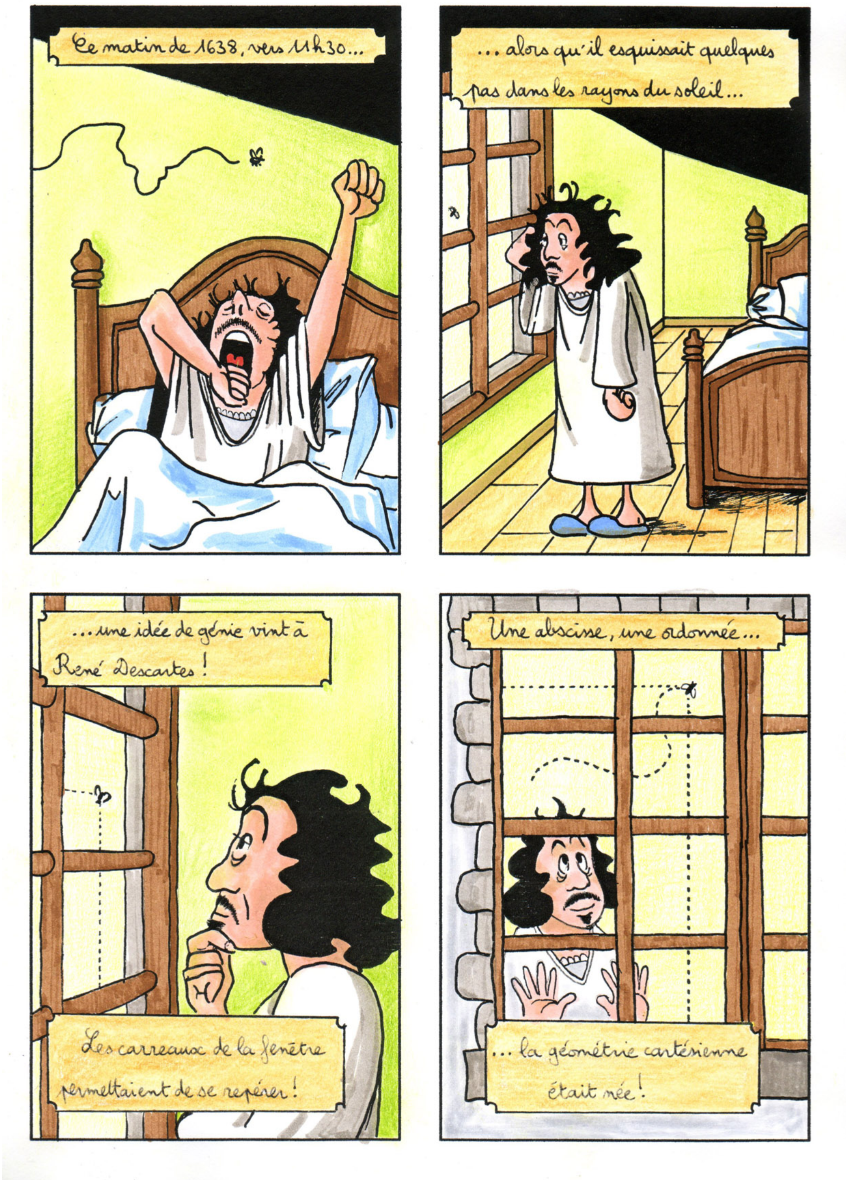
4. Géométrie analytique du plan

4.1. Un peu d'histoire

René **Descartes**
(1596 - 1650)

La **géométrie analytique** est une approche de la géométrie dans laquelle on représente les objets par des équations ou inéquations. Le plan ou l'espace est nécessairement muni d'un repère.
1637 est l'année de naissance de la géométrie analytique, lorsque René **Descartes** publia, anonymement pour éviter une dispute avec l'Église, son *Discours de la méthode*. Dans cet ouvrage, qui est également important pour l'histoire de la philosophie, la troisième partie, intitulée *La Géométrie*, expose les principes fondamentaux de la géométrie analytique. Peu de temps auparavant, **Fermat** (1601-1665) avait également développé la méthode de la géométrie analytique, mais son traité *Ad locos et solidos isagoge* ne fut pas publié avant 1670.
La forme actuelle fut cependant établie longtemps après Descartes, en particulier par le suisse **Euler** (1707-1783).



