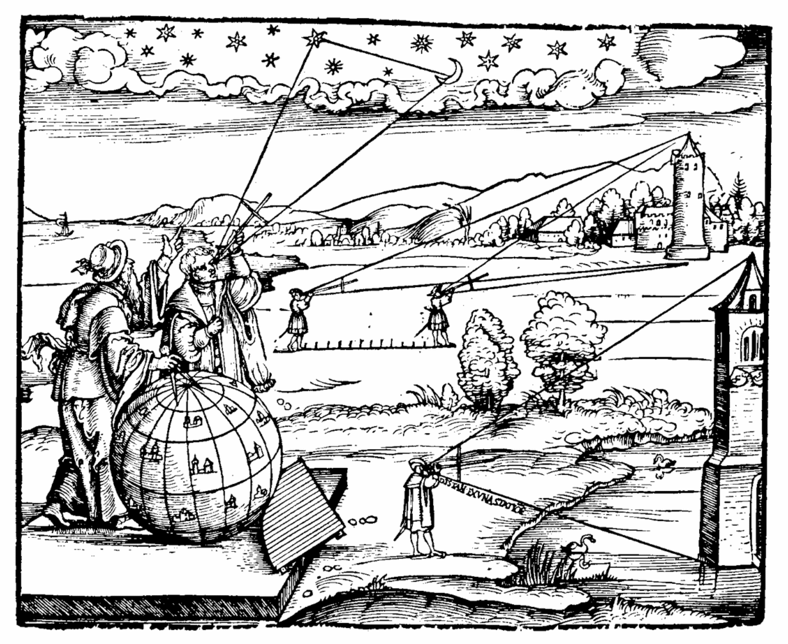
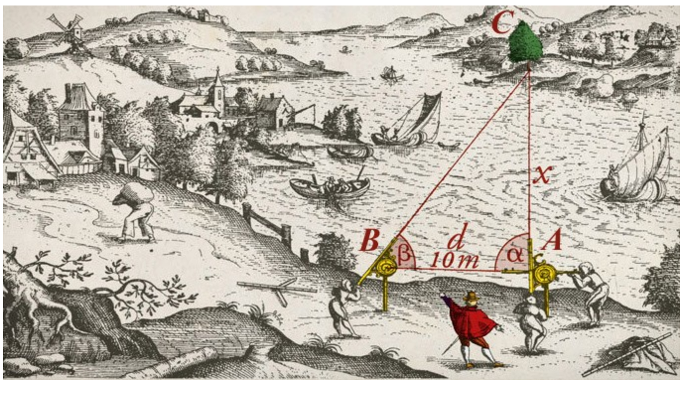
2. Trigonométrie

2.1. Utilité de la trigonométrie



Le problème de base de la trigonométrie est à peu près celui-ci :

Vous vous tenez sur la rive d'un fleuve large et vous voulez savoir par exemple la distance d'un arbre situé de l'autre côté, désigné sur le schéma par la lettre *C* (pour simplifier ignorons la 3ème dimension). Comment faire sans traverser réellement le fleuve ?



Ancien théodolite

La démarche habituelle consiste à planter deux poteaux aux points *A* et *B*, et avec un décamètre ou une chaîne d'arpenteur et à mesurer la distance *d* qui les sépare (la ligne de base).

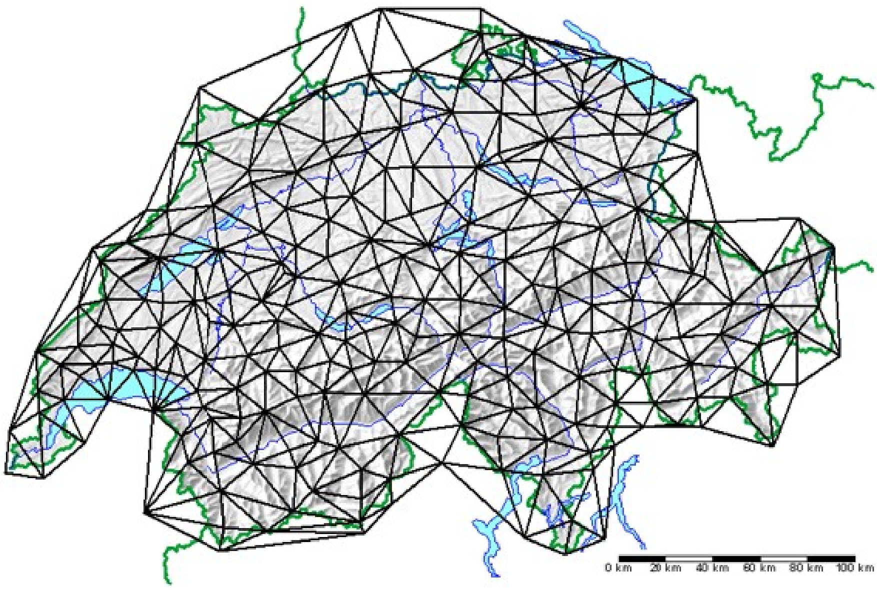
Remplacez ensuite le poteau *A* par un théodolite comme celui ci-contre, muni d'un plateau divisé en 360 degrés permettant de repérer sa direction (son azimut). En visant successivement l'arbre puis le poteau *B*, vous obtenez l'angle α du triangle *ABC*. À partir du point *B* on mesure l'angle β de façon analogue. La longueur *d* de la ligne de base et les deux angles α et β sont suffisantes pour tout connaître sur le triangle *ABC*.

