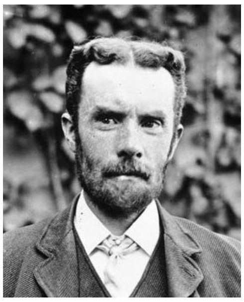
3. Calcul vectoriel

3.1. Les vecteurs

William Rowan **Hamilton**

(1805 - 1865)



Oliver **Heaviside**

(1850 - 1925)

L'Irlandais Sir William **Hamilton** (1805-1865) fut l'un des premiers à utiliser les vecteurs et il est probablement l'inventeur du mot (mot venant du latin *vehere*, qui signifie « porter »). L'Allemand Hermann **Grassman** (1809-1877) introduisit la notation vectorielle pour des problèmes de physique. L'Américain **Gibbs** (1839-1903) et l'Anglais **Heaviside** (1850-1925), disciples de Hamilton, donnent au calcul vectoriel sa forme quasi définitive, mais ce type de « calcul » met assez de temps à s'introduire en France. Michel **Chasles** (1793-1880), avait déjà pressenti l'importance du sens sur un axe sans aller jusqu'à la notion de vecteur.

À l'origine, un **vecteur** est un objet de la géométrie euclidienne. À deux points, Euclide associe leur distance. Or, un couple de points porte une charge d'information plus grande : ils définissent aussi une direction et un sens. Le vecteur synthétise ces informations.
La notion de vecteur peut être définie en dimension deux (le plan) ou trois (l'espace euclidien usuel). Elle se généralise à des espaces de dimension quelconque. Cette notion, devenue abstraite et introduite par un système d'axiomes, est le fondement de la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire.
Le vecteur permet, en physique, de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre ou une fonction numérique seuls. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, une force ou un champ électrique, la direction et le sens sont indispensables. Les vecteurs s'opposent aux grandeurs scalaires décrites par un simple nombre, comme la masse, la température, etc.

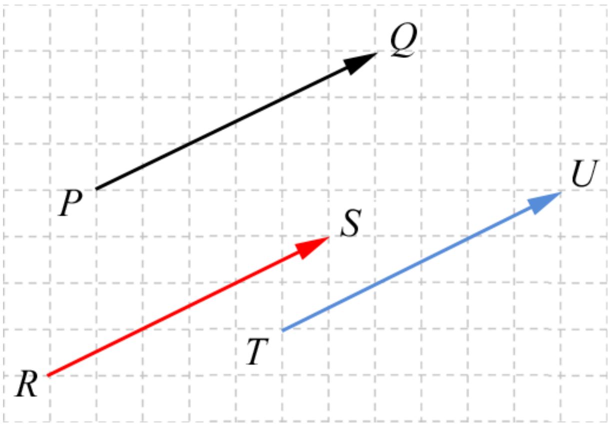
En termes simples, un **vecteur** est une grandeur qui a une **intensité**, une **direction** et un **sens**. Il est commode de le représenter par une flèche.

Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux s'ils ont la **même intensité** (longueur), la **même direction** et le **même sens**.

Par exemple, les trois vecteurs de la figure ci-dessous sont égaux, même s'ils ont des points initiaux et terminaux différents. Ces trois flèches représentent donc le même vecteur. Un vecteur n'a pas de « point d'attache ».

Les trois vecteurs ci-contre sont les **représentants** d'un même vecteur car ils ont même sens, même direction et même norme. On peut donc désigner ce vecteur par un nom unique, par exemple :

$$\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{TU}$$

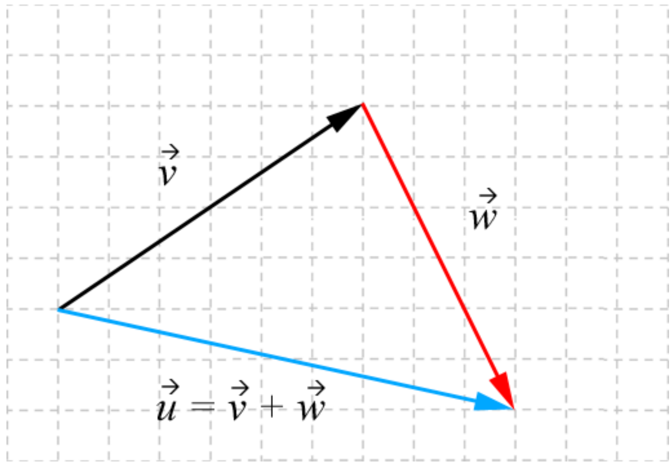


Le vecteur qui a une longueur de 0 est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$.

Le vecteur nul n'a évidemment pas de direction, donc pas de sens.

Addition de vecteurs

La somme $\vec{v}+\vec{w}$ de deux vecteurs est définie comme suit : on met les deux vecteurs bout à bout de sorte que le point terminal de $\vec{v}$ coïncide avec le point initial de $\vec{w}$. Le vecteur $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$ relie le point initial de $\vec{v}$ au point terminal de $\vec{w}$.



