# 1. Ensembles

## 1.1. Définitions

### Ensembles, éléments et appartenance

Un **ensemble** peut être vu comme une sorte de sac virtuel entourant ses **éléments**, ce que modélisent bien les **diagrammes de Venn**. On distingue typographiquement un ensemble de ses éléments en utilisant une lettre latine majuscule, par exemple « $E$ » ou « $A$ », pour représenter l'ensemble, et des minuscules, telles que « $x$ » ou « $n$ », pour ses éléments.

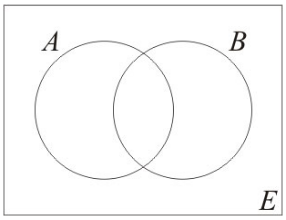



Diagramme de Venn

**L'appartenance** d'un élément, noté par exemple $x$, à un ensemble, noté par exemple $A$, s'écrit : $x \in A$ .
Cet énoncé peut se lire : « $x$ appartient à $A$ », ou « $x$ est élément de $A$ », ou « $x$ est dans $A$ », ou encore « $A$ a pour élément $x$ ».
On barre le symbole « appartient » pour indiquer sa négation, la non-appartenance d'un objet à un ensemble : $z \notin A$ signifie « $z$ n'appartient pas à $A$ ».

Un sous-ensemble est un ensemble dont chaque élément est aussi contenu dans un autre ensemble. Si $A$ est un sous-ensemble de $B$, on note $A \subset B$ .

Un **singleton** est un ensemble ne contenant qu'un élément.

Par exemple, si $J$ = {lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche} et $W$ = {samedi, dimanche}, alors $W \subset J$ . Par contre, le *singleton* {mardi} $\not\subset W$ .

### Ensembles finis

Un ensemble est fini quand on peut compter ses éléments à l'aide d'entiers tous plus petits qu'un entier donné.

Les ensembles finis peuvent être définis **en extension**, en écrivant la liste de leurs éléments. On place la liste des éléments d'un ensemble entre accolades, par exemple {2, 3, 5}. L'ensemble des jours de la semaine peut être représenté par {lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}.
Notons que la notation d'un ensemble en extension n'est pas unique : un même ensemble peut être noté en extension de façon différentes, car l'ordre des éléments est sans importance, par exemple {1, 2} = {2, 1}.

### Ensembles de nombres

Il existe différents types de nombres. Les nombres les plus familiers sont les entiers naturels : 0, 1, 2, 3, … éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ , et utilisés pour le dénombrement.
Si les entiers négatifs sont inclus, on obtient l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$ .
La division d'un entier relatif par un entier relatif non nul forme un nombre rationnel. L'ensemble de tous les nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ .
Si, dans l'ensemble, outre les éléments de $\mathbb{Q}$ , on inclut tous les développements décimaux infinis et non périodiques, on obtient l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$ .
Tous les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés nombres irrationnels.

Il existe aussi l'ensemble $\mathbb{D}$, qui est l'ensemble des nombres décimaux (à développement limité), par exemple 5.32 ou –0.5).

Nous avons donc une hiérarchie d'ensembles : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

### Définition d'un ensemble en compréhension

Un ensemble peut être défini **en compréhension**, c'est-à-dire qu'on le définit par une propriété caractéristique parmi les éléments d'un ensemble donné. Ainsi l'ensemble des entiers naturels pairs est clairement défini par compréhension, par la propriété « être pair » parmi les entiers naturels. On écrira :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pairs}\} \quad \text{ou} \quad \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

(la barre verticale se lit « tel que »)

Pour décrire l'ensemble des nombres entiers plus grands que 10, on écrira :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x > 10\}$$

### Autres notations

Il existe d'autres notations commodes, en particulier pour les ensembles de nombres, et plus généralement pour les ensembles totalement ordonnés. On peut utiliser des points de suspension pour des ensembles de cardinalité infinie, ou finie mais non déterminée.
Par exemple, l'ensemble des entiers naturels peut se noter par : $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, ...\}$.
S'il est clair par ailleurs que $n$ désigne un entier naturel, $\{1, 2, ... , n\}$, voire $\{1, ..., n\}$ désigne en général l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1 et inférieurs ou égaux à $n$. De même, on peut écrire $\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, ou encore $\{-n, -n+1, ..., n-1, n\}$.

