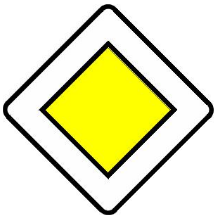
3. Calculs

3.1. Calculatrice

Priorité des opérations

La notation algébrique de votre calculatrice est-elle hiérarchisée ou non ?
Pour le savoir, écrivez sur votre calculatrice : $2 + 3 \cdot 5$.
Si vous trouvez 17, la notation est hiérarchisée.
Si vous trouvez 25, elle ne l'est pas (et vous pouvez la jeter !).



L'ordre de priorité s'établit ainsi (plus le numéro est élevé, plus la priorité est grande) :

Priorité 4 - les parenthèses ( )
Priorité 3 - l'exponentiation y^x (ou ^) et les fonctions (sinus, cosinus, etc.)
Priorité 2 - la multiplication et la division
Priorité 1 - l'addition et la soustraction

La règle de priorité est la suivante :

- en lisant de gauche à droite, quand un nombre se trouve entre deux signes opératoires, c'est l'opération prioritaire qui est effectuée en premier.
- si les deux opérations ont le même niveau de priorité, elles sont effectuées dans l'ordre d'écriture.

Exercice 3.1

Calculez de tête :

a. $3 \cdot 2 + 1$ **b.** $3 \cdot (2+1)$ **c.** $4 + 3 \cdot 2$
d. $(4+3) \cdot 2$ **e.** $2/3 \cdot 5$ **f.** $2 + 3 \cdot 5^2$

Supprimez les parenthèses inutiles :

g. $(3/x) + 2 + (4 \cdot 3) - 1$ **h.** $(4 \cdot x) + 5(2+x)$
i. $(x+2) \cdot (x-1) + (3 \cdot x) - (x+2)$ **j.** $(x-3)^2 \cdot (x-4) + (x+2)^3$

Exercice 3.2

À l'aide de votre calculatrice, calculez :

a. $\frac{421}{51} \cdot \frac{13}{17^2} + \frac{5}{3}$ **b.** $\frac{\sqrt{41}}{3 \cdot \sqrt{22}}$

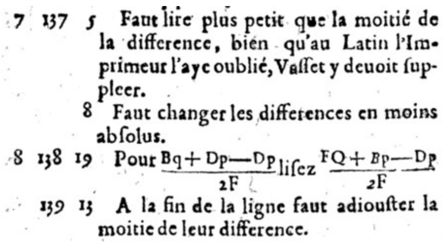
c. $(188+213) \cdot \sqrt[3]{456 \cdot 11 + 324}$ **d.** $2^{5/3+1}$

e. 3^{3^3}

3.2. Le langage algébrique

L'aspect récent des signes modernes + et – semble venir d'un livre écrit par Johannes Widman en 1489. Le signe = a été introduit par Robert Recorde en 1557.

Jusqu'au 16$^{\text{ème}}$ siècle, la résolution de problèmes était principalement rhétorique : les calculs s'exprimaient en phrases complètes (voir l'extrait ci-contre, tiré de « *Introduction en l'art analytic, ou nouuelle algebre* » de François Viète (1540-1603).


7 137 5 Faut lire plus petit que la moitié de la difference, bien qu'au Latin l'Imprimeur l'aye oublié, Vaſſet y deuoit ſuppleer.
8 Faut changer les differences en moins abſolus.
8 138 19 Pour $\frac{Bq + Dp - Dp}{2F}$ liſez $\frac{FQ + Bp - Dp}{2F}$
139 13 A la fin de la ligne faut adiouſter la moitie de leur difference.

Mais la complexité des calculs conduisit les mathématiciens à construire des notations symboliques. C'est le travail entrepris par **Viète**, **Descartes**, et d'autres qui a fait entrer les mathématiques dans l'ère de l'algèbre.

