

2. Fractions et pourcentages

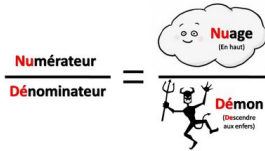
2.1. Définitions

Certaines divisions « tombent justes ». C'est par exemple le cas de la division $45 \div 18$ qui donne 2.5. On a pu écrire le **développement décimal** de ce nombre.

Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, $19 \div 3 = 6.333333333\dots$ Il y a une infinité de décimales.

Pour cette raison, on a créé une nouvelle espèce de nombre : **les fractions**.

Le résultat **exact** de la division $19 \div 3$ est le nombre $\frac{19}{3}$. Une valeur **approchée** de cette fraction est 6.333.



Une **fraction** correspond à un nombre, entier ou décimal, écrit sous la forme d'une division de deux nombres entiers. La partie au-dessus de la barre de fraction s'appelle le **numérateur**, celle en dessous s'appelle le **dénominateur**.

Exemple :

$\frac{5}{2}$ est une fraction qui correspond au nombre 2.5. Elle se lit « cinq demis ».

Le numérateur vaut 5 et le dénominateur 2.

Égalité de fractions

Pour vérifier si deux fractions sont égales, on peut utiliser le **produit en croix**.

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si $a \cdot d = b \cdot c$

Par exemple, $\frac{5}{2}$ et $\frac{45}{18}$ sont égales, car $5 \cdot 18 = 2 \cdot 45 = 90$.

Exercice 2.1

Les fractions ci-dessous sont-elles égales ?

a. $\frac{7}{4}$ et $\frac{35}{20}$

b. $\frac{14}{11}$ et $\frac{116}{99}$

c. $\frac{14}{19}$ et $\frac{38}{28}$

Amplification

Amplifier une fraction consiste à multiplier le numérateur **ET** le dénominateur par le même nombre.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Simplification

On peut **simplifier** une fraction si on peut **diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre**, selon la propriété suivante :

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Une fraction simplifiée au maximum est dans sa forme **irréductible**.

Exemple : $\frac{45}{18} = \frac{\cancel{9} \cdot 5}{2 \cdot \cancel{9}} = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2}$ est une forme irréductible.

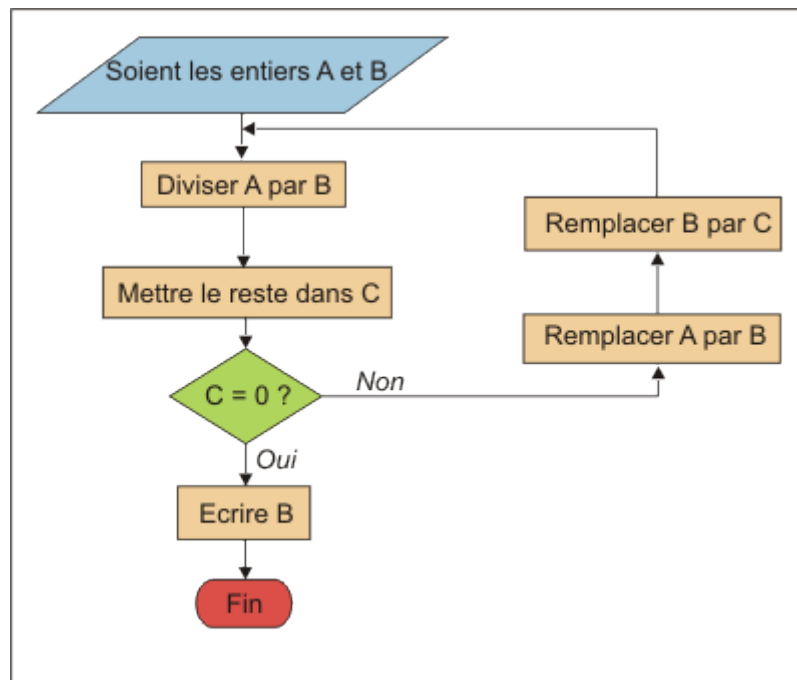
Algorithme d'Euclide

PGDC :
Plus Grand Diviseur Commun



Euclide
(Athènes, -325 -
Alexandrie, -265)

Cet algorithme permet de calculer le PGDC de deux nombres A et B ($A > B$).



Exemple : calculons le PGDC(80, 48)

	A	B	C	
$80 / 48 = 1$ reste 32	80	48	32	
$48 / 32 = 1$ reste 16	48	32	16	
$32 / 16 = 2$ reste 0	32	16	0	STOP

Donc PGDC(80,48) = 16

Cette méthode peut être utilisée pour simplifier des fractions et les mettre à coup sûr sous forme irréductible.