La lettre $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand *Zahlen* (nombres).

Quand il y a un procédé itératif simple pour engendrer les éléments de l'ensemble, on peut se risquer à des notations comme $\{0, 2, 4, 6, ...\}$ pour l'ensemble des entiers naturels pairs, etc. On peut aussi utiliser ces notations pour des ensembles ayant « beaucoup » d'éléments : $\{1, 2, ..., 1000\}$ plutôt que d'écrire les mille premiers nombres entiers non nuls, ou encore $\{3, 5, ..., 21\}$ à la place de $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$.

Il existe aussi d'autres notations spéciales :

- $*$ signifie « sans le 0 ». Par exemple $\mathbb{Z}^*$
- $+$ signifie « plus grand que 0 (0 compris) ». Par exemple $\mathbb{R}_+$
- $-$ signifie « plus petit que 0 (0 compris) ». Par exemple $\mathbb{R}_-$

On peut aussi combiner ces symboles : $\mathbb{R}_+^*$

**Exercice 1.1**

Écrivez en extension les ensembles suivants :

$A=\{x\in\mathbb{N} \mid x<5\}$ $\quad B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2<10\}$ $\quad C=\{x^2 \mid x\in\mathbb{N} \text{ et } x<5\}$

$D=\{3x \mid x\in\mathbb{Z}\}$ $\quad E=\{\frac{1}{x} \mid x\in\mathbb{N}^*\}$

**Exercice 1.2**

Écrivez en compréhension les ensembles suivants :

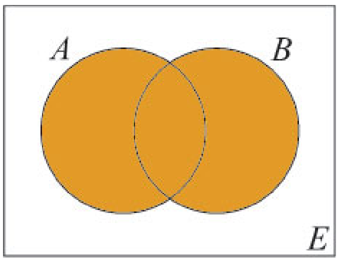
$A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ $\quad B = \{8, 12, 16, ..., 80\}$ $\quad C = \{ ..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$

$D = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ $\quad E=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}\}$ $\quad F = \{3, 9, 15, ..., 33\}$

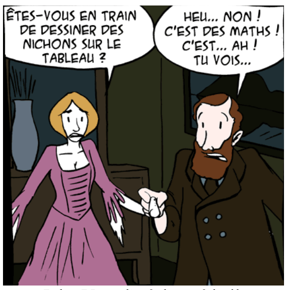
## 1.2. Opérations sur les ensembles

### Union

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.
$A\cup B=\{e\in E \mid e\in A \text{ ou } e\in B\}$




L'union correspond à « ou » : fille ou élève avec lunettes



John Venn l'a échappé belle.

Pour fixer les idées, on imaginera que $E$ est une classe, $A$ l'ensemble des filles et $B$ l'ensemble des élèves portant des lunettes.

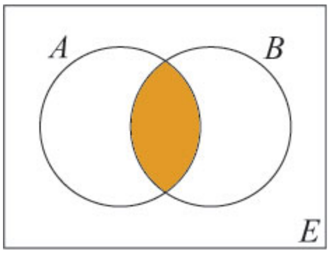
Dans notre exemple, l'ensemble final est composé de toutes les filles (avec ou sans lunettes), plus les garçons avec des lunettes.

## Intersection

L'intersection correspond à « et » : fille et avec lunettes

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$A \cap B = \{e \in E \mid e \in A \text{ et } e \in B\}$



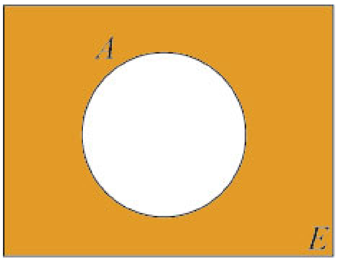

Dans notre exemple, l'ensemble final est composé des filles portant des lunettes.

## Complémentaire

Le complémentaire correspond à « non » : non fille

Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $E$.