Les quatre propriétés de d'addition

i. L'addition de vecteurs est **commutative**. Cela signifie que, si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$$

ii. L'addition de vecteurs est aussi **associative**. Cela veut dire que, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors

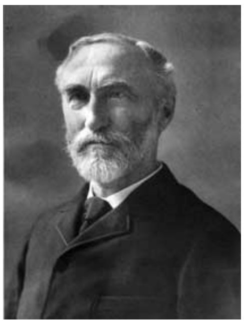
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

iii. L'addition **a un élément neutre** : le vecteur nul. En effet :

$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$$

iv. Enfin, si $\vec{v}$ est un vecteur, alors $-\vec{v}$ est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que $\vec{v}$, mais de sens opposé. Donc

$$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$$

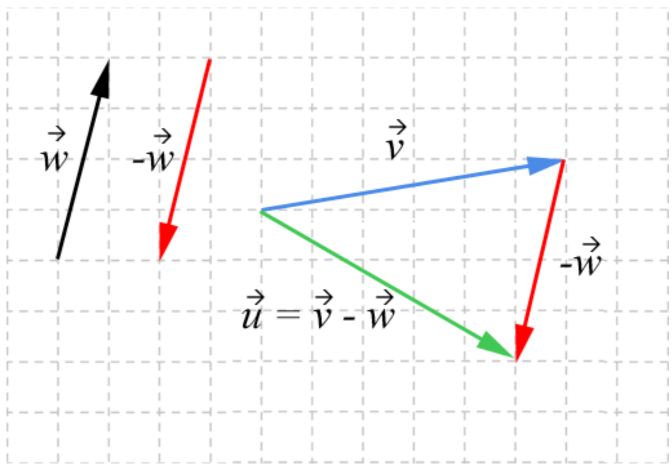


Josiah Willard **Gibbs**
(1839 - 1903)

La différence $\vec{v}-\vec{w}$ de deux vecteurs est définie comme

$$\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$$

Hermann Günter **Grassmann**
(1809 - 1877)

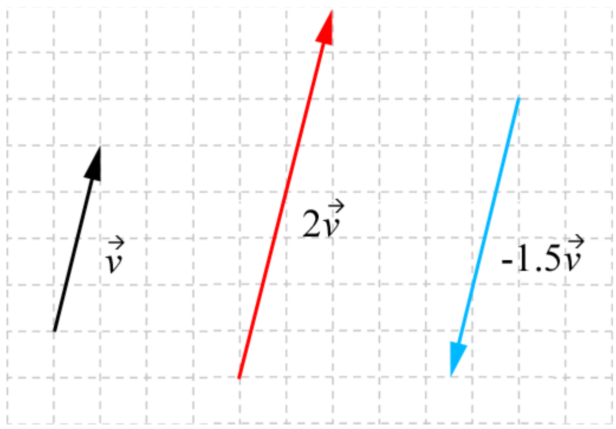


Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Quand on manipule des vecteurs, on utilise le mot « scalaire » à la place de « nombre réel ». Les scalaires sont souvent désignés par une lettre grecque.

Si λ est un scalaire et $\vec{v}$ un vecteur, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est défini comme suit :

1. Si $\lambda > 0$, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur dont l'intensité a λ fois l'intensité de **v** et dont le sens est le même que $\vec{v}$.
2. Si $\lambda < 0$, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur dont l'intensité a λ fois l'intensité de **v** et dont le sens est l'opposé de celui de $\vec{v}$.
3. Si $\lambda = 0$ ou si $\vec{v}=\vec{0}$, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur nul.



Propriétés du produit

v. $\lambda(\vec{v}+\vec{w})=\lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}$

vi. $(\lambda+\mu)\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$

vii. $\lambda(\mu\vec{v})=(\lambda\mu)\vec{v}$

viii. $1\vec{v}=\vec{v}$

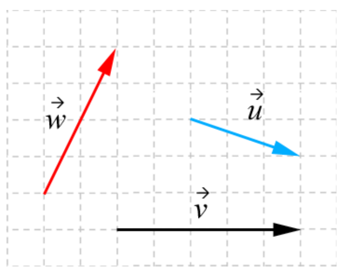
ix. $0\vec{v}=\vec{0}$

Ces propriétés se vérifient aisément sur un petit dessin. Essayez !

Exercice 3.1

Utilisez les vecteurs de la figure ci-dessous pour dessiner, sur une feuille quadrillée, les vecteurs suivants :

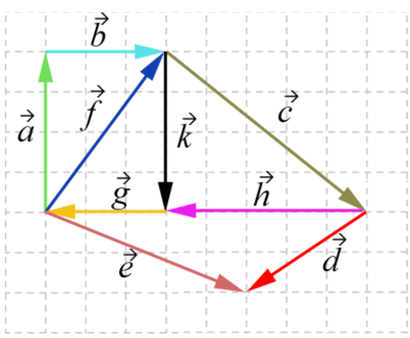
a. $\vec{v}+\vec{w}$
b. $\vec{u}+\vec{v}$
c. $3\vec{v}$
d. $4\vec{w}$
e. $\vec{v}-\vec{w}$
f. $\vec{u}-\vec{v}$
g. $3(\vec{v}+\vec{u})-2\vec{w}$
h. $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$

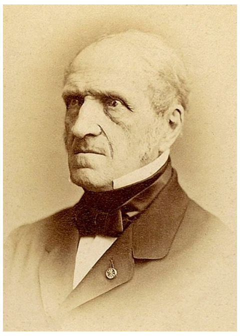


Exercice 3.2

Donnez trois possibilités pour **b.** (il y en a une infinité).

a. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}+\vec{b}=\vec{f}$?
b. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}+\vec{d}=\vec{e}$?
c. Exprimez $\vec{c}$ par rapport à $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$.
d. Exprimez $\vec{g}$ par rapport à $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{k}$.
e. Exprimez $\vec{e}$ par rapport à $\vec{d}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$.
f. Exprimez $\vec{e}$ par rapport à $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.
g. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{k}+\vec{g}$?
h. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{h}$?





