4. Polynômes

4.1. Monômes

Monômes

Un **monôme** est une expression obtenue par multiplication de nombres et de lettres.

Les deux premiers monômes sont sous forme réduite.

Exemples : $\frac{1}{3}ab^2$, $-3(xy)^2z$, $ab4xay(-b)b$

Un monôme est sous **forme réduite** si l'on effectue le produit des nombres et regroupe les puissances d'une même lettre. Par convention, on écrit d'abord le signe, puis le nombre, puis les lettres que l'on place par ordre alphabétique.

Par exemple, $ab4xay(-b)b=-4a^2b^3xy$

Exercice 4.1

Écrivez les monômes suivants sous forme réduite :

a. $a{\cdot}b{\cdot}x{\cdot}5{\cdot}a{\cdot}y{\cdot}(-3b){\cdot}c$ **b.** $-z{\cdot}c{\cdot}z{\cdot}12{\cdot}a{\cdot}y{\cdot}(-2c){\cdot}c$

Vocabulaire

Dans un monôme donné sous forme réduite, le nombre (avec le signe) s'appelle le **coefficient** du monôme. Le reste de l'expression formé d'une ou plusieurs variables élevées à des puissances <u>entières positives</u> est nommée **partie littérale** du monôme.

Deux monômes sont **semblables** si, après réduction, leurs parties littérales sont égales.

Par exemple, $\frac{1}{3}ab^2$ et $-71ab^2$ sont semblables.

Notez bien que l'ordre des lettres ne changent rien au résultat. Ainsi, $ab = ba$.

Multiplication

On effectue le produit des coefficients et le produit des parties littérales en utilisant les règles de calcul avec les puissances, afin d'obtenir un résultat réduit.

Exemple : $(2ab^2)(3a^4c)=6a^5b^2c$

Élévation à une puissance

On applique la règle de calcul de puissance d'un produit, afin d'obtenir un résultat réduit.

Exemple : $(2ab^2)^3=8a^3b^6$

Division

On effectue la division des coefficients (de sorte à obtenir un nombre réel ou une fraction irréductible) et la division des parties littérales en utilisant les règles de calcul avec les puissances, afin d'obtenir un résultat réduit.

Deux remarques importantes

1. Le résultat n'est en général pas un monôme ! En effet, il se peut qu'une des variables du résultat réduit soit élevée à une puissance négative.
2. Il faut préciser les conditions de validité de l'écriture en écartant toutes les valeurs des variables qui annulent le dénominateur (division par 0 !).

Exemple : $\frac{3ab^2}{7a^2b}=\frac{3}{7}a^{-1}b$ ($a\neq 0$ et $b\neq 0$)

Somme et différence de monômes semblables

On ne peut additionner ou soustraire que des monômes semblables.
On additionne ou soustrait les coefficients ; la partie littérale reste inchangée.

Exemple : $3ab^2 - 7ab^2 = -4ab^2$

Exercice 4.2

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $(-2a^2b)(a^4bc)$ **b.** $(-2ab^2)(-3a^2d)$

c. $(-2a^2)^4$ **d.** $(a^4bc^3)^2$

e. $\dfrac{-2a^2b}{a^4bc}$ **f.** $\dfrac{-3a^3b^2cd}{-a^4bc^3}$

g. $-5a^2b+2a^2b$ **h.** $-5ab^3+2ab^2+3ab^3$

4.2. Polynômes

Définitions

Un **polynôme** est une somme ou différence de monômes.

Le **degré** d'un polynôme par rapport à une lettre est la plus grande puissance à laquelle cette lettre est élevée dans le polynôme.

Exemple : le polynôme $\frac{1}{3}ax^4 - 3bx + 2$ est de degré 4 pour la lettre *x*.

Un polynôme est sous **forme réduite** si chaque monôme composant celui-ci est réduit et si l'on a regroupé tous les monômes semblables.

Exercice 4.3

Réduisez les polynômes suivants et donnez leur degré pour la lettre *x*. Écrivez la réponse sous la forme $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ (c'est-à-dire les puissances de *x* décroissantes). Par exemple : $10x^3 + 3x^2 - 9$.

a. $3x^2+7x^2+8x-9$ **b.** $3x-4x\cdot x^2+2x^2-x^3$

c. $-5a^2x+2ax$ **d.** $3abx^2+2x+x^2+3$

e. $-x\cdot b\cdot x^2+a\cdot x^2+7x^2+c\cdot x$ **f.** $-x\cdot x^3\cdot x^2+2x^6+8x^3-3x\cdot x^2$

Somme, différence

On regroupe, additionne ou soustrait tous les monômes semblables. Le résultat est donné sous forme réduite.