La trigonométrie (en grec τριγον = triangle) était à l'origine l'art de préciser uniquement par le calcul les informations absentes. Avec suffisamment d'informations, la trigonométrie vous permet de calculer les dimensions et les angles d'un triangle préalablement défini.

Jost **Bürgi**
(1552 - 1632)

La gravure ci-dessous montre un instrument de triangulation du suisse Jost **Bürgi** utilisé pour déterminer la distance des troupes ennemies, avant de canonner.

Les arpenteurs divisaient une contrée en triangles pour la cartographier et plaçaient à chaque sommet une *balise*, souvent une plaque ronde en laiton, arrimée au sol, avec une cuvette au centre destinée à placer les tiges et les appareils de visée (George Washington faisait ce travail dans sa jeunesse). Après avoir mesuré une ligne de base - telle que AB dans l'exemple du fleuve - l'arpenteur évaluait les angles formés par ces points vers un autre point C, et utilisait la trigonométrie pour calculer les distances AC, AB et BC. Celles-ci servaient de lignes de base pour deux nouveaux triangles qui à leur tour fournissaient deux nouvelles lignes de base pour deux autres triangles, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le pays entier soit couvert d'une grille ne comportant que des distances connues.

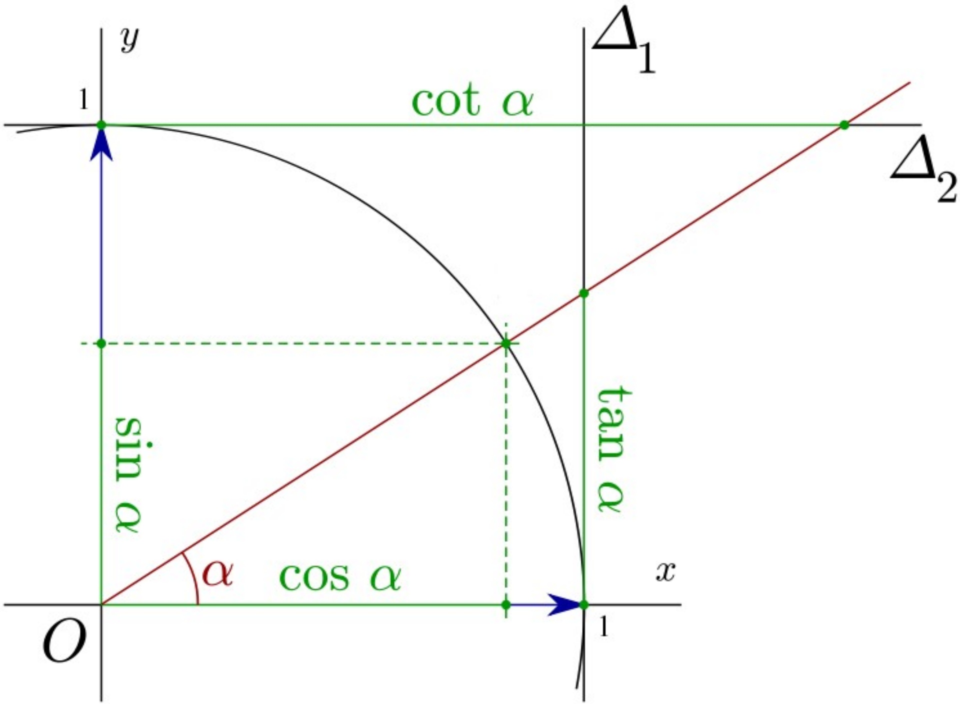


Ultérieurement, on peut ajouter une grille secondaire subdivisant les plus grands triangles dont on repère les angles par des mâts en ferraille ce qui permet de connaître des distances supplémentaires et d'établir des cartes et des plans.

2.2. Le cercle trigonométrique

Toute la trigonométrie est basée **sur le cercle trigonométrique.**

Le **cercle trigonométrique** est un cercle **centré à l'origine** et de **rayon égal à 1**.
Traçons une demi-droite partant de l'origine et formant un angle α avec la demi-droite horizontale partant de l'origine. On définit le **sinus**, le **cosinus**, la **tangente** et la **cotangente** de l'angle α comme les longueurs **signées** des segments déterminés selon le schéma ci-dessous :

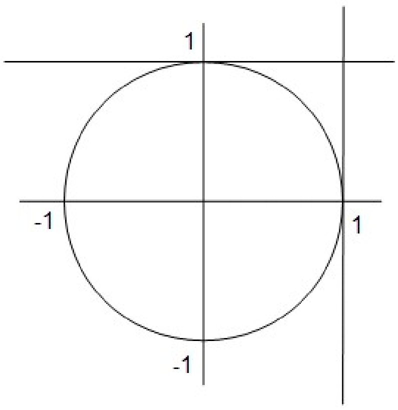


Si α = 33°, sin(α) ≅ 0.545, cos(α) ≅ 0.839, tan(α) ≅ 0.649, et cot(α) ≅ 1.539.

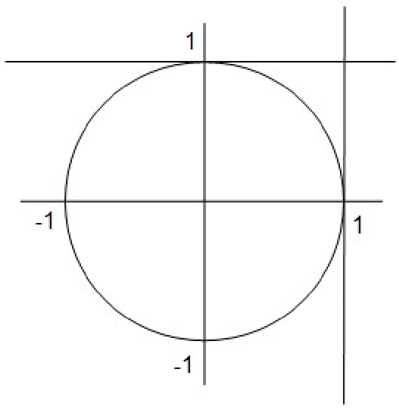
Δ_1 est la droite tangente au cercle au point (1 ; 0). C'est sur cette droite que se lira toujours la valeur tan(α), au besoin en prolongeant la demi-droite rouge en une droite.
Δ_2 est la droite tangente au cercle au point (0 ; 1). C'est sur cette droite que se lira toujours la valeur cot(α), au besoin en prolongeant la demi-droite rouge en une droite.