Michel **Chasles**
(1793 - 1880)

La **relation de Chasles** porte le nom de Michel **Chasles**, mathématicien français du 19e siècle. Elle était connue depuis déjà quelque temps mais les travaux de Michel Chasles en géométrie justifient qu'on lui en attribue en quelque sorte la paternité.
Initialement associée à la géométrie, pour décrire une relation entre vecteurs dans un espace affine, la relation de Chasles s'écrit de la manière suivante :

Pour des points A, B et C d'un espace affine : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Les deux relations suivantes se déduisent de la relation de Chasles.
Quels que soient les points A et B du plan et l'origine O, on a les deux relations suivantes :

$$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

Exercice 3.3

Soient A, B, C, D et E cinq points quelconques du plan. Simplifiez au maximum les expressions suivantes, en utilisant les relations de Chasles :

$\vec{a}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}$ $\qquad$ $\vec{b}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$

$\vec{c}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ $\qquad$ $\vec{d}=3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DB}$

$\vec{e}=87\,\overrightarrow{AC}+82\,\overrightarrow{CD}+3\,\overrightarrow{AD}$

Exercice 3.4

Soient trois points A, B et C non alignés.
Soit le point G défini par la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Démontrez que pour tout point M du plan, on a la relation $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

3.2. Représentation des vecteurs dans le plan

Représentation des vecteurs dans le plan

On utilise un système de coordonnées rectangulaires pour représenter les vecteurs dans le plan. Appelons $\vec{i}$ un vecteur de longueur 1 dont la direction est celle de l'axe Ox et $\vec{j}$ un vecteur de longueur 1 dont la direction est celle de l'axe Oy.

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Il est tout à fait possible de prendre deux autres vecteurs pour former une base, pourvu qu'ils ne soient pas multiples. Il est à noter que l'ordre des vecteurs a de l'importance.

En deux dimensions, les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment ce que l'on appelle la **base canonique**.
Elle est **orthonormée** : les deux vecteurs sont orthogonaux et ont une longueur de 1.

Si $\vec{v}$ est un vecteur ayant son point initial à l'origine O et son point terminal en $P(a\,;b)$, alors on peut représenter $\vec{v}$ comme combinaison des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$$\vec{v}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Les scalaires a et b sont appelés les **composantes** du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$, a étant la composante dans la direction $\vec{i}$ et b la composante dans la direction $\vec{j}$.
En n dimensions, les vecteurs ont n composantes.

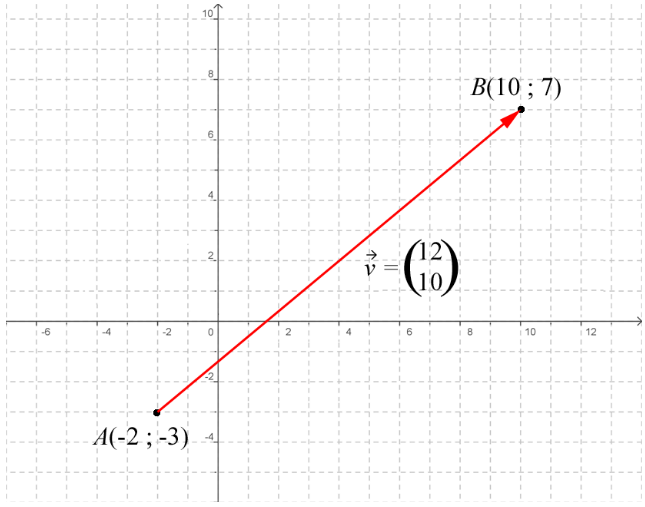
Supposons qu'un vecteur $\vec{v}$ a pour point initial $P_1(x_1\,;y_1)$ et comme point terminal $P_2(x_2\,;y_2)$. On a alors :

$$\vec{v}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$$

Exemple

$\vec{v}=\begin{pmatrix}10-(-2)\\7-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix}$

Remarquez que les coordonnées d'un point sont écrites horizontalement, tandis les composantes d'un vecteur sont écrites verticalement.



Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales.

Exercice 3.5

Soit le vecteur $\vec{v}$ ayant comme point initial P et comme point terminal Q. Écrivez $\vec{v}$ sous la forme $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}$ et sous la forme $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

a. $P(0 ; 0)$; $Q(3 ; 4)$ **b.** $P(3 ; 2)$; $Q(5 ; 6)$
c. $P(-2 ; -1)$; $Q(6 ; -2)$ **d.** $P(-3 ; 7)$; $Q(0 ; 0)$

Définitions

Nous pouvons à présent définir l'addition, la soustraction et le produit en utilisant les composantes d'un vecteur.
Soient $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ deux vecteurs et λ un scalaire. Alors :

$\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$ $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c\\b-d\end{pmatrix}$

$\lambda\vec{v}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda b\end{pmatrix}$

Norme d'un vecteur

Les quatre termes suivants sont synonymes : **norme**, **intensité**, **longueur**, **module**.

