5. Géométrie analytique de l'espace

5.1. Droites

Équations paramétriques

Il n'existe pas d'équation cartésienne d'une droite dans l'espace.

Soit la droite d passant par le point $A(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}$.

Le point A est appelé le point d'ancrage. N'importe quel point de la droite peut servir de point d'ancrage.
Les équations paramétriques des droites dans l'espace sont les mêmes que dans le plan, sauf qu'il y a une coordonnée en plus : z (la cote).

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R} \quad \text{que l'on peut aussi écrire :} \quad \begin{cases}x=x_0+\lambda x_v\\y=y_0+\lambda y_v\\z=z_0+\lambda z_v\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Exercice 5.1

Soit la droite d passant par les points $A(1\,;\,-2\,;\,5)$ et $B(-3\,;\,6\,;\,1)$.
a. Déterminez deux vecteurs directeurs de cette droite.
b. Déterminez deux autres points de cette droite.

Exercice 5.2

Soit la droite d : $\begin{cases}x=3\lambda+1\\y=2\lambda\\z=-5\lambda+2\end{cases}$

Donnez deux autres représentations paramétriques de cette droite.

Exercice 5.3

Une droite d est définie par un point $A(2\,;\,4\,;\,5)$ et un vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$.

a. Écrivez un système d'équations paramétriques de d.
b. Vérifiez si le point $P(7\,;\,-1\,;\,3)$ appartient à la droite d.

Exercice 5.4

Soit le point $A(2\,;\,0\,;\,-3)$. Écrivez une représentation paramétrique des droites...

d_1 passant par A et $B(1\,;\,4\,;\,5)$.

d_2 passant par A et parallèle à la droite g : $\begin{cases}x=2\lambda-1\\y=3\lambda\\z=5\lambda+2\end{cases}$

d_3 passant par A et parallèle à l'axe des y.

Positions relatives de deux droites

Dans le plan, il n'y a que deux possibilités : deux droites sont sécantes ou parallèles. Dans l'espace, il y en a une troisième : deux droites peuvent aussi être **gauches**.

- Deux droites sécantes ont un point commun et elles sont coplanaires.
- Les vecteurs directeurs de deux droites parallèles sont colinéaires. Ces droites peuvent aussi être confondues.
- Deux droites gauches n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.

Exercice 5.5

Montrez que les systèmes d'équations suivants déterminent la même droite :

$$\begin{cases}x=3+2\lambda\\y=5-2\lambda\\z=1+\lambda\end{cases} \qquad \begin{cases}x=7-4\mu\\y=1+4\mu\\z=3-2\mu\end{cases}$$

Exercice 5.6

Étudiez les positions relatives des droites d et g ci-dessous, définies par un point d'ancrage et un vecteur directeur :

a. $d : A(6\ ;3\ ;0)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $g : B(0\ ;0\ ;4)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

b. $d : A(3\ ;–1\ ;2)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $g : B(4\ ;–1\ ;0)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$

c. $d : A(7\ ;4\ ;4)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $g : B(5\ ;–1\ ;0)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix}$

d. $d : A(2\ ;–1\ ;–3)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $g : B(4\ ;0\ ;–4)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

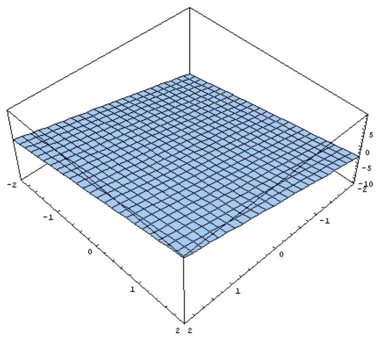
Exercice 5.7

Soit le quadrilatère plan $ABCD$. Les coordonnées de ses sommets sont $A(1\ ;3\ ;2)$, $B(4\ ;–1\ ;3)$, $C(4\ ;9\ ;–7)$ et $D(1\ ;8\ ;–3)$.
Calculez les coordonnées du point d'intersection des diagonales.

5.2. Plans

Un **plan** est un objet fondamental à deux dimensions. Intuitivement il peut être visualisé comme une « planche sans épaisseur » qui s'étend à l'infini et que l'on peut orienter comme on veut dans l'espace.

Dans un espace à trois dimensions et avec un système de coordonnées (x, y, z), on peut définir le plan comme l'ensemble des solutions de l'équation : $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont des nombres réels et où a, b et c ne sont pas simultanément nuls.



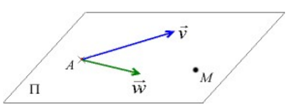
Plan d'équation
$p : 3x + 2y – z – 1 = 0$

On désigne souvent les plans par les lettres π, p et q.
La lettre π n'a évidemment rien à voir avec le nombre pi !