Extrait du strip de Fabien Aoustin

Concours « Bulles au carré 2012 »

1er prix du Jury
1er prix des Internautes

Descartes est à l'origine du repère du plan. Une anecdote raconte qu'observant une mouche qui se promenait sur les carreaux d'une fenêtre, il aurait pensé à définir, à l'aide des carreaux, des coordonnées du plan.
Le mot « coordonnée » n'est pas de lui, il vient du mathématicien allemand Gottfried Wilhelm von **Leibniz** (1646-1716).

4.2. Coordonnées d'un point dans un repère

Définition On appelle **repère** du plan tout ensemble constitué d'un point arbitraire fixe (**origine**) et de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non parallèles.

Rappel : norme = longueur

Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont une norme de 1 et qu'ils sont orthogonaux, on dit que le repère est **orthonormé**. On note ce repère $\{O,(\vec{i};\vec{j})\}$.

Définition On appelle **coordonnées** d'un point P dans un repère $\{O,(\vec{i};\vec{j})\}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le repère $\{O,(\vec{i};\vec{j})\}$.

Dans le repère, l'ordre des vecteurs est important !

Dans le plan, les coordonnées du point P dans le repère $\{O,(\vec{i};\vec{j})\}$ sont les nombres réels x et y tels que

$$\overrightarrow{OP}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}\text{ , la plupart du temps avec } \vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

On écrira les points horizontalement et les vecteurs verticalement.

On écrit $P(x\,;y)$.

Dans l'espace, les coordonnées du point P dans le repère $\{O,(\vec{i};\vec{j};\vec{k})\}$ sont les nombres réels x, y et z tels que

$$\overrightarrow{OP}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}\text{ , très souvent avec } \vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

On écrit $P(x\,;y\,;z)$.

Terminologie La première coordonnée x est appelée **abscisse** du point P.
La deuxième coordonnée y est appelée **ordonnée** du point P.
Dans l'espace, la troisième coordonnée z est appelée **cote** du point P.

Exercice 4.1

On donne les points $A(1\,;1)$, $B(-2\,;1)$, $C(-2\,;-1)$ et $D(1\,;-1)$. Dessinez ces quatre points sur une feuille quadrillée si, dans le repère $\{O\,;(\vec{i};\vec{j})\}$, …

a. $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{i}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Milieu d'un segment

On appelle **milieu** d'un segment AB le point M tel que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Soient les points A et B. En résolvant l'équation ci-dessus, on trouve que le milieu de AB est le point M ayant pour coordonnées...

dans le plan : $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

dans l'espace : $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Attention ! $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ n'est pas le milieu du segment AB !

Centre de gravité d'un triangle

Le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées...

dans le plan : $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

dans l'espace : $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

La formule ci-dessus a été obtenue en résolvant l'équation : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Exercice 4.2

a. Dessinez les points $A(2 ; 3)$, $B(-4 ; -3)$, $C(0 ; -4)$ et $D(2 ; -\sqrt{3})$.
b. Calculez les coordonnées du milieu de AC et du milieu de BD.
c. Calculez les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 4.3

On donne les points $A(2 ; 3)$, $B(-3 ; 1)$ et $C(8 ; -1)$.
a. Calculez les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Calculez les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.
b. Déterminez le(s) point(s) E de l'axe des ordonnées tel(s) que $ABEC$ soit un trapèze.

4.3. Droites du plan

Définitions Une **droite** d est un ensemble infini de points alignés. Il existe deux façons équivalentes de définir une droite :
- **a.** en donnant deux points A et B quelconques de la droite ;
- **b.** en donnant un point A de la droite et un vecteur $\vec{v}$ indiquant sa direction.