Si $\vec{v}$ est un vecteur, on utilise le symbole $\|\vec{v}\|$ pour représenter la **norme** de $\vec{v}$.

Puisque $\|\vec{v}\|$ sera la longueur du vecteur, la norme doit avoir les cinq propriétés suivantes :

Soit $\vec{v}$ un vecteur et λ un scalaire, alors

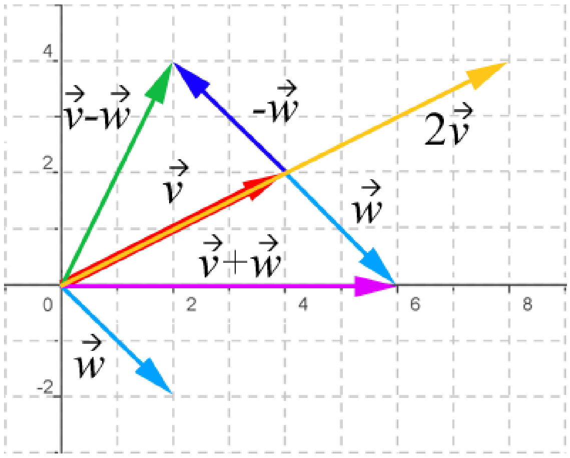
(a) $\|\vec{v}\|\geq 0$
(b) $\|\vec{v}\|=0$ si et seulement si $\vec{v}=\vec{0}$
(c) $\|-\vec{v}\|=\|\vec{v}\|$
(d) $\|\lambda\vec{v}\|=|\lambda|\|\vec{v}\|$
(e) $\|\vec{v}+\vec{w}\|\leq\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$ (inégalité du triangle)

Un vecteur $\vec{v}$ pour lequel la norme $\|\vec{v}\|=1$ est qualifié de vecteur **unitaire.**

C'est le théorème de Pythagore.

Dans le plan muni d'une base orthonormée, on a : $\left\|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$

Exemple récapitulatif



Sauf avis contraire, on travaillera toujours dans la base canonique.

$\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $\|\vec{w}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$2\vec{v}=2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ $\|2\vec{v}\|=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Pour tout vecteur non nul, le vecteur $\vec{u}=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ est un **vecteur unitaire** qui a la même direction et le même sens que $\vec{v}$.

Exemple Soit $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. La norme de ce vecteur est $\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

On peut rendre unitaire n'importe quel vecteur (non nul) en le multipliant par l'inverse de sa norme.

Le vecteur unitaire ayant même direction et même sens est $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$.

Exercice 3.6

Faites les opérations ci-dessous en utilisant $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

a. $\vec{v}+\vec{w}$
b. $\vec{w}-\vec{v}$
c. $-5\vec{v}$
d. $\|\vec{v}\|$
e. $2\vec{v}+3\vec{w}$
f. $3\vec{v}-2\vec{w}$
g. $\|\vec{v}-\vec{w}\|$
h. $\|\vec{v}\|-\|\vec{w}\|$
i. rendez unitaire le vecteur $\vec{v}$.

Exercice 3.7

Trouvez un vecteur $\vec{v}$ dont la norme est égale à 4 et dont la composante dans la direction $\vec{i}$ est deux fois plus grande que la composante dans la direction $\vec{j}$.

Exercice 3.8

La formule du point **c** vous sera très utile par la suite.

a. Trouvez un vecteur $\vec{v}$ de direction $-\vec{i}+3\vec{j}$ et dont la norme est égale à 8.
b. Trouvez un vecteur $\vec{w}$ incliné de 32° par rapport à l'horizontale et dont la norme est égale à 7.
c. Donnez la formule permettant de calculer les composantes d'un vecteur connaissant son angle (α) avec l'horizontale et sa longueur (L).

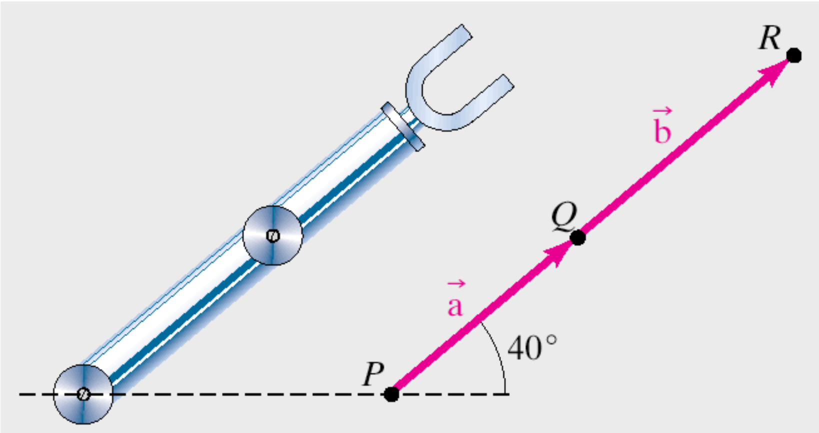
Exercice 3.9

Si le vent souffle à 20 km/h dans la direction N40°W (angle de 40° vers l'ouest par rapport au nord), exprimez sa vitesse par un vecteur $\vec{v}$.