Équations paramétriques d'un plan

Un plan π peut être défini par un de ses points, appelé **point d'ancrage**, et par **deux vecteurs directeurs** non colinéaires donnant l'orientation du plan dans l'espace.

Soit le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et les vecteurs $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_w\\y_w\\z_w\end{pmatrix}$.



Soit le plan $\Pi = (A\ ;\vec{v}\ ,\vec{w}\ )$, passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Les trois équations ci-dessous forment une représentation paramétrique du plan.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x_w\\y_w\\z_w\end{pmatrix}\text{, avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Comment peut-on définir un plan ?

Un plan peut être déterminé de plusieurs façons. Il faut (au choix) :
- trois points non alignés ;
- deux droites sécantes ;
- deux droites parallèles distinctes (non confondues) ;
- une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ;
- un point du plan et une droite orthogonale au plan.

Exercice 5.8

Déterminez les équations paramétriques des plans suivants :

a. π_1 passant par $A(2 ; 3 ; 5)$, $B(1 ; 0 ; 5)$, $C(6 ; –2 ; 5)$

b. π_2 contenant le point $A(1 ; 2 ; 5)$

et la droite d définie par $B(6 ; 0 ; 0)$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

Les droites d et g sont parallèles.

c. π_3 contenant les deux droites : $d(A ; \vec{v})$: $A(2 ; 0 ; 3)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$g(B ; \vec{w})$: $B(4 ; 0 ; 0)$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Les droites d et g sont-elles sécantes ?

d. π_4 contenant les droites d : $\begin{cases}x=1+3\lambda\\y=3-4\lambda\\z=2+\lambda\end{cases}$ et g : $\begin{cases}x=4-3\mu\\y=9-\mu\\z=-7+4\mu\end{cases}$

Équation cartésienne d'un plan

$$M\in\Pi=(A ; \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sont coplanaires}$$
$$\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{v}, \vec{w})=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}(x-x_0) & x_v & x_w\\(y-y_0) & y_v & y_w\\(z-z_0) & z_v & z_w\end{vmatrix}=0$$

En effectuant ce déterminant et en regroupant les termes, on obtient une équation cartésienne du type :

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0$$

Exercice 5.9

Déterminez les équations cartésiennes des quatre plans trouvés à l'exercice 5.8.

Exercice 5.10

Vérifiez que les points $A(–4 ; 0 ; 3)$, $B(–2 ; 3 ; 0)$, $C(0 ; 2 ; 1)$ et $D(2 ; 1 ; 2)$ sont dans un même plan. Donnez trois façons de procéder…

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Trois possibilités :
- une droite coupe un plan en un seul point ;
- une droite est parallèle à un plan (pas d'intersection) ;
- une droite appartient à un plan (une infinité d'intersections).

Exercice 5.11

On donne le plan $\pi : 2x – y + 3z – 6 = 0$. Déterminez la position de π relativement aux droites suivantes :

La question à se poser est : « Combien y a-t-il d'intersections ? »

a. d donnée par $A(2 ; 1 ; –2)$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

b. g passant par $B(2 ; 1 ; –1)$ et $C(3 ; 0 ; –2)$

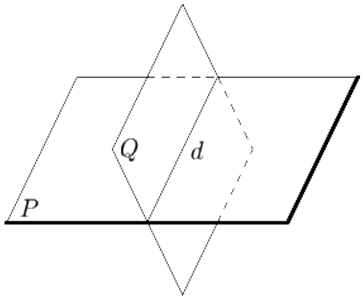
c. h donnée par $D(1 ; 2 ; 2)$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$

Exercice 5.12

On donne les cinq points $A(1 ; 2 ; 6)$, $B(5 ; 7 ; 4)$, $C(2 ; 3 ; 5)$, $D(4 ; 6 ; 1)$ et $E(3 ; 4 ; 2)$.
Calculez le point d'intersection de la droite AB avec le plan CDE.

Positions relatives de deux plans

Trois possibilités :
- deux plans sont parallèles ;
- deux plans sont identiques ;
- deux plans sont sécants : leur intersection est une droite.



Deux plans sécants

Exercice 5.13

On donne le plan $\pi : 3x - 2y + z - 6 = 0$.

a. Déterminez les points d'intersections de π avec les trois axes de référence.
b. Donnez les droites d'intersection de π avec les plans Oxy, Oxz et Oyz.

Exercice 5.14

On donne $P_1(1 ; 1 ; 1)$, $P_2(3 ; 2 ; 5)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

a. Les plans $\pi_1 = (P_1; \vec{v} ; \vec{w})$ et $\pi_2 = (P_2 ; \vec{v} ; \vec{w})$ sont-ils parallèles ?
b. Calculez les équations cartésiennes de π_1 et π_2.
c. Comparez ces équations. Que constatez-vous ?