$\overline{A} = \{e \in E \mid e \notin A\}$



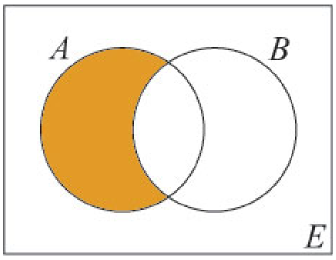

Dans notre exemple, l'ensemble final est composé de tous les garçons.

## Différence

La différence correspond à « moins » : fille moins avec lunettes

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$A \setminus B = \{e \in E \mid e \in A \text{ et } e \notin B\}$



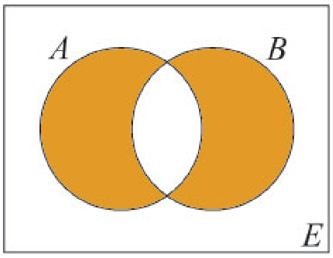

Dans notre exemple, l'ensemble final est composé de toutes les filles sans lunettes.

## Différence symétrique

La différence symétrique correspond à « ou exclusif » : fille ou avec lunettes, mais pas les deux.

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$A \Delta B = \{e \in E \mid e \in A \text{ ou (exclusif) } e \in B\}$

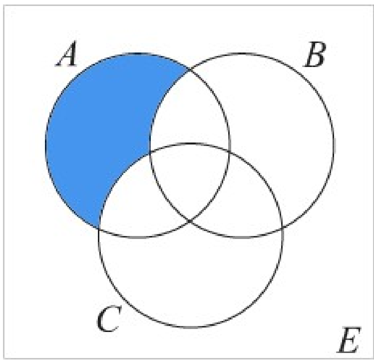



Dans notre exemple, l'ensemble final est composé des filles sans lunettes, plus les garçons avec des lunettes.

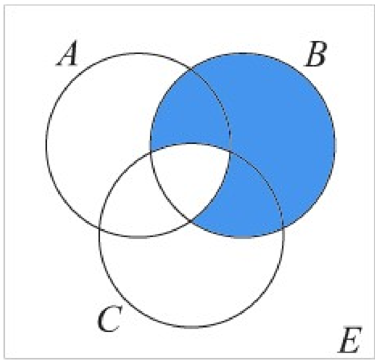
**Exercice 1.3**

Décrivez les parties bleues des ensembles ci-dessous à l'aide des opérations vues ci-dessus (il y a plusieurs solutions possibles).

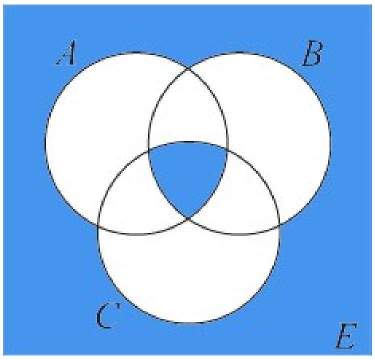
**a.**



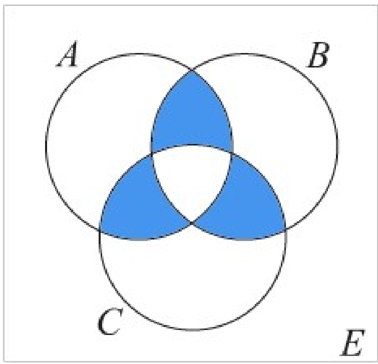

**b.**




**c.**




**d.**




**Exercice 1.4**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois sous-ensembles d'un ensemble $E$. Représentez les ensembles suivants avec des diagrammes de Venn :

**a.** $(A\cap B)\cup C$ **b.** $A\cap(B\cup C)$

**c.** $\overline{A}\cap B$ **d.** $\overline{A\cap B}$

**e.** $(A\setminus B)\cap C$ **f.** $A\setminus(B\cap C)$

**g.** $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ **h.** $(A\,\Delta\,B)\cup C$

---

## 1.3. Ce qu'il faut absolument savoir

Notations en extension et en compréhension ❏ ok
Les symboles des ensembles numériques : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ❏ ok
Les opérations sur les ensembles ❏ ok