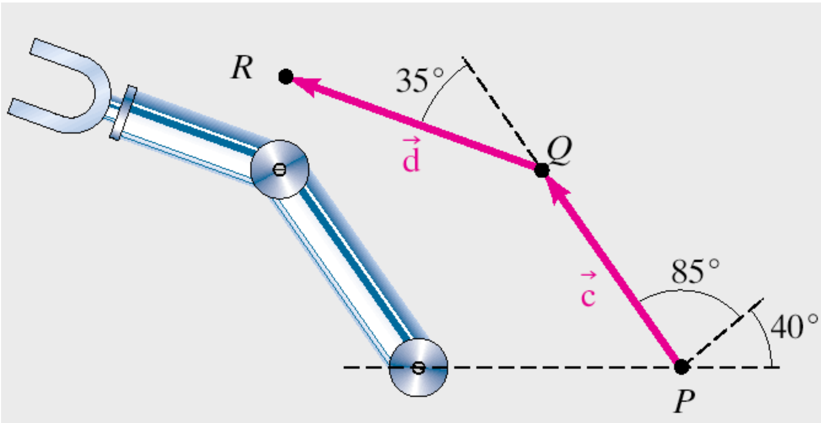
Exercice 3.10

Dans la réalité, on doit parfois résoudre le problème inverse de cet exercice : connaissant le point *P*, quels angles faut-il pour atteindre le point *R* ?
En infographie, en robotique, en chimie et surtout en animation, la **cinématique inverse** (souvent abrégée **IK**, de l'anglais *inverse kinematics*) est un procédé par lequel on peut déterminer les positions et rotations d'articulations d'un modèle afin d'obtenir une pose. Par exemple, pour un modèle humain, on peut déterminer la torsion des poignets, des coudes, des doigts... automatiquement pour atteindre de l'index un objet. C'est une démarche relativement intuitive pour l'animateur, qui voit son travail simplifié, mais relativement complexe pour l'ordinateur. C'est également un élément fondamental en robotique, où on peut fixer le programme en termes d'objectifs, et déterminer par cinématique inverse le moyen de l'atteindre.

a. La première figure représente le bras d'un robot. Ce bras peut pivoter aux articulations *P* et *Q*. Le bras supérieur (représenté par $\vec{a}$) fait 37.5 cm de long et l'avant-bras, y compris la main (représenté par $\vec{b}$), a une longueur de 42.5 cm. Calculez les coordonnées du point *R* situé sur la main.



b. Partant de la position ci-dessus, le bras supérieur est pivoté de 85° et l'avant-bras de 35°, comme le montre la deuxième figure. Calculez les nouvelles coordonnées du point R.



Applications

Les forces fournissent un exemple de quantités physiques qui peuvent être représentées avantageusement par des vecteurs ; en effet deux forces se combinent comme deux vecteurs s'additionnent. Comment savons-nous cela ? Ce sont des expériences de laboratoire qui ont corroboré cette hypothèse.

Ainsi, si deux forces (ou vitesses) $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ agissent simultanément sur un objet, le vecteur somme $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ produit le même effet.

La force $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ est parfois appelée la **résultante** de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

Exercice 3.11

D'après ses instruments de bord, un avion se déplace à 500 km/h dans la direction est. Si le vent souffle à une vitesse de 60 km/h dans la direction du nord-ouest, déterminez la vitesse de l'avion par rapport au sol.

Exercice 3.12

Vu du sol, un avion se déplace vers le nord-ouest à une vitesse constante de 250 miles par heure, poussé par un vent d'est de 50 miles par heure. Quelle serait la vitesse de l'avion s'il n'y avait plus de vent ?

Exercice 3.13*

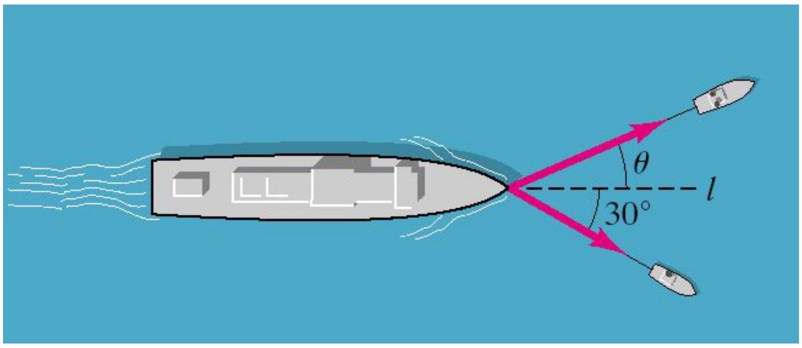
Un navire vogue vers le Sud-Est. Ses moteurs le propulsent à une vitesse de 20 nœuds. Il entre dans une zone où un courant marin de 4 nœuds le dévie vers le Nord.

a. Comment le bateau doit-il modifier son cap pour maintenir son déplacement vers le Sud-Est ?

b. Quelle sera la vitesse du navire vu de la côte ?

Exercice π

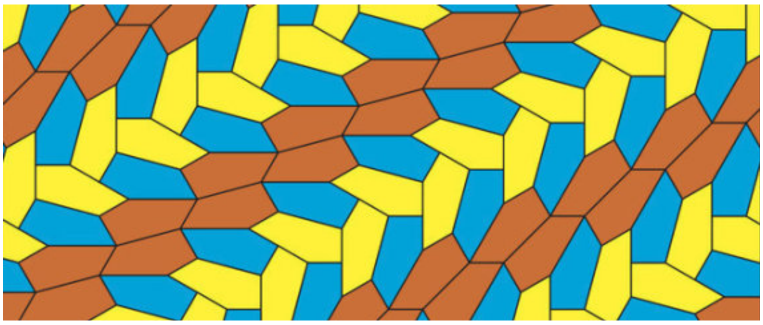
La figure ci-dessous montre deux remorqueurs qui ramènent un navire vers un port.