Exercice 2.1

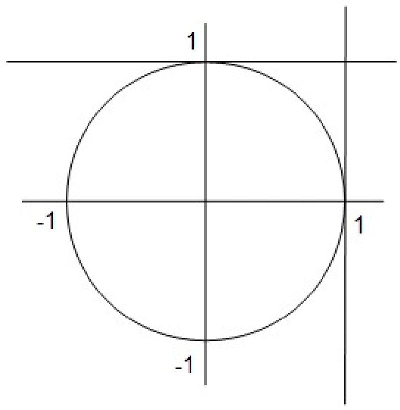
Sur les trois cercles trigonométriques ci-dessous, représentez graphiquement le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente des angles indiqués sous chaque cercle.
Pour chaque dessin, évaluez ensuite les valeurs de ces quatre mesures et contrôlez-les sur votre calculatrice.



α = 130°



α = 220° (ou α = –140°)



α = 310° (ou α = –50°)

Le **sens trigonométrique positif** est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Le **sens trigonométrique négatif** est le sens des aiguilles d'une montre. On « lit » un angle négatif dans le sens trigonométrique négatif.

Exercice 2.2

À l'aide de schémas sur le cercle trigonométrique, puis en utilisant votre calculatrice, vérifiez les relations suivantes :

Abréviations

sinus : $\sin(\alpha)$
cosinus : $\cos(\alpha)$
tangente : $\tan(\alpha)$
cotangente : $\cot(\alpha)$

a. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ **b.** $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ **d.** $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$
e. $\cos(180°-\alpha) = -\cos(\alpha)$ **f.** $\sin(180°-\alpha) = \sin(\alpha)$
g. $\tan(180°-\alpha) = -\tan(\alpha)$ **h.** $\cot(180°-\alpha) = -\cot(\alpha)$
i. $\cos(180°+\alpha) = -\cos(\alpha)$ **j.** $\sin(180°+\alpha) = -\sin(\alpha)$
k. $\tan(180°+\alpha) = \tan(\alpha)$ **l.** $\cot(180°+\alpha) = \cot(\alpha)$
m. $\sin(90°-\alpha) = \cos(\alpha)$ **n.** $\cos(90°-\alpha) = \sin(\alpha)$
o. $\sin(90°+\alpha) = \cos(\alpha)$ **p.** $\cos(90°+\alpha) = -\sin(\alpha)$

Exercice 2.3

En utilisant le cercle trigonométrique et des théorèmes de géométrie élémentaire, prouvez les relations suivantes :

a. $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

b. $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

c. $\cot(\alpha)=\dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

Ces trois relations sont **très** importantes. Il faut les savoir **par cœur** !

Remarquez qu'il n'y a pas de touche « cot » sur votre calculatrice !

2.3. Unités des angles

D'autres unités d'angles existent, par exemple :
- les **grades** :
  400 gr ↔ 360°
- les **pour-milles** :
  2000π ‰ ↔ 360°
- les **pour-milles d'artillerie** :
  6400 ‰a ↔ 360°

Les calculatrices ont une touche qui permet de faire directement certaines de ces conversions.

Jusqu'à présent, vous avez toujours mesuré les angles en **degrés**. C'est une mesure qui est facile à se représenter, mais ce n'est pas la plus pratique mathématiquement.
Le cercle trigonométrique permet de définir une autre unité de mesure : le **radian**.
Comme le cercle trigonométrique a un rayon de 1 (sans unité), la longueur de son périmètre vaut 2π (radians). On a donc la correspondance suivante :

$$2\pi \leftrightarrow 360° \quad \text{ou} \quad \pi \leftrightarrow 180°$$

Ainsi, pour convertir des degrés en radians, il faut multiplier les degrés par $\dfrac{\pi}{180}$.

Pour convertir des radians en degrés, il faut multiplier les radians par $\dfrac{180}{\pi}$.

Par convention, quand on ne précise pas l'unité d'un angle, il est exprimé en **radians**. Si vous voulez travailler en degrés, n'oubliez pas le ° !

Exercice 2.4

Convertissez les angles suivants de degrés en radians :

a. 90° ↔ ? **b.** 45° ↔ ? **c.** 30° ↔ ?
d. 120° ↔ ? **e.** 270° ↔ ? **f.** 60° ↔ ?
g. 310° ↔ ? **h.** 134° ↔ ? **i.** 222° ↔ ?