Exercice 5.15

Écrivez l'équation cartésienne d'un plan...
a. parallèle au plan : $2x - 5y + z - 3 = 0$ et passant par l'origine
b. parallèle au plan : $2x - 5y + z - 3 = 0$ et passant par $A(2 ; -1 ; 4)$.

Indication : utilisez la réponse **c.** du problème 5.14.

Exercice 5.16

On donne les équations cartésiennes de deux plans p et q.
Déterminez si ces deux plans sont sécants, parallèles ou confondus.

a. $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : 3x + 2y + 5z = 4$
b. $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : 6x - 4y + 10z = 4$
c. $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : -15x + 10y - 25z = -20$

Exercice 5.17

On donne les plans $p : 3x - 5y + z + 4 = 0$ et $q : x + y - 2z + 3 = 0$.
Déterminez une représentation paramétrique de la droite d'intersection des deux plans.

Exercice 5.18

Existe-t-il un point appartenant aux trois plans :

$p : x + 2y - 3z = -6$ $\quad q : 2x + 4y - z = 18$ $\quad r : 3x - 2y + z = 2$?

Si oui, donnez ses coordonnées.

Exercice 5.19

Trouvez les équations paramétriques d'une droite d passant par $A(2 ; 3 ; 5)$ et parallèle aux deux plans $p : 3x - y + z = 0$ et $q : x - y + z = 0$.

Exercice 5.20

Déterminez une droite d passant par le point $A(3 ; -2 ; -4)$, qui est parallèle au plan $p : 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ et qui coupe la droite g définie par $B(2 ; -4 ; 1)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Établissez une méthode de résolution avant de vous lancer dans les calculs.

Droites orthogonales et droites perpendiculaires

Les droites d et g sont **orthogonales** $\Leftrightarrow$ $\vec{d} \cdot \vec{g} = 0$.

Remarque
Dans l'espace, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

Deux droites orthogonales et sécantes sont appelées **perpendiculaires**.

Exercice 5.21

Soit la droite d : $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$

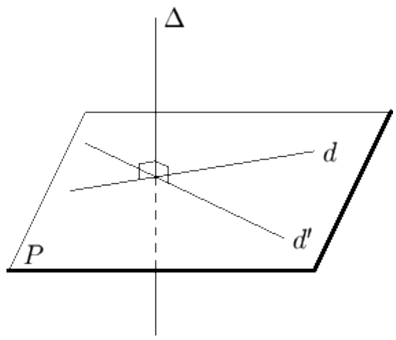
Déterminez une droite g perpendiculaire à d.

Droite orthogonale à un plan

Une droite d est **orthogonale** à un plan π $\Leftrightarrow$ d est orthogonale à toute droite de π.

Le vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan est appelé vecteur **normal**.

Si une droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P, alors Δ est orthogonale au plan P.



Si une droite Δ est orthogonale à une droite d d'un plan P, **on ne peut pas** en déduire que Δ est orthogonale à P.

Propriétés

- Étant donnés une droite d et un point A, il existe un seul plan passant par A et orthogonal à d.
- Étant donnés un plan π et un point A, il existe une seule droite passant par A et orthogonale à π.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles.

Conséquence Un plan peut être déterminé par un point et un vecteur normal.

Le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

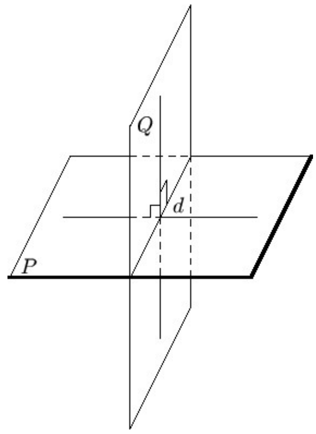
Si deux plans $p : ax + by + cz + d = 0$ et $p' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles, alors les vecteurs normaux sont colinéaires. Donc $a = ka', b = kb', c = kc'$.

Exercice 5.22 Déterminez la droite d passant par le point $A(2 ; 3 ; 5)$ et perpendiculaire au plan π d'équation cartésienne $3x - 2y + z + 5 = 0$.

Exercice 5.23 Écrivez une équation cartésienne du plan π passant par le point $A(3 ; 1 ; 1)$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B(1 ; 0 ; 5)$ et $C(3 ; -3 ; 8)$.

Plans perpendiculaires

Les plans P et Q sont **perpendiculaires** si et seulement si les vecteurs normaux de P et Q sont orthogonaux.



Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un des plans contient une droite orthogonale à l'autre plan.
Il existe une infinité de plans passant par un point A et perpendiculaires à un plan π.

Exercice 5.24 Écrivez une équation cartésienne du plan π passant par l'origine et le point $A(1 ; 1 ; 1)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z + 2 = 0$.