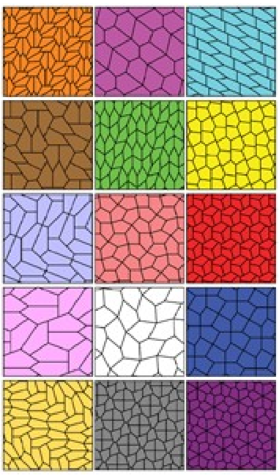


Le remorqueur le plus puissant génère une force de 20'000 N sur son câble, le plus petit une force de 16'000 N. Le navire suit une ligne droite *l*. Calculez l'angle que forme le plus puissant remorqueur avec la droite *l*.

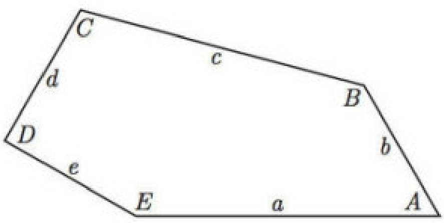
Exercice 3.15

En 2015, une équipe de mathématiciens a secoué le monde des maths en découvrant un nouveau type de pentagone capable de paver un plan : les tuiles peuvent s'assembler sur une surface plane sans qu'elles ne se chevauchent ni ne laissent de trous.





Seuls quinze pentagones permettant de paver le plan ont été découverts jusqu'ici (voir ci-contre). On n'en avait plus découvert depuis trente ans. On ne sait pas combien il y en a en tout.



$A = 60°$ $\quad a = 1$
$B =$ $\quad b = 1/2$
$C =$ $\quad c =$
$D = 90°$ $\quad d = 1/2$
$E = 150°$ $\quad e = 1/2$

Que valent les angles *B* et *C* et quelle est la longueur du côté *c* ?

3.3. Le produit scalaire

Le **produit scalaire** est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'où son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité.

Définition du produit scalaire

Si $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan, alors le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{w}$ est défini ainsi :

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=ac+bd \qquad (1)$$

Exemples

Soient $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculez :

a. $\vec{v}\cdot\vec{w}$ **b.** $\vec{w}\cdot\vec{v}$ **c.** $\vec{v}\cdot\vec{v}$
d. $\vec{w}\cdot\vec{w}$ **e.** $\|\vec{v}\|$ **f.** $\|\vec{w}\|$

Solutions

a. $\vec{v}\cdot\vec{w} = 2\cdot5 + (-3)\cdot3 = 1$ **b.** $\vec{w}\cdot\vec{v} = 5\cdot2 + 3\cdot(-3) = 1$
c. $\vec{v}\cdot\vec{v} = 2\cdot2 + (-3)\cdot(-3) = 13$ **d.** $\vec{w}\cdot\vec{w} = 5\cdot5 + 3\cdot3 = 34$
e. $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ **f.** $\|\vec{w}\|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

Que remarquez-vous ?

Propriétés du produit scalaire

Les résultats obtenus dans l'exemple ci-dessus suggèrent quelques propriétés générales.

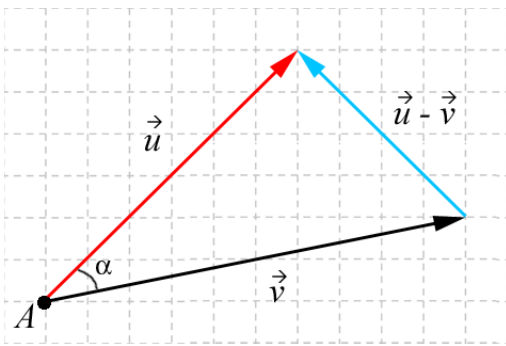
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	*Commutativité*	(2)
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	*Distributivité*	(3)
$\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$		(4)
$\vec{0}\cdot\vec{v}=0$		(5)
$(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})$		(6)

Angle entre deux vecteurs

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle compris entre deux vecteurs.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ayant le même point initial A. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ forment un triangle. C'est l'angle α au point A que l'on appelle l'angle compris entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Voir chapitre 2.

Les trois côtés du triangle ont pour longueurs $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|$. Le *théorème du cosinus* nous dit :

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

Nous pouvons utiliser la propriété (4) pour réécrire cette formule en termes de produit scalaire :

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha) \qquad (7)$$

Grâce à la propriété (3), le côté gauche de l'équation (7) peut se réécrire ainsi :

$$\begin{aligned}(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})-\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (8)\end{aligned}$$

En combinant les équations (7) et (8), nous obtenons :

$$\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

ce qui donne, après simplification : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$

Angle entre deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, l'angle α, 0° ≤ α ≤ 180°, compris entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par la formule :

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \qquad (9)$$

Exercice 3.16

Calculez le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{w}$ et l'angle aigu entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

a. $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}$

b. $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

c. $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}$

d. $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

e. $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{w}=4\vec{i}+3\vec{j}$

f. $\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}$

g. $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

h. $\vec{v}=\vec{i}$, $\vec{w}=-3\vec{j}$

Vecteurs parallèles

Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **parallèles** (on dit aussi **colinéaires**) s'il existe un scalaire non nul λ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{w}$.