Exercice 3.3

Écrivez les expressions suivantes en termes algébriques :

a. l'entier suivant le nombre entier n
b. le triple du nombre n
c. le double de l'entier précédant le nombre entier n
d. le produit de deux nombres entiers consécutifs
e. un nombre impair
f. une puissance de 2
g. l'inverse de x
h. l'opposé de x
i. le double du carré de l'inverse de l'opposé de l'entier précédant le quadruple de x

Exercice 3.4

Associez la bonne description aux expressions algébriques :

$x+y$	est un produit
x^2-y^2	est le double du carré d'une somme
$2(x+y)^2$	est le carré du double d'une somme
$(x-y)^2$	est la somme des carrés
xy	est le carré d'une somme
$(x+y)^2$	est une somme
$(x-y)(x+y)$	est le carré d'une différence
$2xy$	est la différence des carrés
$(2(x+y))^2$	est un double produit
x^2+y^2	est le produit d'une somme par une différence

3.3. Puissances

Définition

La **puissance $n^{\text{ième}}$** d'un nombre réel a est un produit de n facteurs tous égaux à a :

$a^2=a\cdot a$, $a^3=a\cdot a\cdot a$, etc.

On dit que a est la **base** de la puissance et n **l'exposant.**

Propriétés

Pour tous les réels a et b non nuls et tous les entiers n et m non nuls, on a les propriétés suivantes :

$a^0=1$. Pourquoi ?

1. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ **2.** $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

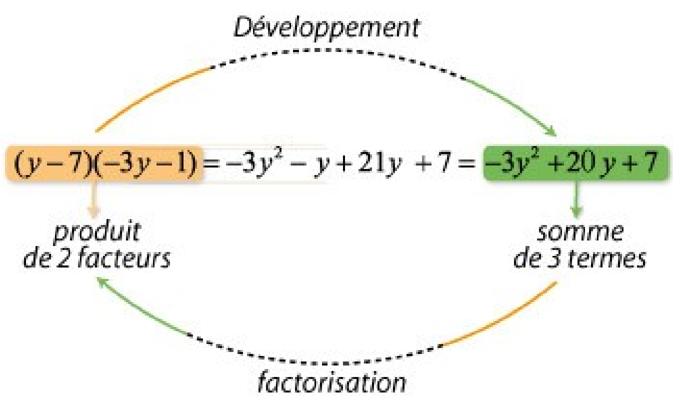
3. $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$ **4.** $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$

5. $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ **6.** $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

Exercice 3.5

Retrouvez ces formules à partir de la définition de la puissance !

3.4. Factorisation



Mise en évidence

On met en évidence les symboles apparaissant dans plusieurs termes d'une expression. Par exemple, $ab + ac = a(b+c)$. Notez bien que les parenthèses sont obligatoires, car la multiplication est prioritaire sur l'addition. Dans l'exemple suivant, on peut mettre « 3 » en évidence :

$$3x + 3y + 6z = 3(x + y + 2z)$$

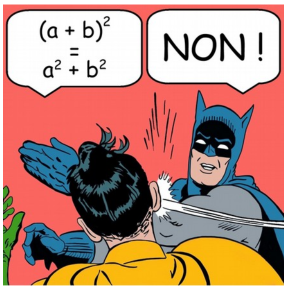
Formules remarquables

Les formules de droite s'obtiennent à partir des formules de gauche en remplaçant b par $(-b)$.

Remarque : Il faut aussi savoir utiliser ces formules « de droite à gauche » !

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Attention ! Pas de formule pour $a^2 + b^2$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

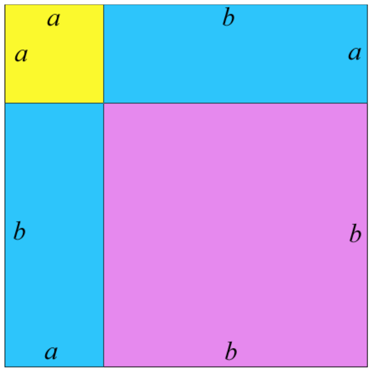
Toutes ces formules se démontrent facilement en développant le terme de gauche. Par exemple $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



On peut aussi démontrer cette formule de façon géométrique, comme l'avait fait **Euclide** dans le *livre II* de ses *Eléments*.

La figure ci-contre représente un carré dont le côté est la somme de deux valeurs a et b. Son aire vaut donc $(a + b)^2$.

Elle s'obtient aussi par l'addition de l'aire du carré jaune (a^2), des aires des rectangles bleus (ab pour chacun) et de l'aire du carré violet (b^2).



Factorisation par tâtonnement

Factoriser consiste à transformer une somme de termes en un produit de facteurs.

Par exemple :

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Il faut donc trouver (par tâtonnement) deux nombres a et b dont la somme correspond au deuxième terme et le produit au troisième terme. Il est plus facile de commencer le tâtonnement par le produit.