5.3. Distances

Distance entre deux points

On appelle **distance** du point A au point B la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note $\delta(A ; B)$.

$$\delta(A ; B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

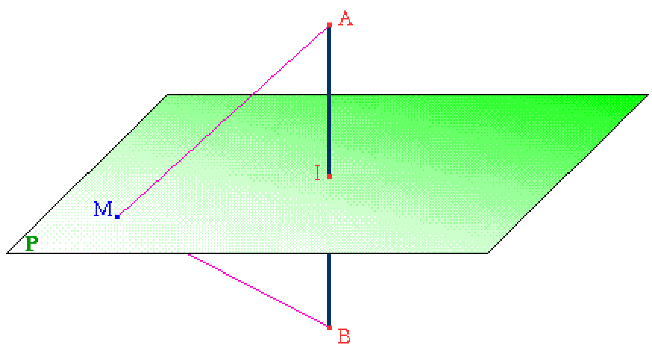
Exercice 5.25 Calculez la distance entre les points $A(1 ; -5 ; 4.3)$ et $B(0.4 ; 1 ; -9.1)$.

Plan médiateur

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux points A et B est un plan appelé **plan médiateur** de AB.

I : milieu du segment AB

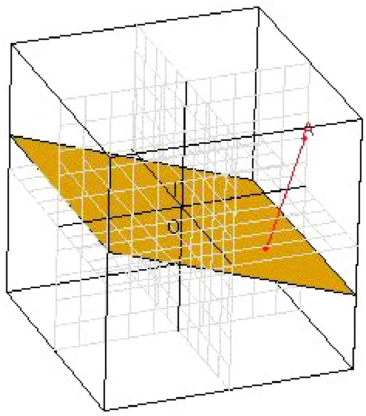
$\overrightarrow{AB}$: vecteur normal du plan P



Exercice 5.26 Établissez l'équation cartésienne du plan médiateur du segment AB avec $A(2 ; -1 ; 4)$ et $B(1 ; 3 ; 2)$.

Distance d'un point à un plan

La distance d'un point A à un plan π est la distance du point A à sa projection orthogonale sur π.



Soit π le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point $A(x_0, y_0, z_0)$ au plan π est $\delta = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Exercice 5.27 Calculez la distance du point $A(15 ; -2 ; 5)$ au plan $\pi : 3x - 2y + z = 12$.

Exercice 5.28 Soient les deux plans d'équations $3x + 12y - 4z - 18 = 0$ et $3x + 12y - 4z + 73 = 0$.
Vérifiez qu'ils sont parallèles, puis calculez leur distance.

Exercice 5.29 On donne le tétraèdre de sommets $A(2 ; 4 ; 6)$, $B(-4 ; -4 ; 4)$, $C(5 ; 0 ; 3)$, $D(-1 ; 7 ; 5)$.
Calculez la longueur de la hauteur, issue de A, de ce tétraèdre.

Exercice 5.30

a. Déterminez les équations cartésiennes des plans p' et p'' situés à une distance 6 du plan d'équation $9x + 2y - 6z - 8 = 0$.

b. Comment faire sans utiliser la formule de la distance ?

Plans bissecteurs

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux plans sécants π_1 et π_2 est constitué de deux plans appelés **plans bissecteurs**. π_1 et π_2 sont perpendiculaires.

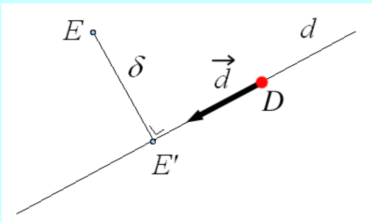
Exercice 5.31 Dessinez deux plans sécants et leurs plans bissecteurs.

Les équations des plans bissecteurs se trouvent en simplifiant l'expression :

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Exercice 5.32 On donne les plans $p : x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $q : 2x - y + 2z + 1 = 0$.
Déterminez les équations cartésiennes des plans bissecteurs de p et q.

Distance d'un point à une droite



Dans l'espace, la distance d'un point E à une droite d est la distance du point E à sa projection orthogonale E' sur la droite d.

Distance d'un point E à une droite $d(D;\vec{d})$:

$$\delta(E;d)=\frac{\|\overrightarrow{DE}\wedge\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Justification $\|\overrightarrow{DE}\wedge\vec{d}\|$ = aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{DE}$ et $\vec{d}$:

= base · hauteur = $\|\vec{d}\|\cdot\delta(E;d) \Rightarrow \delta(E;d)=\dfrac{\|\overrightarrow{DE}\wedge\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$

Exercice 5.33

Soit la droite d : $\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

a. Calculez la distance du point $A(-5 ; 4 ; -2)$ à la droite d.
b. Comment faire sans utiliser la formule de la distance ?