Les vecteurs $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{w}=-6\vec{i}+2\vec{j}$ sont parallèles, puisqu'on peut écrire $\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{w}$. On aurait aussi pu voir que

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}=\frac{-18-2}{\sqrt{10}\sqrt{40}}=\frac{-20}{\sqrt{400}}=-1$$

ce qui implique que l'angle α entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est 180°.

Vecteurs orthogonaux

Si l'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vaut 90°, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

Puisque le vecteur nul n'a pas de direction, on utilise comme convention que le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

Il suit de la formule (9) que si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, alors $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$ puisque cos(90°) = 0.

À l'inverse, si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$, cela signifie que soit $\vec{v}=\vec{0}$, soit $\vec{w}=\vec{0}$, soit enfin cos(α) = 0. Dans le dernier cas, α = 90° et donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

Exercice 3.17

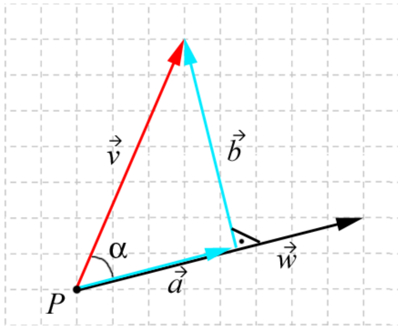
Démontrez avec le théorème de Pythagore que $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{w}$.
Partez de l'équation $\|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2=\|\vec{v}+\vec{w}\|^2$.

Exercice 3.18 Trouvez a tel que l'angle entre $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}$ soit 90°.

Exercice 3.19 Généralisez à trois dimensions les formules (1) et (10) et calculez l'angle aigu entre les vecteurs $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$.

3.4. Projection d'un vecteur sur un autre vecteur

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non nuls ayant la même origine P. Nous cherchons à décomposer $\vec{v}$ en deux vecteurs : $\vec{a}$ qui sera parallèle à $\vec{w}$ et $\vec{b}$ qui sera orthogonal à $\vec{w}$. Le vecteur $\vec{a}$ est la **projection orthogonale** de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$.



$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$$

Cherchons à exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{w}=\vec{a}\cdot\vec{w}+\vec{b}\cdot\vec{w} \qquad (11)$$

Puisque $\vec{b}$ est orthogonal à $\vec{w}$, nous avons $\vec{b}\cdot\vec{w}=0$. De plus, comme $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{w}$, nous avons $\vec{a}=\lambda\vec{w}$, λ étant un scalaire dont nous allons chercher la valeur.

Ainsi, l'équation (11) peut se réécrire : $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{a}\cdot\vec{w}=\lambda\,\vec{w}\cdot\vec{w}=\lambda\|\vec{w}\|^2$.

Ce qui implique que : $\lambda=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$.

Donc $\vec{a}=\lambda\,\vec{w}=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$.

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non nuls.
Le vecteur projection de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ est : $proj_{\vec{w}}\vec{v}=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$

Soit α l'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\vec{w}$. La longueur du vecteur $\vec{v}$ projeté orthogonalement sur $\vec{w}$ est $\|\vec{v}\|\cdot\cos(\alpha)$.

Exercice 3.20 Décomposez le vecteur $\vec{v}$ en deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, avec $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$, où $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{w}$ et $\vec{b}$ orthogonal à $\vec{w}$.

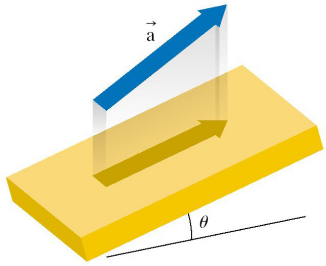
a. $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

c. $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

Faites un dessin et vérifiez (par calcul et sur votre dessin) que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.

Exercice 3.21

On utilise les vecteurs dans l'imagerie informatique pour calculer la longueur des ombres sur les surfaces plates.
Sur la figure ci-dessous, une source lumineuse éclaire un objet (le vecteur $\vec{a}$) et projette son ombre sur le sol verticalement. θ est l'angle que forme le sol avec l'horizontale.
Calculez la longueur de l'ombre sur le sol pour le vecteur $\vec{a}$ donné.

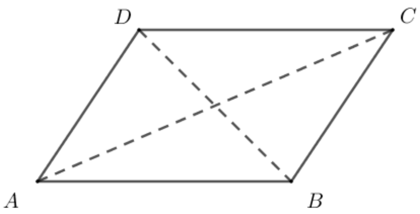


a. $\vec{a}=\begin{pmatrix}2.6\\4.5\end{pmatrix}$, $\theta = 0°$ **b.** $\vec{a}=\begin{pmatrix}25.7\\-3.9\end{pmatrix}$, $\theta = 12°$ **c.** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-13.8\\19.4\end{pmatrix}$, $\theta = -17°$

Exercice 3.22

Démontrez cette propriété des parallélogrammes à l'aide du produit scalaire :

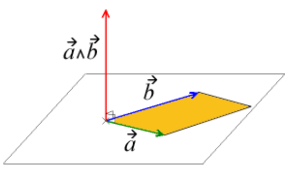
Attention !
Cette propriété n'est vraie que pour des parallélogrammes !



$$\boxed{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2}$$

3.5. Le produit vectoriel

Le produit vectoriel n'existe pas en 2 dimensions.