Notation La droite d passant par le point d'ancrage $A(x_0 ; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ est notée $d(A, \vec{v})$.

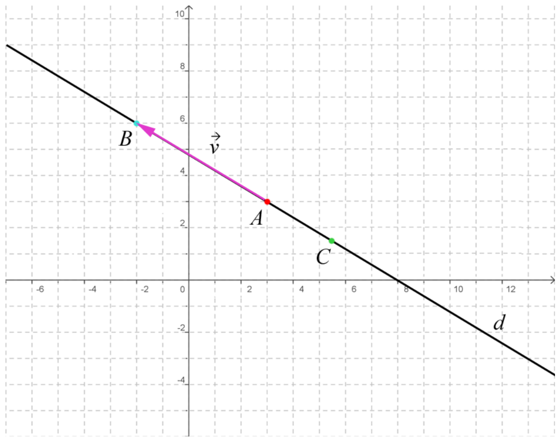
Représentation paramétrique dans le plan

Tous les points de coordonnées $(x ; y)$ de la droite $d(A, \vec{v})$ sont définis par la relation :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R} \quad \text{que l'on peut aussi écrire :} \quad \begin{cases}x=x_0+\lambda x_v\\y=y_0+\lambda y_v\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Ce système est appelé représentation paramétrique de $d(A, \vec{v})$.

Le paramètre λ sert à modifier la longueur et éventuellement le sens du vecteur directeur pour que la pointe du vecteur puisse « toucher » tous les points de la droite.



Une représentation paramétrique de la droite ci-contre est :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$$

Il existe une infinité de manières de définir la **même** droite, puisque la droite est composée d'une infinité de points (qui peuvent tous servir de point d'ancrage) et qu'il existe une infinité de multiples du vecteur directeur.

Sur cet exemple, on peut trouver B et C si on connaît $A(3 ; 3)$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+1\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.5\\1.5\end{pmatrix}$$

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils sont multiples.

Deux droites du plan sont **parallèles** si les vecteurs directeurs sont colinéaires. Si ce n'est pas le cas, elles sont **sécantes** (on dit aussi **concourantes**). Elles n'ont alors qu'un seul point commun.

Exercice 4.4

On donne les points $A(1 ; -2)$, $B(-5 ; 2)$, $C(-4 ; 1)$, $D(-1 ; -1)$ et $E(50 ; -40)$.
a. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
b. Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ?

Exercice 4.5

On donne les points $A(1 ; -1)$, $B(-2 ; 3)$, $C(5 ; -6)$, $D(1291 ; -1721)$.

a. Les points A, B, C et D sont-ils alignés ?

b. Donnez trois points alignés sur A et B.

Exercice 4.6

Soit la droite (AB) avec $A(2 ; -4)$ et $B(-1 ; -3)$.

a. Écrivez une (il y en a une infinité) représentation paramétrique de la droite (AB).

b. Les points $C(1 ; -1)$, $D(0 ; 0)$, $E(5 ; -5)$ et $F(-139 ; 43)$ sont-ils situés sur la droite (AB) ?

c. Trouvez sur la droite (AB) le point K dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée.

Exercice 4.7

Une droite d est donnée par la relation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Dessinez d.

b. Colorez en rouge les points pour lesquels $\lambda \in [-1 ; 2[$.

c. Colorez en bleu les points pour lesquels $\lambda \geq 3$.

Exercice 4.8

On donne les points $A(-4 ; 1)$, $B(2 ; -3)$ et $C(5 ; 4)$.
Écrivez une représentation paramétrique des droites suivantes :

a. la droite passant par B et parallèle à la droite (AC) ;

b. la médiane (AA') du triangle ABC.