Exercice 5.34

On donne la droite d passant par les points $A(2 ; 3 ; 5)$ et $B(1 ; 2 ; 8)$.
Trouvez le point E de la droite d situé à égale distance de $C(5 ; 4 ; 8)$ et $D(9 ; -2 ; 6)$.

Exercice 5.35

Soient les points $A(1 ; 5 ; 3)$, $B(5 ; 3 ; 7)$ et $C(9 ; 1 ; 2)$.
Déterminez les équations paramétriques de la bissectrice de l'angle BAC.

Distance entre deux droites de l'espace

La distance entre deux droites $d(D;\vec{d})$ et $g(G;\vec{g})$ est : $\delta(d;g)=\dfrac{|(\vec{d}\wedge\vec{g})\cdot\overrightarrow{DG}|}{\|\vec{d}\wedge\vec{g}\|}$

Exercice 5.36

On donne deux droites : $d\,(AB)$ avec $A(2 ; 1 ; 3)$ et $B(1 ; 2 ; 1)$
$g\,(CD)$ avec $C(-1 ; -2 ; -2)$ et $D(1 ; -4 ; 0)$.
Calculez la distance entre ces deux droites.

Exercice 5.37

Soit la droite $d\,(AB)$ passant par les points $A(0 ; 5 ; -2)$ et $B(7 ; 3 ; 5)$. Quel point D de cette droite est le plus proche du point $C(5 ; 3 ; 7)$?
Donnez trois méthodes pour trouver la solution.

5.4. Angles

Angle de deux droites

On appelle angle (aigu ou obtus) de deux droites l'angle que forment les vecteurs directeurs de ces deux droites.

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right) \qquad \text{angle aigu : } \alpha=\arccos\left(\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right)$$

Exercice 5.38

On donne les deux droites d : $\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=8+6\lambda \\ z=16+2\lambda \end{cases}$ et g : $\begin{cases} x=2+3\mu \\ y=\mu \\ z=-4-\mu \end{cases}$

Calculez l'angle aigu compris entre ces deux droites.

Exercice 5.39

Soit le triangle de sommets $A(4 ; 1 ; 7)$, $B(2 ; 4 ; 3)$ et $C(3 ; 9 ; 5)$.
Calculez les trois angles de ce triangle.

Angle de deux plans

On appelle angle (aigu ou obtus) de deux plans l'angle des vecteurs normaux à ces deux plans.

Exercice 5.40

Soient les deux plans sécants $p : x + 2y - z = 0$ et $q : 2x - 3y + 4z = 8$.
Calculez l'angle aigu formé par ces deux plans.

Angle d'une droite et d'un plan

On appelle angle (aigu ou obtus) d'une droite d et d'un plan π l'angle que forme d avec sa projection d' sur π.

Méthode

1. Calculer l'angle <u>aigu</u> β formé par le vecteur directeur de la droite d avec le vecteur normal du plan π.
2. L'angle formé par d et π vaut $\alpha = 90° - \beta$

Exercice 5.41

Soit la droite d passant par $A(1 ; 2 ; 3)$ et $B(2 ; 1 ; 5)$. Soit le plan $\pi : 3x + 2y - 5z = 0$. Calculez l'angle formé par d et π.

5.5. Sphères

On appelle sphère de centre Ω et de rayon r l'ensemble des points M de l'espace situés à la distance r du centre Ω.

Soit la sphère de centre $\Omega\ (x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de rayon r.

$$M(x ; y ; z) \in \text{sphère } (\Omega ; r) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$$

En développant la formule ci-dessus, on obtient l'équation :

$$x^2+y^2+z^2 \underbrace{-2x_0}_{a}\cdot x \underbrace{-2y_0}_{b}\cdot y \underbrace{-2z_0}_{c}\cdot z + \underbrace{x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2}_{d} = 0$$

Repérez bien ce que sont a, b, c et d. Cela vous permettra de retrouver le centre et le rayon de la sphère (voir ex. 5.44)

On en déduit que toute sphère possède une équation cartésienne de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

Attention ! Une équation de ce type peut représenter autre chose qu'une sphère...

Exercice 5.42

Écrivez l'équation de...

a. la sphère de centre $O(0 ; 0 ; 0)$ et passant par le point $A(3 ; 2 ; -1)$;
b. la sphère de centre $C(1 ; -2 ; 4)$ et passant par le point $A(3 ; 2 ; -1)$.

Exercice 5.43

Écrivez l'équation de la sphère (S) de diamètre AB avec $A(-1 ; 0 ; 5)$ et $B(7 ; 4 ; -7)$.