Exemple : mettons sous forme irréductible la fraction $\frac{715}{546}$

	A	B	C	
$715 / 546 = 1$ reste 169	715	546	169	
$546 / 169 = 3$ reste 39	546	169	39	
$169 / 39 = 4$ reste 13	169	39	13	
$39 / 13 = 3$ reste 0	39	13	0	STOP

Le PGCD(715, 546) est 13. On peut donc écrire $\frac{715}{546} = \frac{55 \cdot \cancel{13}}{42 \cdot \cancel{13}} = \frac{55}{42}$.

Remarque : la plupart des calculatrices permettent de calculer la fraction irréductible.

Du coup, voyez-vous comment utiliser votre calculatrice pour trouver le PGCD de deux nombres entiers, sans utiliser l'algorithme d'Euclide ?

Exercice 2.2

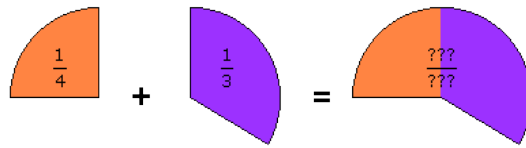
Mettez les fractions ci-dessous sous forme irréductible :

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| a. $\frac{105}{45}$ | b. $\frac{425}{612}$ | c. $\frac{264}{99}$ | d. $\frac{377}{403}$ |
| e. $\frac{123}{328}$ | f. $\frac{121}{231}$ | g. $\frac{609}{1305}$ | h. $\frac{132}{77}$ |

2.2. Calcul avec les fractions

Addition et soustraction

Essayons d'additionner $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$. Représentons ces fractions de manière... pâtissière :



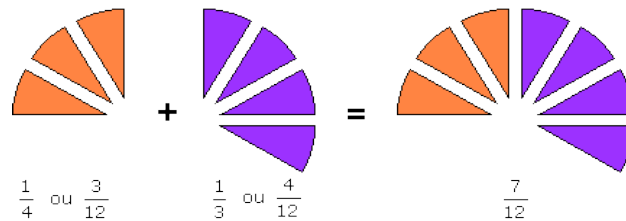
À quelle fraction correspond la part totale ? Les quarts et les tiers ne s'additionnent pas facilement même lorsqu'il s'agit de parts de gâteau ! La seule chose que nous savons faire, c'est additionner deux fractions ayant le **même** dénominateur.

Nous allons donc mettre les fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ sur un même dénominateur en les amplifiant de manière adéquate.

Parmi les dénominateurs communs possibles, il y a 12, 24, 36, ... Choisissons le plus petit d'entre eux : 12.

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

La situation a donc évolué : au lieu d'additionner des quarts et des tiers, nous allons additionner des douzièmes.



$$\text{Donc : } \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{12} = \frac{3 + 4}{12} = \frac{7}{12}$$

Méthode pour additionner ou soustraire deux fractions :

1. Amplifier les fractions de sorte qu'elles aient toutes le même dénominateur (le mieux est que ce dénominateur commun soit le plus petit multiple commun des dénominateurs d'origine, mais ce n'est pas indispensable).
2. Additionner ou soustraire les numérateurs.
3. Simplifier si nécessaire pour donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Cette méthode fonctionne aussi quand on veut additionner un entier et une fraction. Il suffit d'écrire l'entier n sous la forme $\frac{n}{1}$ et d'appliquer la méthode ci-dessus.

Exercice 2.3

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

b. $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$

c. $\frac{5}{2} - \frac{7}{3}$

d. $\frac{1}{6} + \frac{3}{4}$

e. $\frac{3}{5} + \frac{3}{2} + \frac{3}{10}$

f. $\frac{2}{7} - \frac{3}{4} + \frac{7}{11}$

g. $2 + \frac{4}{3} + \frac{3}{9}$

h. $\frac{7}{4} + \frac{6}{4} + \frac{5}{3} - \frac{3}{2}$

i. $\frac{-1}{2} - \frac{11}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{16} - \frac{3}{32} + \frac{7}{64} - \frac{75}{128}$

Multiplication

Pour multiplier une fraction par un nombre, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par ce nombre.

Pour multiplier deux fractions entre elles, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux, conformément aux différentes règles de multiplication.

Exemple : $\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{42}{20} = \frac{21}{10}$

C'est plus facile de simplifier d'abord !