Intersection de droites sécantes

Pour déterminer $d(A, \vec{v}) \cap d(B, \vec{w})$, procédez comme suit :

1. Écrivez une représentation paramétrique de chaque droite en désignant les paramètres **par des lettres différentes** (λ et μ par exemple).
2. Imposez l'égalité des abscisses x et des ordonnées y. On obtient un système de deux équations avec deux inconnues : λ et μ. La résolution de ce système fournit les valeurs des paramètres correspondant au point d'intersection des droites.

Exercice 4.9

Dans le plan, on donne un quadrilatère $ABCD$ par ses quatre sommets : $A(-3 ; 1)$, $B(2 ; -5)$, $C(6 ; 2)$, $D(1 ; 7)$.
Calculez les coordonnées du point d'intersection des diagonales.

Exercice 4.10

Soient les trois droites suivantes :

$$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad d_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Déterminez les intersections $d_1 \cap d_2$, $d_1 \cap d_3$ et $d_2 \cap d_3$.

Équation cartésienne d'une droite

On obtient l'équation cartésienne en partant des équations paramétriques. Il suffit en fait d'éliminer le paramètre λ en combinant les deux équations du système paramétrique. On obtiendra alors une seule équation où n'apparaîtront plus que x et y.

Partons du système paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda x_v \\ y = y_0 + \lambda y_v \end{cases}$

Après avoir multiplié la première équation par y_v et en avoir soustrait x_v fois la deuxième, on obtient :

$$y_v x - x_v y = y_v x_0 - x_v y_0$$

ou bien

$$\underbrace{y_v}_{a} x - \underbrace{x_v}_{b} y + \underbrace{(x_v y_0 - y_v x_0)}_{c} = 0$$

La relation du type $ax + by + c = 0$ est appelée **équation cartésienne** de $d(A, \vec{v})$.

Exemple

$$\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=-1-\lambda \end{cases}$$

Éliminons le paramètre λ pour obtenir l'équation cartésienne, en additionnant le double de la deuxième ligne à la première :

$$x + 2y = 1$$

L'équation cartésienne réduite est :

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ a comme vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Lorsque b n'est pas nul, l'équation $ax + by + c = 0$, peut s'écrire $y=\underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}x\underbrace{-\frac{c}{b}}_{h}$.

La relation $y = mx + h$ s'appelle l'**équation cartésienne réduite** d'une droite du plan. Si la droite est **verticale**, son équation est $x = k$.

Rappelons que, dans un repère orthonormé, m est la **pente** de la droite et h est **l'ordonnée à l'origine**.

Exercice 4.11

Soit une droite d donnée par la représentation paramétrique : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

Écrivez une équation cartésienne de d.

Exercice 4.12

Quelle particularité possède la droite $d : ax + by + c = 0$ lorsque

a. $a = 0$?
b. $b = 0$?
c. $c = 0$?

Exercice 4.13

Soit la droite $d : 3x + 2y - 5 = 0$.

a. Donnez un vecteur directeur de la droite d.
b. Donnez le vecteur directeur de d ayant 7 pour 1ère composante.

Exercice 4.14

Soit la droite $d : 2x - 3y + 6 = 0$.

a. Dessinez la droite d.
b. Écrivez une équation cartésienne de la droite d' parallèle à d et passant par l'origine. Dessinez d'.
c. Écrivez une équation cartésienne de la droite d'' parallèle à d et passant par $A(-4 ; 1)$. Dessinez d''.

4.4. Angle aigu entre deux droites

L'angle **aigu** α de deux droites est donné par $\tan(\alpha)=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}\right|$

où m_1 et m_2 sont les pentes des deux droites.

Exercice 4.15

Calculez l'angle d'intersection entre la droite $d : x + y = 2$

a. et la droite $g : 4x + y + 1 = 0$.
b. et l'axe des ordonnées.

Deux droites sont perpendiculaires $\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Le vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exercice 4.16

Écrivez l'équation de la droite d passant par $A(-5 ; -3)$ et perpendiculaire à la droite $g : 5x + 4y - 20 = 0$.