Exercice 5.44

Les équations suivantes représentent-elles des sphères ?
Si oui, déterminez leur centre et leur rayon.

a. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y - 4z + 22 = 0$
b. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$
c. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y + 2z - 87 = 0$

Exercice 5.45

Écrivez l'équation de la sphère passant par les deux points $A(4 ; 2 ; -3)$, $B(-1 ; 3 ; 1)$ et ayant son centre sur la droite (CD) connaissant $C(2 ; 3 ; 7)$ et $D(1 ; 5 ; 9)$.

Positions relatives d'un plan et d'une sphère

Trois possibilités :

- le plan coupe la sphère : l'intersection est un cercle ;
- le plan est tangent à la sphère ;
- le plan ne touche pas la sphère.

Attention !

Dans l'espace, un cercle n'a pas d'équation cartésienne. On le définit en donnant son centre, son rayon et le plan qui le contient.

Remarques très utiles

1. Un **plan tangent** à la sphère de centre Ω et de rayon r est un plan situé à la distance r de Ω.
2. Le plan tangent à la sphère (Ω ; r) au point T a pour vecteur normal $\overrightarrow{T\Omega}$.
3. Le plan tangent en T à la sphère (Ω ; r) contient toutes les droites tangentes en T à cette sphère.

Exercice 5.46

Soit la sphère (S) : $(x-1)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=62$.
Soit le plan π : $3x - 7y + 2z + 100 = 0$.
Prouvez que le plan π est tangent à la sphère (S).

Exercice 5.47

Calculez le rayon de la sphère (S) de centre Ω(4 ; 1 ; –5) qui est tangente au plan π : $x + 2y + 2z = 4$.

Exercice 5.48

[1] *appartient* signifie « est sur » la sphère, pas « dans ».

Soient la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 30y - 4z + 13 = 0$ et le point T(7 ; 4 ; 4).

a. Vérifiez que le point T appartient[1] à la sphère.

b. Écrivez l'équation cartésienne du plan tangent à la sphère (S) au point T.

Exercice 5.49

Soit la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y = 159$ et le plan π : $12x + 4y + 3z - 12 = 0$.
Déterminez les équations des plans parallèles au plan π et tangents à la sphère (S).

Essayez deux méthodes : - trouver les points de tangence
- utiliser la formule de la distance d'un point à un plan.

Exercice 5.50

Soit la sphère (S) : $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ et le plan π : $2x - 2y - z + 9 = 0$.

a. Prouvez que le plan π coupe la sphère (S).

b. L'intersection de π et (S) est un cercle (C) ; déterminez son centre et son rayon.

Positions relatives d'une droite et d'une sphère

Trois possibilités :

- la droite coupe la sphère en deux points ;
- la droite est tangente à la sphère ;
- la droite ne touche pas la sphère.

Une droite tangente à la sphère de centre Ω et de rayon r est située à la distance r de Ω.

Exercice 5.51

On donne la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$ et la droite d : $\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=6-2\lambda \\ z=-4+\lambda \end{cases}$

Calculez les coordonnées des points d'intersection de (S) et d.

Exercice 5.52

Soient la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z + 17 = 0$ et le point A(–2 ; 2 ; 3).

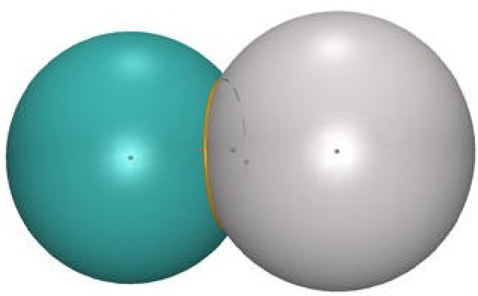
a. Vérifiez que le point A appartient à la sphère (S).

b. Écrivez l'équation d'une droite d tangente en A à la sphère.

c. Écrivez l'équation de la droite g tangente en A à la sphère et coupant l'axe des z.

Positions relatives de deux sphères

L'intersection des deux sphères est un cercle.



Exercice 5.53

Dessinez les six positions relatives possibles de deux sphères. Le cas où les deux sphères sont confondues n'est pas pris en compte.

Exercice 5.54

Soient deux sphères ($S1$) et ($S2$) :

$(S1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$
$(S2) : x^2 + y^2 + z^2 = 81$

a. Montrez que les sphères ($S1$) et ($S2$) sont tangentes.
b. Déterminez l'équation du plan tangent commun à ces deux sphères.

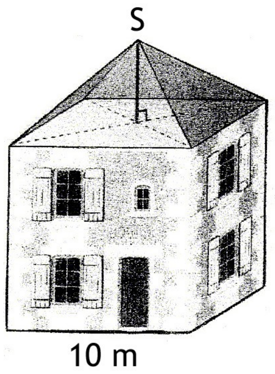
Exercice 5.55*

Pas très difficile, mais long...