Exercice 2.5 Convertissez les angles suivants de radians en degrés :

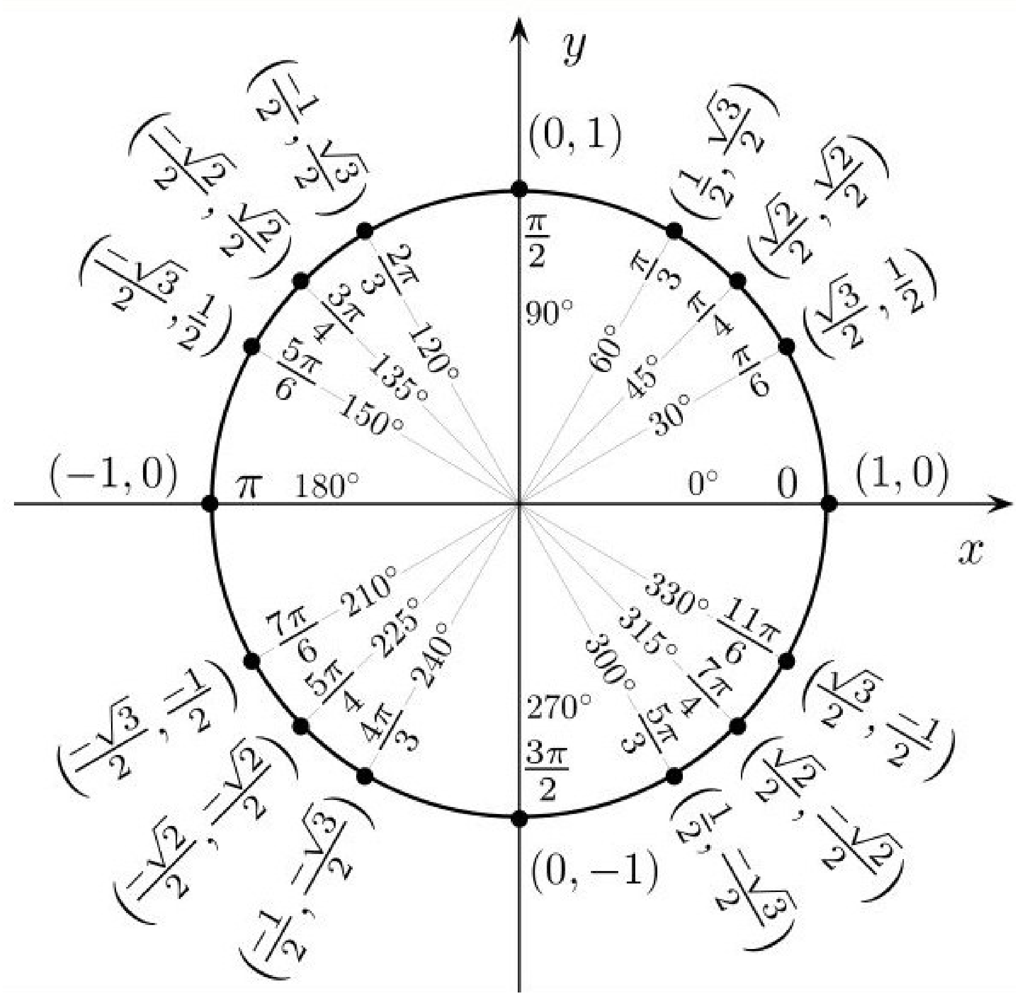
a. $\frac{3}{2}\pi \leftrightarrow ?$ **b.** $\frac{\pi}{4} \leftrightarrow ?$ **c.** $\frac{\pi}{2} \leftrightarrow ?$

d. $\frac{\pi}{3} \leftrightarrow ?$ **e.** $\frac{\pi}{8} \leftrightarrow ?$ **f.** $\frac{7}{9}\pi \leftrightarrow ?$

g. $0.5 \leftrightarrow ?$ **h.** $3.29 \leftrightarrow ?$ **i.** $4.032 \leftrightarrow ?$

Exercice 2.6 Le dessin ci-dessous donne les valeurs (cos(α), sin(α)) de seize angles courants.

Démontrez géométriquement, à l'aide de triangles, les valeurs obtenues pour 30°, 45° et 60°.



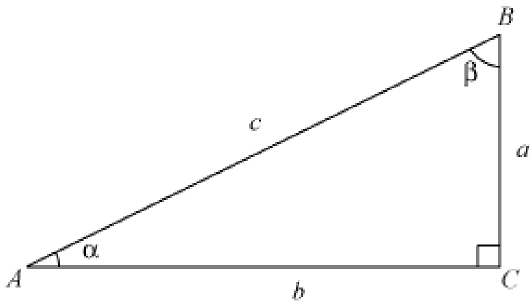
Quelques valeurs

Quelques valeurs qu'il est bon de connaître, car elles reviennent souvent.

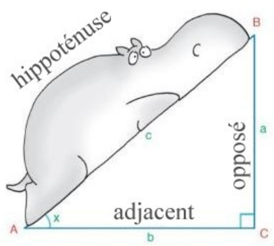
α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
tan(α)	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
cot(α)	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0

2.4. Triangles rectangles

Remarquez bien que le côté a est opposé à l'angle α, b à β et c à l'angle droit.
Les formules ci-dessous ne sont valables que si les lettres sont placées de cette façon !



Dans un triangle rectangle, on a, en utilisant les notations du dessin ci-dessus, les relations suivantes :



$\sin(\alpha)=\frac{a}{c}$	« = côté opposé sur hypoténuse »
$\cos(\alpha)=\frac{b}{c}$	« = côté adjacent sur hypoténuse »
$\tan(\alpha)=\frac{a}{b}$	« = côté opposé sur côté adjacent »

Complétez : $\sin(\beta) =$ $\cos(\beta) =$ $\tan(\beta) =$

Sauriez-vous démontrer ces relations en utilisant le cercle trigonométrique et le théorème de Thalès ?