Exercice 4.17

On donne les points $A(3 ; -2)$, $B(7 ; 1)$.
Écrivez l'équation de la médiatrice du segment AB.

4.5. Cercles du plan

Définition Soit Ω un point du plan et r un nombre réel positif. On appelle **cercle** de centre Ω et de rayon r l'ensemble des points M du plan dont la distance au point Ω est égale à r.

Équation cartésienne du cercle

Soit le cercle de centre Ω (x_0 ; y_0) et de rayon r.

$$M(x\,;y) \in \text{cercle}\,(\Omega\,;r) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$$

Remarques
On supposera que l'on travaille toujours dans un repère orthonormé.

En développant la formule ci-dessus, on obtient l'équation :

$$x^2+y^2\underbrace{-2x_0}_{a}\cdot x\underbrace{-2y_0}_{b}\cdot y+\underbrace{x_0^2+y_0^2-r^2}_{c}=0$$

Attention !
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ n'est pas forcément l'équation d'un cercle !

On en déduit que tout cercle possède une équation cartésienne de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Équations paramétriques du cercle Γ

$$\Gamma : \begin{cases} x = x_0 + r\cos(\alpha) \\ y = y_0 + r\sin(\alpha) \end{cases}$$

Le paramètre est l'angle α qui varie entre 0 et 2π.

Exercice 4.18 Formez l'équation cartésienne d'un cercle...

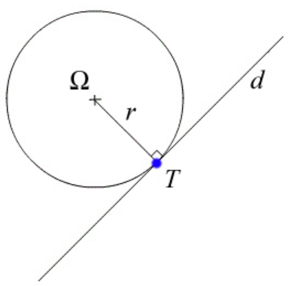
- **a.** de centre 0 (origine) et de rayon $r = 3$;
- **b.** de centre Ω(6 ; –8) et passant par l'origine ;
- **c.** dont A(3 ; 2) et B(–1 ; 6) sont les extrémités d'un diamètre ;
- **d.** passant par A(3 ; 1) et B(–1 ; 3) et dont le centre appartient à la droite $3x - y = 2$.

Exercice 4.19 Les équations ci-dessous définissent-elles des cercles ?
Si oui, donnez leur centre et leur rayon.

a. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ **b.** $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$ **d.** $2x^2 + 2y^2 - 9x + 4y - 8 = 0$.

Tangente à un cercle

Une droite d est dite **tangente** à un cercle de centre Ω et de rayon r si δ(Ω ; d) = r.



La droite tangente en un point T à un cercle (Ω ; r) est la droite :

- passant par T
- perpendiculaire à ΩT

Exercice 4.20 Formez l'équation du cercle tangent à la droite d : $4x - 3y + 15 = 0$ en T(0 ; 5) et passant par le point A(4 ; 7).

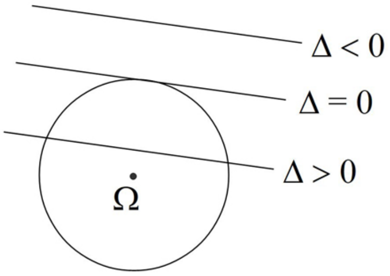
Intersection d'une droite et d'un cercle

Pour déterminer les points d'intersection d'une droite d et d'un cercle Γ, il faut résoudre le système des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{équation cartésienne de la droite } d \\ \text{équation cartésienne du cercle } \Gamma \end{cases}$$

Par substitution, on obtient une équation du second degré. En fonction du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de cette équation, on se trouve en face d'un des trois cas suivants :

1. $\Delta > 0$: il y a deux points d'intersection
2. $\Delta = 0$: il y a un point de tangence
3. $\Delta < 0$: la droite ne coupe pas le cercle.