Un architecte doit concevoir une maison en forme de cube. Il calcule un plan en trois dimensions, en faisant en sorte que toutes les coordonnées des points soient **positives**. Le plan Oxy sera le sol.
Il fixe un coin A de la maison aux coordonnées $A(6 ; 0 ; 0)$.

1. Il fixe un deuxième point (B) sur l'axe Oy, de sorte qu'il soit à une distance de 10 mètres de A. Donnez les coordonnées de B.
2. Calculez les coordonnées des points C et D, de sorte que $ABCD$ soit un carré. Avant d'aller plus loin, vérifiez sur un dessin que $ABCD$ est bien un carré.
3. Donnez les coordonnées des points E, F, G et H, de sorte que $ABCDEFGH$ soit un cube. On placera E au-dessus de A, F au-dessus de B, etc.
4. Donnez l'équation du plan posé sur le toit de la maison.

Un dicton dit qu'il y a deux types de maison à toit plat : celles dont le toit fuit, et celles dont le toit ne fuit pas encore. Les clients demandent donc à l'architecte de rajouter un toit. Pour garder l'harmonie de l'ensemble, l'architecte veut que la maison s'inscrive dans une sphère.



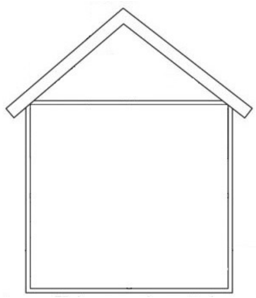
Toit pyramidal

5. Donnez l'équation de la sphère (S) circonscrite au cube.
6. L'architecte prévoit d'abord un toit en forme de pyramide régulière dont le sommet T se trouvera sur la sphère circonscrite. Donnez les coordonnées de T.

Comme les coordonnées de T sont un peu compliquées, il décide finalement que le sommet du toit sera le point $S(7 ; 7 ; 14)$.

7. Quel est le volume de la pyramide $EFGHS$?
8. Quelle est l'aire totale du toit ?
9. Une cheminée cylindrique doit traverser verticalement la maison. L'axe de la cheminée doit sortir du toit au point $L(5 ; 5.5 ; z_L)$. Calculez la cote z_L.
10. Sous quel angle se coupent deux pans adjacents du toit ?

Les clients sont dubitatifs. Ils demandent à l'architecte d'étudier une variante avec un toit plus classique, constitué de deux pans.



Toit classique à deux pans

11. Donnez les équations des deux plans contenant les pans du toit. Ces plans passeront tous les deux par le point $S(7 ; 7 ; 14)$. Le premier plan passera par E et F, l'autre par G et H.
12. Quel est le volume sous ce toit ?
13. Quelle est l'aire totale de ce toit ?
14. Est-ce que l'axe de la cheminée sortira du toit au même endroit qu'avec le toit pyramidal ?
15. Sous quel angle se coupent les deux plans contenant les pans du toit ?

En France, la *Loi Carrez* ne prend en compte, pour le calcul de la surface, que les pièces et locaux dont la hauteur sous plafond est supérieure à 1.80 m. Par conséquent, la surface Carrez des pièces mansardées est inférieure à leur surface au sol puisque les zones où la hauteur sous plafond est inférieure à 1.80 m ne sont pas prises en compte dans le calcul.