On aurait aussi pu simplifier avant de multiplier : $\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$.

Exercice 2.4

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $\frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5}$

b. $6 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{11}{2}$

c. $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{7}$

d. $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot 2$

Inverse

L'inverse d'un nombre a est $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Ne pas confondre l'inverse et l'opposé !

Exemples : l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$; l'inverse de $\frac{5}{2}$ est $\frac{2}{5}$.

Division

Diviser une fraction par un nombre, c'est multiplier la première fraction par l'inverse de ce nombre.

Exemple : $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Autre notation : $\frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$

Diviser une fraction par une autre fraction, c'est multiplier la première fraction par l'inverse de la seconde fraction.

Exemple : $\frac{1}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$

Autre notation : $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$

Exercice 2.5

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $\frac{1}{4} \div 3$

b. $\frac{6}{5} \div \frac{8}{3}$

c. $\frac{\frac{8}{11}}{\frac{4}{9}}$

d. $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{12}{5} \cdot \frac{3}{7}}$

Fractions et signes

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$



Remarquez bien que $-\frac{a}{b} \neq \frac{-a}{-b}$!

Par exemple, $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{2}{-5} = -0.4$, mais $\frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} = 0.4$!

2.3. De la notation décimale vers la notation fractionnaire

Nombres rationnels

Un nombre **rationnel** est un nombre réel exprimable par le quotient de deux entiers relatifs (appartenant à \mathbb{Z}), avec le dénominateur non nul. Rappelons que l'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

Le développement décimal des nombres rationnels a la particularité d'être **périodique**, c'est-à-dire qu'il existe un suffixe constitué d'une séquence finie de chiffres se répétant continuellement. Cette séquence est appelée « période du développement décimal illimité ».

On verra à l'exercice 2.6 que $0.9=1$

Ce développement décimal illimité est unique si on s'interdit de finir par une séquence périodique de 9 ou de 0.

Par convention, on trace une barre horizontale au-dessus de la séquence périodique.

Exemples : $\frac{1}{3} = 0.333333... = 0.\bar{3}$

$$\frac{2}{37} = 0.054054... = 0.\overline{054}$$

$$\frac{115}{74} = 1.5540540... = 1.5\overline{540}$$



Il existe une méthode pour trouver la fraction correspondant à un nombre rationnel.

L'idée est de soustraire deux multiples de ce nombre de telle manière que la période disparaisse. Il faudra pour cela placer la virgule juste avant et juste après la période.

Combien faut-il de mathématiciens pour changer une ampoule ?

0.9

Exemple 1 : $n = 0.\bar{2} = \frac{?}{?}$

$$\begin{array}{r} 10n = 2.\bar{2} \\ - \quad n = 0.\bar{2} \\ \hline 9n = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(virgule placée juste après la séquence périodique)} \\ \text{(virgule placée juste avant la séquence périodique)} \end{array}$$

Donc $n = \frac{2}{9}$.

Exemple 2 : $n = 1.79\overline{54} = \frac{?}{?}$

$$\begin{array}{r} 10'000n = 17954.\overline{54} \\ - \quad 100n = 179.\overline{54} \\ \hline 9'900n = 17775 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(virgule placée juste après la séquence périodique)} \\ \text{(virgule placée juste avant la séquence périodique)} \end{array}$$

Donc $n = \frac{17775}{9900} = \frac{79}{44}$.

Exercice 2.6

Écrivez sous forme d'une fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

- a. $0.\bar{28}$
- b. $4.\bar{32}$
- c. $0.\bar{9}$
- d. $4.67\bar{9}$
- e. $0.23\overline{431}$
- f. $99.\bar{9}$
- g. $2.\overline{5281}$
- h. $100.\overline{01}$

Nombres irrationnels

Certains nombres réels ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers. Ces nombres sont dits **irrationnels** et leur écriture décimale ne contient pas de période. Par exemple, π et $\sqrt{2}$ sont irrationnels.

2.4. Les fractions dans la vie courante

Exercice 2.7

Pour acheter une nouvelle photocopieuse, un collègue décide de payer les $\frac{3}{4}$ du prix et les parents d'élèves $\frac{1}{5}$ de ce qui reste. Le canton a prévu de participer pour $\frac{1}{5}$ du prix de la photocopieuse.

Tout cela suffira-t-il pour faire cet achat ?

Exercice 2.8

La Sécurité sociale rembourse $\frac{11}{20}$ des frais médicaux et une mutuelle complète ce remboursement par les $\frac{4}{11}$ de ce que rembourse la Sécurité sociale.