Exemple

$x^2 + 11x + 28 = (x + 4)(x + 7)$

On a tâtonné ainsi :

$28 = 1 \cdot 28$ mais $1+28 \neq 11$

$28 = 2 \cdot 14$ mais $2+14 \neq 11$

$28 = 4 \cdot 7$ et $4+7 = 11$

Pour vérifier une factorisation, il suffit de développer le produit écrit au deuxième membre et de voir si l'on retrouve bien le premier membre.

Factorisation par groupement

Lorsque l'on a un nombre pair de termes, on peut essayer de factoriser par groupement.

$$\begin{aligned} 64x^3 - 16x^2 - 100x + 25 &= \boxed{64x^3 - 16x^2}\boxed{-100x + 25} \\ &= \boxed{16x^2(4x - 1)}\boxed{- 25(4x - 1)} \\ &= (16x^2 - 25)(4x - 1) \\ &= (4x + 5)(4x - 5)(4x - 1) \end{aligned}$$

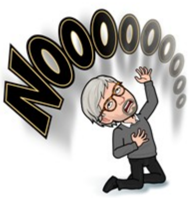
Exercice 3.6 Factorisez :

a. $7a + 7ab - 7a^2$
b. $4a^2 - 1$
c. $a^3 - 8$
d. $x(a - b) + 3(b - a)$
e. $x^2 + 5x + 6$
f. $a^3 - a + 2a^2 - 2$
g. $(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1)$
h. $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$
i. $(-a - b)^3 + 4(a + b)$
j. $3x^2 - 18x - 48$
k. $x^2 - 3x - 28$
l. $1 - x^2y^2$
m. $8a^6 + 1$
n. $a^2 + 2ab - x^2 + b^2$
o. $x^3 + x^2 - 6x$
p. $a^3 - 3a^2 + 3a + 7$
q. $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$
r. $(x + 2)^2 - 9$
s. $4x^3 - 36x$
t. $2a^3 - 6a^2 + 6a - 2$

3.5. Fractions littérales

Quand on simplifie une fraction, <u>tous</u> les termes doivent être simplifiés de la même façon.
Le mieux est de factoriser avant de simplifier.

Exemple : simplifier $\frac{3ab^2+6b}{3ab}$



Faux

$$\frac{\cancel{3a}b^2+6\cancel{b}}{\cancel{3ab}}=\frac{b^2+6}{1}=b^2+6$$

Encore faux

$$\frac{\cancel{3a}b^2+6b}{\cancel{3ab}}=\frac{b+6b}{1}=7b$$

Juste

$$\frac{\cancel{3b}(ab+2)}{\cancel{3}a\cancel{b}}=\frac{ab+2}{a}=b+\frac{2}{a}$$

Juste (sans factoriser)

$$\frac{\cancel{3}ab^2+\cancel{6}_2b}{3ab}=\frac{ab^{\cancel{2}}+2\cancel{b}}{a\cancel{b}}=\frac{ab+2}{a}=b+\frac{2}{a}$$

Exercice 3.7 Simplifiez les fractions suivantes :

a. $\frac{6a^6b^2c}{4a^2b^2c^5}$ **b.** $\frac{5a+5b}{7a+7b}$ **c.** $\frac{a+ab}{2ab}$

d. $\frac{(a-b)^2}{b-a}$ **e.** $\frac{a^3-1}{(a-1)^3}$ **f.** $\frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}$

Exercice 3.8 Effectuez et simplifiez :

a. $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}$ **b.** $\frac{a}{3}-\frac{2a}{5}+a$ **c.** $\frac{2}{a}-\frac{a}{2}$

d. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ **e.** $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-3}$ **f.** $\frac{1}{a+b}-\frac{2a}{a^2-b^2}$

Exercice 3.9 Effectuez et simplifiez :