Exercice 4.21

Déterminez les intersections d'une droite et d'un cercle :

a. droite : $2x - y = 3$ cercle : $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$
b. droite : $x - 2y = 1$ cercle : $x^2 + y^2 - 8x + 2y = -12$

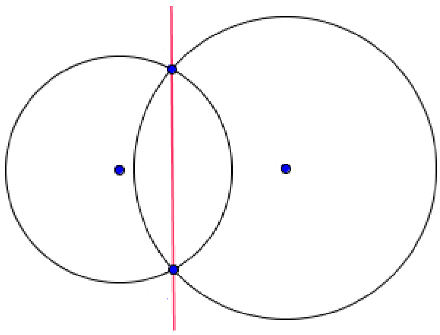
Intersection de deux cercles

Pour déterminer les points d'intersection de deux cercles Γ_1 et Γ_2, il faut résoudre le système des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{équation cartésienne du cercle } \Gamma_1 \\ \text{équation cartésienne du cercle } \Gamma_2 \end{cases}$$

Pour ce faire, on soustrait les équations des deux cercles. On obtient l'équation d'une droite que l'on appelle l'**axe radical**. On détermine ensuite l'intersection de cette droite avec l'un des deux cercles comme vu précédemment.

Si les deux cercles se coupent, l'axe radical passe par les deux points d'intersection.
S'ils ne se coupent pas, l'axe radical ne coupe pas non plus les cercles.



Exercice 4.22

Déterminez les points d'intersection des deux cercles Γ_1 et Γ_2 :

$\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$

Distance d'un point à une droite dans le plan

Soit d la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

La distance du point $P(x_0 ; y_0)$ à la droite d est $\delta = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 4.23 Quelle est la distance du point $P(1\ ;\ -2)$ à la droite d passant par $A(1\ ;\ 1)$ et $B(10\ ;\ -5)$?

Exercice 4.24 Soit le cercle $\Gamma : 16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$.

GeoGebra

a. Déterminez le point de Γ le plus proche de l'origine.
b. Déterminez le point de Γ le plus proche de la droite $d : 8x - 4y + 73 = 0$.

Exercice 4.25 Formez l'équation…

GeoGebra

a. de la droite tangente au cercle $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ au point $T(-5\ ;\ 7)$;
b. des droites parallèles à $d : 2x + y - 7 = 0$ et tangentes au cercle dont l'équation est $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$;
c. des droites passant par le point $A(1\ ;\ 6)$ (qui n'appartient pas au cercle) et tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$.
Indication pour ***c*** : pensez au cercle de Thalès.

Exercice 4.26 Écrivez l'équation du cercle…

GeoGebra

a. circonscrit au triangle ABC : $A(1\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -1)$, $C(2\ ;\ 0)$
b. inscrit dans le triangle DEF : $D(2\ ;\ -1)$, $E(-2\ ;\ 2)$, $F(16\ ;\ 9.5)$.

Rappels
Le cercle circonscrit a pour centre l'intersection des médiatrices.
Le cercle inscrit a pour centre l'intersection des bissectrices.

4.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Trouver les coordonnées du milieu d'un segment ❑ ok
Trouver les coordonnées du centre de gravité d'un triangle ❑ ok

Trouver le vecteur directeur d'une droite ❑ ok
Donner la représentation paramétrique d'une droite connaissant deux points ou un point et le vecteur directeur ❑ ok
Trouver un point quelconque d'une droite donnée et vérifier qu'un point appartient à une droite ❑ ok
Déterminer les positions relatives de deux droites ❑ ok
Calculer le point d'intersection de deux droites (s'il existe) ❑ ok

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs ❑ ok
Reconnaître deux vecteurs ou deux droites perpendiculaires ❑ ok
Calculer l'angle entre deux vecteurs (et entre deux droites) ❑ ok

Donner l'équation d'un cercle connaissant son centre et son rayon ❑ ok
Donner le centre et le rayon d'un cercle connaissant son équation ❑ ok
Trouver les points d'intersection d'une droite et d'un cercle ❑ ok

Calculer la distance entre un point et une droite ❑ ok