- Quelle fraction des frais médicaux est remboursée par la mutuelle ?
- Finalement, quelle fraction des frais médicaux n'est pas remboursée ?

Exercice 2.9

Aurélië décide de dépenser le contenu de sa tirelire pour acheter des cadeaux de Noël. Elle utilise $\frac{3}{7}$ de sa fortune pour acheter un cadeau à Jérôme et $\frac{4}{9}$ pour Charlotte.

- Sans calculatrice, trouvez le cadeau qui coûte le plus cher.
- Quelle fraction de ses économies reste-t-il à Aurélië pour un cadeau à son petit frère ?

2.5. Pourcentages

Définition



Un **pourcentage** est une façon d'exprimer une proportion d'un ensemble. On compare une **valeur particulière** à une **valeur de référence** et on cherche à déterminer ce que vaudrait cette valeur particulière si la valeur de référence était ramenée à 100, sachant que les proportions sont respectées.

Ainsi, si, dans une population de 400 personnes (valeur de référence), 56 d'entre elles (valeur particulière) sont blondes, on rencontrerait, si les proportions étaient respectées, dans une population de 100 personnes, 14 personnes blondes.

En effet, $\frac{56}{400} = \frac{x}{100}$, d'où $x = \frac{56 \cdot 100}{400} = 14$.

On écrit alors que 14 % d'entre elles sont blondes.

Appliquer un pourcentage

Si une assemblée de 120 personnes compte 15 % de femmes, alors il y a 18 femmes, car $120 \cdot \frac{15}{100} = 18$

Le prix hors taxes d'un objet est 185 €. Le taux de TVA est de 5 %. Cette taxe s'élève donc à 9.25 € car $185 \cdot \frac{5}{100} = 9.25$.

Pourcentage d'augmentation et de réduction

En économie et dans les taux d'intérêt, l'étude porte sur des variations en pourcentage. On peut tout à fait décomposer le calcul en deux temps : calcul de l'augmentation ou de la réduction, puis calcul de la valeur finale en effectuant une addition ou une soustraction.

Il est préférable de voir ces augmentations ou ces réductions comme issues de l'application d'un **coefficient multiplicateur** qui permet de retrouver facilement une valeur de référence ou d'appliquer des augmentations successives.

Une **augmentation** de t % se traduit par une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$.

Une **diminution** de t % se traduit par une multiplication par $1 - \frac{t}{100}$.

Augmenter 35 fois de 2 % revient à multiplier par 1.02^{35} , c'est-à-dire 1.99989.
 Diminuer 35 fois de 2 % revient à multiplier par 0.98^{35} , c'est-à-dire à multiplier par 0.4931, ou, si on préfère, à diviser par 2.0281.
 Remarquez au passage que $1.02^{35} \cdot 0.98^{35} \neq 1$.

Retrouver la valeur de référence

Dans une assemblée, il y a 36 femmes. Elles représentent 30 % de l'assemblée. Donc l'assemblée est formée de 120 individus car $\frac{36}{0.3} = 120$ ($0.3 = 30\%$).

Pour retrouver la valeur de référence, il suffit de diviser la valeur finale par le coefficient multiplicateur.

Exemple : après une solde de 15 %, le prix d'un objet n'est plus que de 34 €. Le prix initial de l'objet était de 40 € car :

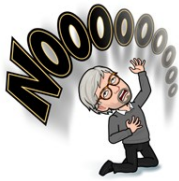
- la réduction correspond à une multiplication par $1 - \frac{15}{100} = \frac{85}{100} = 0.85$
- $0.85 \cdot x = 34$ d'où $x = \frac{34}{0.85} = 40$

Pourcentage de pourcentage

On peut être amené à multiplier entre eux des pourcentages. C'est le cas par exemple pour calculer des pourcentages de pourcentage.

Dans une assemblée, il y a 36 % de femmes et 25 % de ces femmes sont âgées de plus de 50 ans. Il y a donc 9 % de femmes âgées de plus de 50 ans, car $\frac{25}{100} \cdot \frac{36}{100} = \frac{9}{100}$.

Dangers et pièges



Pourcentage et point

Quand une population partielle (par exemple la population des porteurs de lunettes) passe de 10 % à 12 %, il est délicat de parler de l'augmentation. Une erreur fréquente est de dire que la population a augmenté de 2 %. En effet, en supposant que la population de référence soit de 100 individus et ne change pas entre la première et la seconde mesure, la population partielle passerait de 10 individus à 12 individus, soit une multiplication par 1.2, c'est-à-dire une augmentation de 20 %.