16. Calculez la surface Carrez du plancher $EFGH$...
    a. avec le toit pyramidal ;
    b. avec le toit à deux pans.

5.6. Quelques problèmes classiques... et comment les résoudre.

Problème	**Démarche**	**Madimu**[2]
Montrer que le triangle *ABC* est rectangle en *C*.	Vérifier que $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$	Ch.3, p.29
Montrer que le triangle *ABC* est isocèle en *C*.	Vérifier que $\\|\overrightarrow{CA}\\|=\\|\overrightarrow{CB}\\|$	
Soit le triangle *ABC*. Trouver *D* pour que le quadrilatère *ABCD* soit un parallélogramme (ou un rectangle, ou un carré).	$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$	Ch.4, Ex. 4.3
Montrer que 2 plans sont perpendiculaires.	Le produit scalaire des vecteurs normaux est égal à 0.	Ch.5, p.48
Calculer l'équation cartésienne du plan contenant les points *A*, *B* et *C*.	Poser un déterminant égal à 0.	Ch.5, p.45 + Ex. 5.9
Calculer l'équation cartésienne du plan contenant un point et une droite.	Poser un déterminant égal à 0.	Ch.5, p.45 + Ex. 5.9
Donner une représentation paramétrique d'une droite orthogonale à un plan.	Utiliser le vecteur normal du plan comme vecteur directeur de la droite.	Ch.5, p.47 + Ex. 5.22
Calculer l'aire du triangle *ABC*.	Si le triangle est rectangle en *C* (p.ex), aire $\frac{\\|\overrightarrow{CA}\\|\cdot\\|\overrightarrow{CB}\\|}{2}$ Sinon, utiliser le produit vectoriel	Ch.3, p. 32-33
Trouver le point *E* d'une droite *d* à égale distance des points *A* et *C*. *Même question :* Déterminer le point *E* d'une droite *d* tel que le triangle *ACE* soit isocèle en *E*.	Calculer le point d'intersection de la droite *d* et du plan médiateur du segment *AC* ou Résoudre $\\|\overrightarrow{AE}\\|=\\|\overrightarrow{CE}\\|$	Ex. 5.34
Montrer qu'une droite est parallèle à un plan.	Essayer de trouver l'intersection entre la droite et le plan et voir qu'il n'y en a pas ou l'angle aigu entre la droite et le plan doit être de 0°	Ex. 5.13 Ex. 5.41
Montrer qu'une droite est contenue dans un plan.	Vérifier que deux points de la droite appartiennent au plan.	
Montrer que deux plans *p* et *q* sont strictement parallèles.	Voir que les vecteurs normaux sont multiples et vérifier qu'un point de *p* n'appartient pas à *q*.	Ex. 5.14
Calculer le volume *V* d'un tétraèdre *ABCD*.	Utiliser le produit mixte : $V=\frac{1}{6}\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\|$	Ch.3, p.33-34 + Ex. 3.26
Montrer qu'une droite est tangente à un cercle (ou à une sphère).	Montrer que la distance entre le centre et la droite est égale au rayon.	Ch.5, p.49
Trouver le symétrique *A'* d'un point *A* par rapport à un plan *p*.	1. Trouver la droite *d* perpendiculaire au plan et passant par *A* 2. Trouver le point *B*, intersection du plan *p* et de la droite *d* 3. Trouver le vecteur $\overrightarrow{AB}$ 4. $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}$	

Calculer le point de tangence *T* d'une sphère (ou d'un cercle) et d'une droite *d*	Le point *T* est l'intersection de la droite et du plan orthogonal à la droite et passant par le centre de la sphère. ou Le point *T* est l'intersection de la sphère et de la droite (dans le cas d'un cercle, prendre la sphère ayant même centre et même rayon que le cercle).	Ex. 5.51

5.7. Ce qu'il faut absolument savoir

Donner la représentation paramétrique d'une droite connaissant deux points
ou un point et un vecteur directeur ❏ ok
Trouver un point quelconque d'une droite donnée et vérifier qu'un point appartient à une droite ❏ ok
Calculer le point d'intersection de deux droites (s'il existe) ❏ ok
Trouver les positions relatives de deux droites ❏ ok
Trouver le vecteur directeur d'une droite ❏ ok

Donner l'équation cartésienne d'un plan connaissant trois points ou un point et deux vecteurs directeurs ❏ ok
Donner l'équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal ❏ ok
Trouver le vecteur normal d'un plan connaissant son équation cartésienne ❏ ok
Trouver un point quelconque d'un plan donné et vérifier qu'un point appartient à un plan ❏ ok
Trouver les positions relatives de deux plans ❏ ok
Trouver le point d'intersection d'une droite et d'un plan ❏ ok
Trouver la droite d'intersection de deux plans ❏ ok

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs ❏ ok
Reconnaître deux vecteurs, deux droites ou deux plans perpendiculaires ❏ ok
Calculer la distance entre deux points ❏ ok
Trouver le plan médiateur d'un segment ❏ ok
Calculer la distance entre un point et un plan et la distance entre deux plans ❏ ok
Calculer la distance entre un point et une droite ❏ ok
Calculer la distance entre deux droites ❏ ok
Trouver les plans bissecteurs de deux plans ❏ ok

Calculer l'angle entre deux vecteurs et entre deux droites ❏ ok
Calculer l'angle entre deux plans ❏ ok
Calculer l'angle entre une droite et un plan ❏ ok

Donner l'équation cartésienne d'une sphère connaissant son centre et son rayon ❏ ok
Reconnaître l'équation cartésienne d'une sphère ❏ ok
Retrouver le centre et le rayon d'une sphère d'après son équation ❏ ok
Trouver un point d'une sphère donnée et vérifier qu'un point appartient à une sphère ❏ ok
Trouver les positions relatives d'une sphère et d'un plan ❏ ok
Trouver les positions relatives de deux sphères ❏ ok
Trouver les positions relatives d'une sphère et d'une droite ❏ ok
Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une sphère (s'ils existent) ❏ ok
Trouver le cercle d'intersection d'un plan et d'une sphère (s'il existe) ❏ ok
Trouver le cercle d'intersection de deux sphères (s'il existe) ❏ ok
Trouver le plan tangent à une sphère connaissant le point de tangence ❏ ok
Trouver le point de tangence de deux sphères ❏ ok