Exercice 2.7

« Résoudre un triangle » consiste à déterminer les éléments non donnés (angles et longueurs des côtés).
Un triangle est rectangle en C (voir dessin ci-dessus). Résolvez ce triangle connaissant :

a. $c = 4.75$ et $\beta = 65.8°$
b. $c = 25.43$ et $a = 12.3$
c. $a = 48.523$ et $\alpha = 53.46°$
d. $a = 112.5$ et $\beta = 14.5°$
e. $a = 22.3$ et $b = 46.8$
f. $b = 42.8$ et $S = 1040.04$ (S est l'aire du triangle)
g*. $\alpha = 38.45°$ et $S = 8.28$
h*. $c = 17.3$ et $S = 53.44$

Exercice 2.8

Un triangle est isocèle en A. Résolvez ce triangle connaissant :

a. $\alpha = 48.5°$ et $a = 22.8$
b. $\alpha = 103.48°$ et $b = c = 4.24$
c. $a = 8.5$ et $\beta = \gamma = 72.4°$
d. $\beta = \gamma = 32.89°$ et $b = c = 18.72$

Exercice 2.9*

Connaissant la base a et l'angle α d'un triangle isocèle, calculez les côtés égaux, les hauteurs, les rayons des cercles inscrit et circonscrit, ainsi que l'aire du triangle. Pour chaque question, donnez la réponse littérale ne comprenant dans le membre de droite que a et α.
Application numérique : $a = 15$, $\alpha = 40°$

Exercice 2.10

Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 mètres lorsque le soleil est élevé de 37.5° au-dessus de l'horizon ?

Exercice 2.11

a. Calculez le périmètre d'un polygone régulier convexe à sept côtés inscrit dans un cercle de rayon 2.

b. Un polygone régulier convexe à quinze côtés a une aire égale à 1500. Calculez la longueur de son côté et le rayon du cercle dans lequel il est inscrit.

Exercice 2.12

Un chat aperçoit un arbre sous un angle de 38.6°. Il recule de 25 mètres et voit alors l'arbre sous un angle de 18.3° (on admettra que les yeux du chat et le pied de l'arbre sont au même niveau).

a. À quelle distance de l'arbre le chat se trouvait-il au début ?

b. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 2.13*

Un chat voit un arbre de l'autre côté d'un canal, juste en face de lui, sous un angle de 35°. Il se déplace de 30 mètres le long de la rive et voit l'arbre sous un angle de 19°.

a. Quelle est la largeur du canal ?

b. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 2.14

Deux observateurs, placés à la même altitude et distants de 1350 mètres, visent au même moment une montgolfière située entre eux. Cette montgolfière est dans le plan vertical contenant les deux observateurs. Les angles d'élévation sont de 65.4° et 76.5°.
Quelle est l'altitude de la montgolfière ?

Exercice 2.15*

Deux poulies, dont les diamètres sont 122 cm et 88 cm, sont reliées par une courroie de transmission tendue. La distance entre les axes des poulies est 400 cm. Quelle est la longueur de la courroie ?

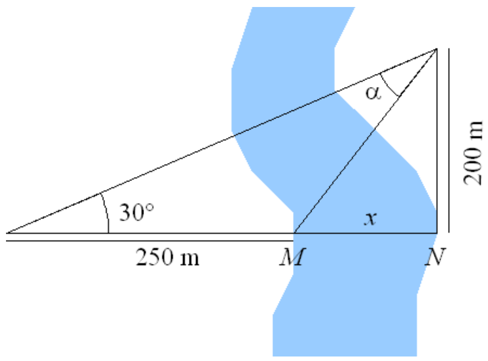
Exercice 2.16

Cet angle s'appelle *l'élongation*. Il est maximum quand le Soleil, la Terre et Vénus sont en *quadrature*.

Quand la planète Vénus est observée depuis la Terre pendant une certaine période, elle paraît se mouvoir en avant et en arrière le long d'un segment de droite, le Soleil étant au milieu. À la distance apparente maximale du Soleil, l'angle Soleil-Terre-Vénus est d'environ 47°.
Sachant que la distance Terre-Soleil vaut environ $148.64 \cdot 10^6$ km, estimez la distance séparant Vénus du Soleil.

Exercice 2.17

Pour déterminer la largeur du Nil entre deux points M et N, les Égyptiens utilisaient un procédé semblable à celui présenté ci-dessous (vue prise d'avion).



Calculez x et α.

Exercice 2.18

Rayon de la Terre : 6371 km

Vous venez de plaquer l'ex-amour de votre vie ! Vous l'abandonnez sans remords sur la jetée (altitude de ses yeux humides : 4 m) et ramez vers le large (altitude de vos yeux impitoyables : 1 m). À quelle distance du rivage échapperez-vous à son regard déchirant, en disparaissant de son horizon ?

Exercice 2.19*

Indication : $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

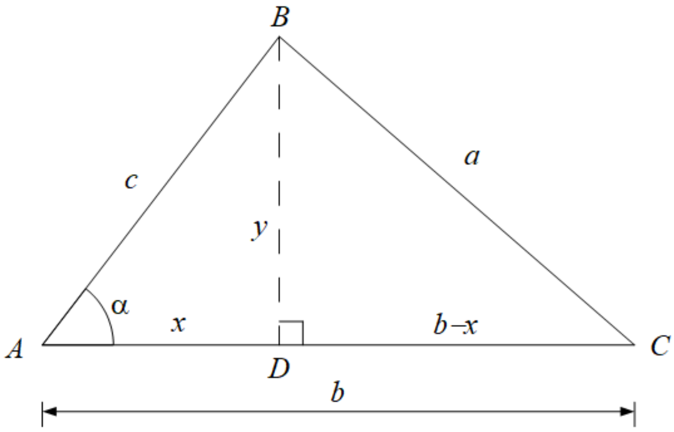
Un piédestal surmonté d'une statue est érigé au bord d'une rivière. Le piédestal a pour hauteur 12.5 m et la statue 15.2 m. Un chat placé sur l'autre bord de la rivière voit sous un même angle la statue et le piédestal (on admettra que les yeux du chat sont au niveau du pied du piédestal).
Quelle est la largeur de la rivière ?