Or, il est parfois utile de chiffrer cette variation. Si le premier pourcentage est 10 %, et le second 12 %, on parlera d'une augmentation de 2 **points**.

Pourcentages composés

Lors de hausses et de baisses successives, la tentation est grande d'ajouter et soustraire les pourcentages d'augmentation. **C'est une erreur.**

Il est tentant de penser qu'une augmentation de 10 % suivie d'une baisse de 10 % ramène à la valeur initiale. Mais en reprenant la technique du coefficient multiplicateur et en l'appliquant à une quantité Q , les 10 % d'augmentation reviennent à multiplier la quantité Q par 1.1 et la réduction, s'appliquant à $1.1 \cdot Q$, revient à multiplier cette quantité par 0.9. Or, $0.9 \cdot 1.1 \cdot Q = 0.99 \cdot Q$, ce qui correspond à une baisse de 1 %.

Exercice 2.10

Un sweat-shirt qui valait 35 € est vendu en solde 29,75 €.

- Calculez le montant de la réduction.
- Quel pourcentage du prix de départ cela représente-t-il ?

Exercice 2.11

En moyenne, le cerveau représente environ 2 % de la masse du corps humain. Quelle est la masse du cerveau d'une personne pesant 53 kg ?

Exercice 2.12

Jean a acheté une voiture neuve valant 15'000 euros. La première année, les modèles perdent 30 % de leur valeur.

- Combien Jean pourra-t-il espérer revendre son véhicule au bout d'un an ?
- La deuxième année, et les suivantes, les modèles perdent 25 % de leur valeur par rapport à l'année précédente. Que vaudra alors la voiture de Jean au bout de 4 ans ?

Exercice 2.13

Hier, le prix du gasoil était de 0,86 €/litre. Il y a deux semaines, il était de 0,92 €/litre.

- De quel pourcentage le prix du gasoil a-t-il diminué ?
- Quel sera le prix du gasoil s'il diminue cette fois de 5 % ?

Exercice 2.14

Dans un pays, l'inflation atteint 6 % par mois.
Quel est le taux d'inflation annuel ?

Exercice 2.15

25 % des filles et 50 % des garçons d'une école assistent à un match de football. Si 48 % des élèves de l'école sont des filles, quel est le pourcentage des élèves qui ont assisté au match ?

Exercice 2.16

Un étudiant suisse achète en France un ordinateur dont le prix est de 1830 € TTC. Le vendeur lui indique que les ordinateurs supportent une taxe de 19.6 % en France sur le prix hors taxe. Cette TVA, qui est comprise dans le prix, lui sera remboursée s'il exporte son ordinateur vers la Suisse.

À combien se montera le remboursement de la TVA ?

Exercice 2.17

Un concombre est constitué de 99 % d'eau. On le laisse une nuit à l'air libre et il perd la moitié de son eau. Calculez le nouveau pourcentage d'eau du concombre.

Exercice 2.18

Expliquez cette publicité.

**Exercice 2.19**

En France, les règles d'étiquetage du fromage ont été modifiées en 2007.

La teneur en matière grasse est maintenant exprimée par rapport au poids total (eau comprise), alors qu'avant 2007, elle était exprimée en pourcentage par rapport à la matière sèche (autrement dit, la matière fromagère restant après avoir extrait toute l'eau naturellement présente dans le fromage).



- Vous consommez aujourd'hui 30 g d'un fromage étiqueté « 20 % de matière grasse ». Combien avez-vous consommé de matière grasse ?
- En 2006, un fromage blanc était étiqueté « 40 % matière grasse ». Ce fromage blanc avait une teneur moyenne en eau de 82 %. En consommant 100 g de ce fromage, quelle quantité de matière grasse auriez-vous consommée ? Calculez la teneur en matière grasse affichée actuellement sur l'étiquette de ce fromage.
- Un fromage de type Camembert est actuellement étiqueté « 20.7 % de matière grasse ». Sa teneur moyenne en eau est de 54 %. Quelle aurait été la teneur en matière grasse affichée avant 2007 sur ce fromage ?
- Un fromage de type Emmental porte les deux mentions « 45 % de matière grasse sur matière sèche » et « 28 % de matière grasse sur produit fini ». Calculez la teneur moyenne en eau.

2.6 Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître l'algorithme d'Euclide

ok

Simplifier des fractions

ok

Calculer avec des fractions

ok

Écrire un nombre rationnel sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers

ok

Maîtriser les pourcentages

ok