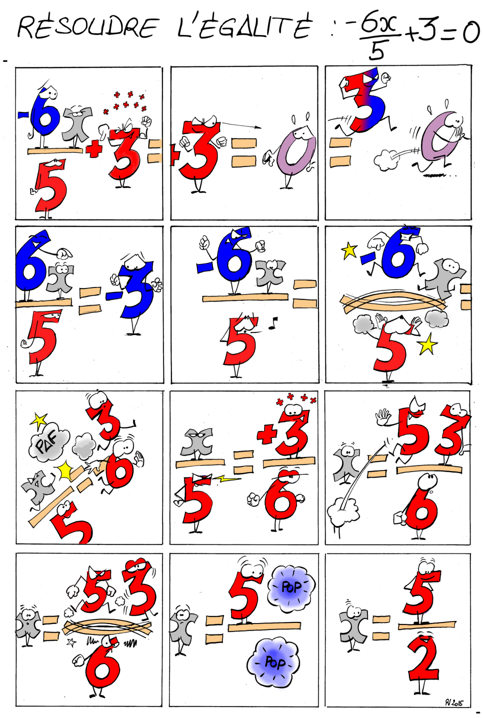
a. $\frac{3ab}{-5c}\cdot\frac{20b^3c^2}{9a^2}\cdot\frac{-a}{2b^2c}$ **b.** $\frac{a^2-b^2}{a}\cdot\frac{a^2b}{a^2+2ab+b^2}$ **c.** $\frac{\frac{5a^2b}{c}}{\frac{10b^2}{c^2}}$

3.6. Règles de manipulation des égalités

On peut voir une égalité comme une balance qui doit rester en équilibre, quelle que soit la manipulation que l'on effectue.

1. Si l'on ajoute ou retranche quelque chose (disons c) sur le plateau de gauche, on doit impérativement ajouter la même quantité sur le plateau de droite : $A=B \Leftrightarrow A+c=B+c$
2. De même si l'on élève à une puissance : $A=B \Rightarrow A^2=B^2$
3. Si on multiplie la partie de gauche par un nombre, on doit multiplier la partie de droite par le même nombre : $A=B \Leftrightarrow A\cdot c=B\cdot c$. **Attention !** Le nombre c doit être différent de 0 !
4. De même pour la division : $A=B \Leftrightarrow \frac{A}{c}=\frac{B}{c}$. **Attention !** c doit être différent de 0 !

Pour résumer, si l'on fait une manipulation du côté gauche de l'équation, on doit faire la même manipulation du côté droit.
Le but de ces manipulations est d'arriver à une équation, équivalente à celle de départ, mais de la forme $x = ...$. On appelle cela **résoudre une équation.**



Exemple

Résoudre l'équation $5x-4=3x+2$

$$\begin{array}{ll} 5x-4=3x+2 & \mid -3x \\ 2x-4=2 & \mid +4 \\ 2x=6 & \mid \div 2 \\ x=3 & \end{array}$$

On peut vérifier que $5\cdot 3-4=3\cdot 3+2$

Exercice 3.10

Résolvez les équations suivantes :

a. $-3x-4=3x-2+6x$ **b.** $3(2x+4)=10x+4-4(x-2)$

c. $x^2-4+8x+2=2(4x+1)$ **d.** $x^2=x(x+2)$

e. $x^3-8=x^2(x+2)$

Exercice 3.11

Dans chacune des formules de physique suivantes, exprimez chaque lettre au moyen des autres :

a. $F=G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ **b.** $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ **c.** $v=a\cdot t+v_0$

d. $x=\frac{1}{2}a\cdot t^2+x_0$ **e.** $U=R\cdot I$ **f.** $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$

g. $P=\frac{U^2}{R}$ **h.** $W=R\cdot I^2\cdot t$

3.7. Alphabet grec

alpha	Α, α	nu	Ν, ν
bêta	Β, β	xi	Ξ, ξ
gamma	Γ, γ	omicron	Ο, ο
delta	Δ, δ	pi	Π, π
epsilon	Ε, ε	rhô	Ρ, ρ
dzêta	Ζ, ζ	sigma	Σ, σ
êta	Η, η	tau	Τ, τ
thêta	Θ, θ	upsilon	Υ, υ
iota	Ι, ι	phi	Φ, φ
kappa	Κ, κ	khi	Χ, χ
lambda	Λ, λ	psi	Ψ, ψ
mu	Μ, μ	oméga	Ω, ω

3.8. Ce qu'il faut absolument savoir

Maîtriser le langage algébrique ❏ ok
Connaître les priorités des calculatrices ❏ ok
Manipuler les puissances ❏ ok
Connaître toutes les identités remarquables par cœur ❏ ok
Factoriser ❏ ok
Simplifier ❏ ok
Maîtriser le calcul avec les fractions littérales ❏ ok
Maîtriser le calcul littéral ❏ ok