2.5. Triangles quelconques

Le théorème du cosinus est aussi connu sous le nom de **théorème d'al-Kashi** ou encore **théorème de Pythagore généralisé**.

Jamshid **al-Kashi**
(1380 – 1429)

Nous allons utiliser les deux triangles ci-dessous pour trouver deux théorèmes, appelés **théorème du sinus** et **théorème du cosinus**.



Théorème du cosinus

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle *BCD*

On a : $\cos(\alpha)=\dfrac{x}{c} \Rightarrow x=c\cdot\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)=\dfrac{y}{c} \Rightarrow y=c\cdot\sin(\alpha)$

$$\begin{aligned}
a^2 &= (b-x)^2+y^2\\
&= (b-c\cdot\cos(\alpha))^2+(c\cdot\sin(\alpha))^2\\
&= (b^2-2bc\cdot\cos(\alpha)+c^2\cdot\cos^2(\alpha))+(c^2\cdot\sin^2(\alpha))\\
&= b^2+c^2\cdot(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha))-2bc\cdot\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Comme $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$, nous avons la relation :

Théorème du cosinus

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos(\alpha)$$

En faisant une permutation cyclique des lettres *a*, *b*, *c* et α, β, γ, nous obtenons les formules pour b^2 et c^2 (voir résumé page suivante).

Théorème du sinus

Utilisons à nouveau les deux triangles donnés plus haut pour trouver deux expressions de la longueur *y*.

$\sin(\alpha)=\dfrac{y}{c}$ et $\sin(\gamma)=\dfrac{y}{a}$ nous conduit à deux expressions de *y* :

$y=c\cdot\sin(\alpha)$ et $y=a\cdot\sin(\gamma)$.

Ce qui nous donne : $a\cdot\sin(\gamma)=c\cdot\sin(\alpha) \Rightarrow \dfrac{a}{\sin(\alpha)}=\dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

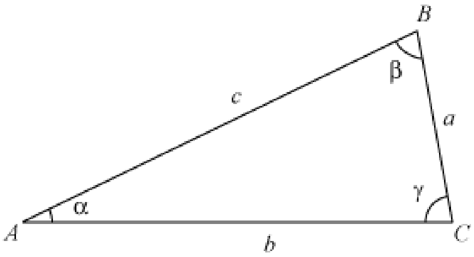
Un raisonnement similaire donne la relation $\dfrac{a}{\sin(\alpha)}=\dfrac{b}{\sin(\beta)}$ qui, combinée avec le premier résultat, nous fournit :

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Résumé

Remarquez bien que a est toujours opposé à α, b à β et c à γ !



Dans un triangle quelconque, on a, en utilisant les notations du dessin ci-dessus :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Attention ! Dans un triangle, il y a deux solutions pour l'équation $\sin(\alpha) = k$:
$\alpha_1 = \arcsin(k)$
$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Aire d'un triangle quelconque

Démontrez cette formule !

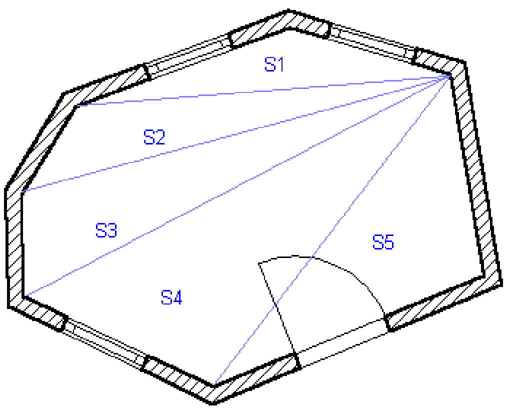
$$S = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ca\sin(\beta)$$

Formule d'Héron (aire d'un triangle connaissant ses trois côtés)

Héron d'Alexandrie (fin du 1er siècle après J.-C.) a démontré cette formule déjà connue d'Archimède.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Calculer l'aire d'une pièce ou d'un terrain n'est pas toujours facile, puisque les pièces sont rarement des triangles ou des rectangles parfaits. Une manière de faire classique est de créer une *triangulation* : on découpe la pièce en triangles, dont il sera facile de calculer les aires avec la formule d'Héron (il faudra juste mesurer les longueurs des côtés des triangles). En additionnant toutes ces aires, on obtiendra l'aire totale.



Exercice 2.20

Résolvez les triangles ABC ci-dessous, puis calculez leur aire.

Attention ! Le théorème du sinus est dangereux pour calculer les angles, car il y a deux solutions possibles. Par contre, pas de souci pour calculer les côtés.

a.	$a = 70.24$	$b = 82.12$	$\gamma = 30.69°$
b.	$\beta = 58.25°$	$\gamma = 39.38°$	$a = 20.46$
c.	$a = 41.94$	$b = 96.92$	$c = 107.26$
d.	$a = 20.43$	$b = 5.63$	$c = 27.84$
e.	$\beta = 30.65°$	$a = 98.06$	$b = 364.04$
f.	$\beta = 39.37°$	$a = 460.14$	$b = 335.59$

Exercice 2.21

rayon de la Terre : 6370 km

Un observateur, couché sur le sol, voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur ?