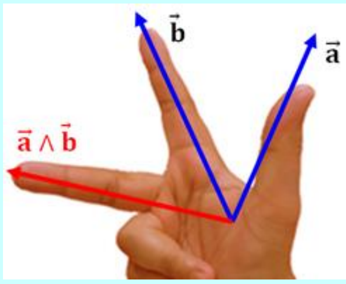


Le **produit vectoriel** est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension 3. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard **Gibbs** pour ses étudiants en physique. Les travaux de Hermann Günter **Grassmann** et William Rowan **Hamilton** sont à l'origine du produit vectoriel défini par **Gibbs**.

Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angle α.
Par définition, le **produit vectoriel** de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur noté $\vec{a}\wedge\vec{b}$ (lire $\vec{a}$ « cross » $\vec{b}$) tel que :

1. la direction de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ est orthogonale à chacun des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;

2. le sens de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ donne au triplet $(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{a}\wedge\vec{b})$ une **orientation directe** : cette orientation est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur), illustrée ci-dessous :



3. la norme de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$:
$\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot|\sin(\alpha)|$

Composantes du vecteur $\vec{a}\wedge\vec{b}$ dans une base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormée

Le **produit vectoriel** de $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ est le vecteur $\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$.

Truc mnémotechnique pour calculer $\vec{a}\wedge\vec{b}$:

Effectuez le « déterminant » $\begin{vmatrix}\vec{i} & a_1 & b_1\\ \vec{j} & a_2 & b_2\\ \vec{k} & a_3 & b_3\end{vmatrix}$, avec $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

La première colonne est composée de trois vecteurs, c'est pour cette raison que le mot « déterminant » a été mis entre guillemets.

Exercice 3.23

On donne les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$.

Calculez et comparez :

a. $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}\wedge\vec{u}$

b. $\vec{u}\wedge(2\vec{v})$, $(2\vec{u})\wedge\vec{v}$ et $2(\vec{u}\wedge\vec{v})$

c. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})+(\vec{u}\wedge\vec{w})$

d. $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$

Vérifiez enfin que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Exercice 3.24

Calculez $\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|$ lorsque $\|\vec{a}\|=6$, $\|\vec{b}\|=5$ et l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut 30°.

Aire d'un triangle

L'aire *S* d'un triangle *ABC* vaut la moitié de l'aire du parallélogramme *ABDC*. D'où, d'après le point 3 de la définition du produit vectoriel :

$$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$$

Exercice 3.25

On donne les points *A*(2 ; 1 ; –2), *B*(2 ; 3 ; 0), *C*(6 ; 6 ; 5) et *D*(6 ; 4 ; 3).

a. Vérifiez que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme et calculez son aire.

b. Calculez l'aire du triangle *ABC*.

3.6. Le produit mixte

Le produit vectoriel n'existe pas en 2 dimensions.

On appelle **produit mixte** de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de dimension 3, pris dans cet ordre, le nombre réel noté $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ défini par $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})$.

Soient les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\text{dét}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

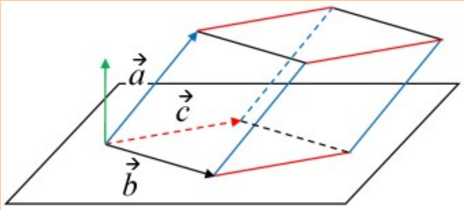
En effet :

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix} = a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_2(-1)\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

Propriétés du produit mixte

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ = **volume signé du parallélépipède** construit sur $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



coplanaires : dans le même plan

2. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont coplanaires.

3. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

4. Un produit mixte est invariant dans une permutation circulaire de ses vecteurs :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

5. Un produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

Exercice 3.26

On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Calculez les produits mixtes suivants :

a. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ **b.** $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$ **c.** $[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$ **d.** $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$

Exercice 3.27

On donne les points A(7 ; 1 ; –3), B(8 ; 2 ; –2), C(4 ; 4 ; 4), D(10 ; 1 ; –5).
Ces quatre points sont-ils coplanaires ?

Applications du produit mixte

Calculer le volume d'un parallélépipède : $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$

Calculer le volume d'un tétraèdre $ABCD$: $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$

Exercice 3.28

Calculez le volume du tétraèdre $ABCD$ dont les coordonnées des quatre sommets sont A(2 ; –1 ; 1), B(5 ; 5 ; 4), C(3 ; 2 ; –1) et D(4 ; 1 ; 3).

Exercice 3.29

Soient les points A(2 ; 1 ; –1), B(3 ; 0 ; 1) et C(2 ; –1 ; 3).
Calculez les points D situés sur l'axe des y et tels que $ABCD$ soit un tétraèdre de volume égal à 5.

3.7. Ce qu'il faut savoir absolument

Additionner deux vecteurs ❑ ok
Multiplier un vecteur par un scalaire ❑ ok
Calculer la longueur d'un vecteur ❑ ok
Donner les composantes d'un vecteur connaissant son angle avec l'horizontale et sa longueur (ex. 3.8) ❑ ok
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs ❑ ok
Calculer l'angle entre deux vecteurs ❑ ok
Projeter un vecteur sur un autre vecteur ❑ ok
Calculer le produit vectoriel de deux vecteurs et connaître ses applications ❑ ok
Calculer le produit mixte de trois vecteurs et connaître ses applications ❑ ok