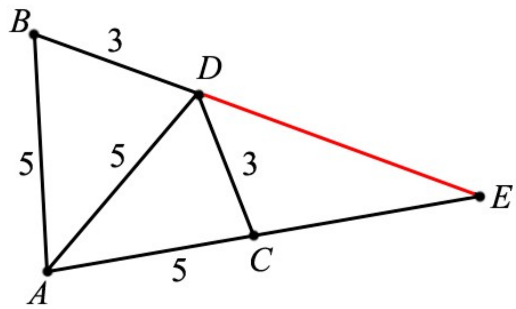
Exercice 2.22

Un bateau quitte le port à 13h00 et fait route dans la direction 55°W à la vitesse de 38 km/h (les angles sont mesurés avec la direction N). Un deuxième bateau quitte le même port à 13h30 et vogue dans la direction 70°E à 28.5 km/h.
Calculez la distance séparant les bateaux à 15h00.

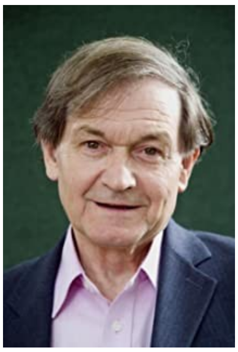
Exercice 2.23

Les proportions du dessin ne sont pas exactes.

Soit le triangle ABE ci-dessous contenant trois petits triangles. Quelle est la longueur du segment $\overline{DE}$?



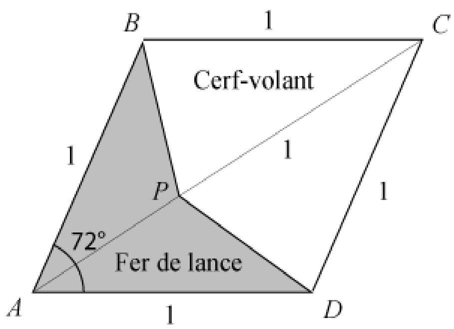
Exercice 2.24



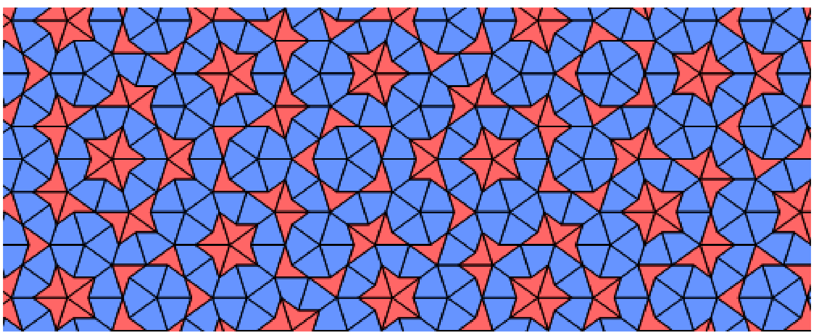
Roger **Penrose**
(né en 1931)

Physicien et mathématicien britannique, prix Nobel de physique en 2020.
En 1974, il publie un article où il présente ses premiers pavages non périodiques : les **pavages de Penrose** (*Pentaplexity*, Bulletin of the Institute for Mathematics and its Applications, 10, 266-271, 1974).

Les pavés de *Penrose* ont la forme d'un losange $ABCD$ dont la longueur des côtés est 1 et dont un angle intérieur fait 72°. On situe un point P sur la diagonale AC à une distance 1 du sommet C. De ce point partent les deux segments de droite PB et PD rejoignant les deux autres sommets du losange, comme le montre la figure ci-dessous. Les deux pavés ainsi formés sont appelés « fer de lance » et « cerf-volant ».

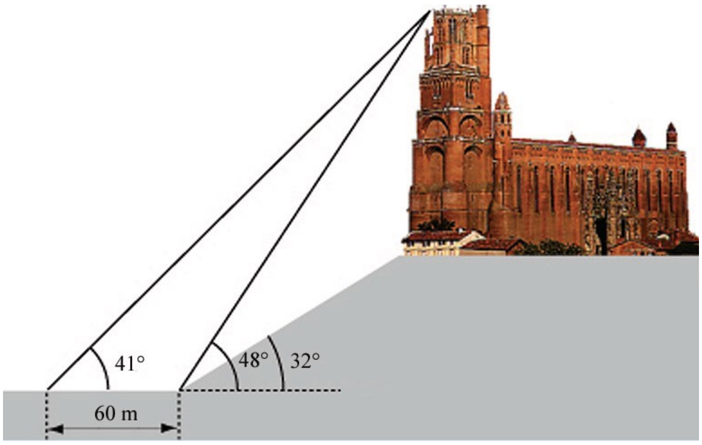


a. Calculez les mesures en degrés des angles $\widehat{BPC}$, $\widehat{APB}$ et $\widehat{ABP}$.
b. Calculez la longueur du segment BP à 0.001 près. Quel est ce nombre ?
c. Calculez l'aire d'un fer de lance et d'un cerf-volant à 0.01 près.



Pavage apériodique de Penrose composé de cerfs-volants et de fers de lance

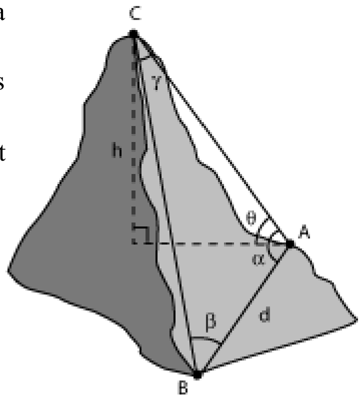
Exercice 2.25 Une basilique est située au sommet d'une colline (voir schéma ci-dessous). Quelle est la hauteur de cette basilique ?



Exercice 2.26 Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points A et B au bas de la montagne d'où l'on voit le sommet.
A et B ne sont pas forcément à la même altitude, mais ils sont séparés d'une distance d.
On mesure les angles $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A.

Quelle est l'altitude de C si celle de A est h_A ?

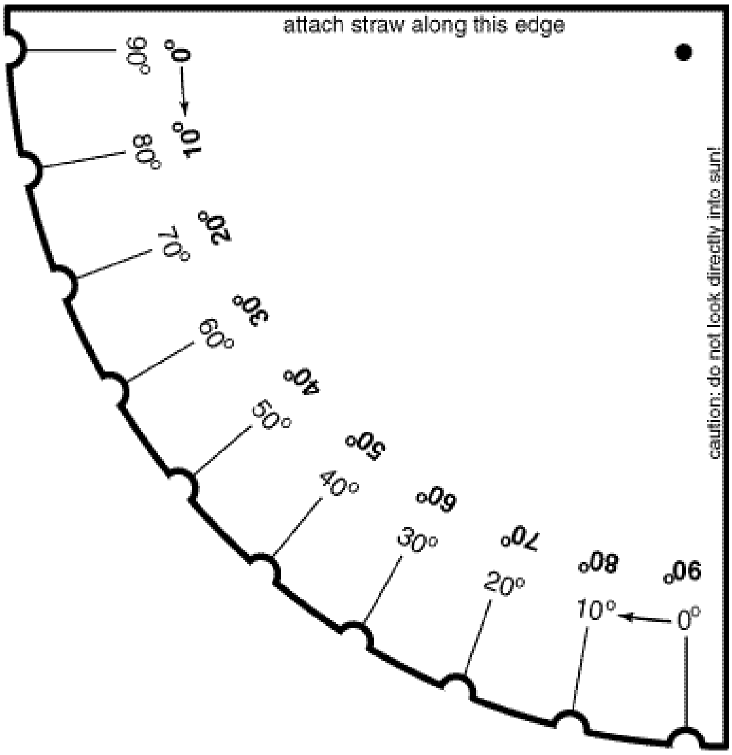
Application numérique :
$d = 450$ m, $h_A = 920$ m,
$\alpha = 35.4°$, $\beta = 105.8°$, $\theta = 23.5°$

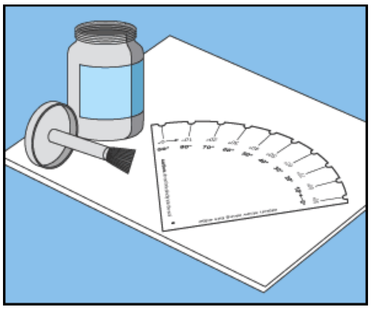


2.6. Ce qu'il faut absolument savoir

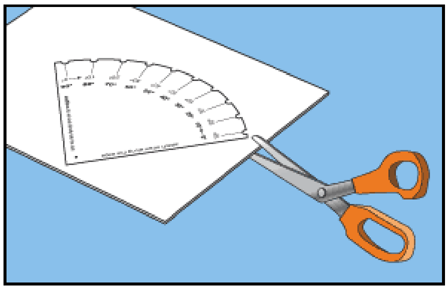
Utiliser le cercle trigonométrique pour définir le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle	❏ ok
Convertir des degrés en radians et vice-versa	❏ ok
Résoudre des triangles rectangles	❏ ok
Connaître et appliquer le théorème du sinus	❏ ok
Connaître et appliquer le théorème du cosinus	❏ ok
Résoudre des triangles quelconques	❏ ok

Fiche bricolage : un astrolabe

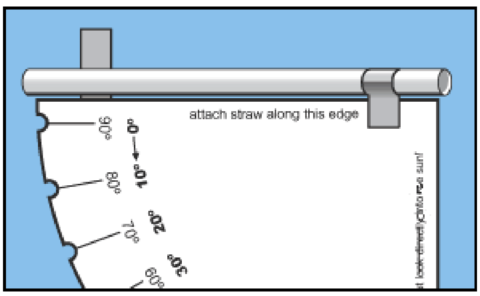




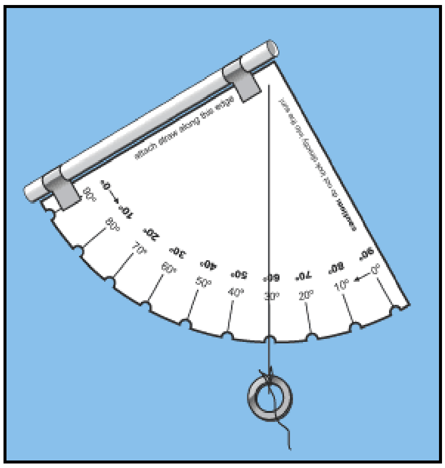
1. Coller le patron ci-dessus sur un carton fort.



2. Découper le carton.



3. Attacher une paille le long du bord indiqué



4. Fixer une ficelle lestée passant par le trou que vous aurez fait à la place du point noir.

La ficelle indique l'angle d'inclinaison de l'objet qu'on regarde à travers la paille.

Attention ! Ne fixez jamais le Soleil ! C'est très dangereux pour vos yeux !