Exemple : $(3x^2 + x - 9) - (4x^2 + 2) = -x^2 + x - 11$

Produit

On effectue le produit de deux polynômes en appliquant la règle de la distributivité ci-dessous. Le résultat est donné sous forme réduite.

Le résultat est
$-12x^4y^6 - 6x^4y^5 + 4xy^3 + 2xy^2$

Vérifiez...

$$(-3x^3y^4 + y)\cdot(4xy^2 + 2xy)$$

On utilisera les expressions suivantes de façon équivalente : « effectuer le produit de polynômes », « distribuer et réduire », ou encore « développer ».
Ces opérations consistent toutes à transformer une expression algébrique donnée sous la forme d'un produit de termes en une somme de termes (c'est l'opération inverse de la factorisation).

Exemple : $(7x^2-3x+4)(x-3)=7x^3-21x^2-3x^2+9x+4x-12$

$$=7x^3-24x^2+13x-12$$

On peut aussi utiliser un tableau :

	$7x^2$	$-3x$	4
x	$7x^3$	$-3x^2$	$4x$
-3	$-21x^2$	$9x$	-12

On place sur la première ligne un des polynômes à multiplier et sur la première colonne l'autre polynôme. On rassemble ensuite tous les termes pour trouver le résultat final.

Élévation à une puissance

Le produit de deux ou plusieurs polynômes identiques est une puissance de polynômes et peut s'exprimer à l'aide de parenthèses et d'un exposant.

Dans certains cas, l'application des identités remarquables (§ 3.4), nous permettra d'effectuer cette opération plus facilement.

Exemple : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

Exercice 4.4

Effectuez les opérations ci-dessous :

a. $-5a^2x+2a^2x+ax^2-x$

b. $(x+3)(x^2-1)$

c. $(x+3)(x^2-1)(2x+1)$

d. $(x+1)^3$

4.3. Division de polynômes

Un polynôme de degré n a n racines, mais certaines peuvent être des nombres complexes.

On appelle **racine** d'un polynôme la valeur $x = r$ telle que $P(r) = 0$.
Si r est une racine, $P(x)$ est alors divisible par $(x - r)$ et le reste est nul.
Si r n'est pas une racine, alors le reste n'est pas nul et la valeur numérique du reste est égale à $P(r)$.

Un polynôme de degré n peut avoir jusqu'à n racines réelles. Un polynôme de degré impair a **toujours au moins une** racine réelle.

Un exemple

Soit $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$. Ce polynôme est de degré 4, il y a donc quatre racines réelles au maximum (peut-être moins).

Divisons $P(x)$ par $(x - 3)$:

Étape 1 : division de $x^4 - 2x^3$ par $x - 3$. Quotient x^3, reste x^3.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 & \underline{x-3} \\ \underline{x^4 - 3x^3} & x^3 \\ \qquad x^3 & \end{array}$$

Étape 2 : division de $x^3 - 7x^2$ par $x - 3$. Quotient x^2, reste $-4x^2$.

Niccolò Fontana dit **Tartaglia** (1499-1557)

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 & x - 3 \\
\underline{x^4 - 3x^3} & x^3 + x^2 \\
\quad x^3 - 7x^2 & \\
\quad \underline{x^3 - 3x^2} & \\
\qquad -4x^2 &
\end{array}
$$

Étape 3 : division de $-4x^2 + 8x$ par $x - 3$. Quotient $-4x$, reste $-4x$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 & x - 3 \\
\underline{x^4 - 3x^3} & x^3 + x^2 - 4x \\
\quad x^3 - 7x^2 & \\
\quad \underline{x^3 - 3x^2} & \\
\qquad -4x^2 + 8x & \\
\qquad \underline{-4x^2 + 12x} & \\
\qquad\qquad -4x &
\end{array}
$$

Jérôme **Cardan** (1501-1576)

Étape 4 : division de $-4x + 12$ par $x - 3$. Quotient -4, reste 0.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 & x - 3 \\
\underline{x^4 - 3x^3} & x^3 + x^2 - 4x - 4 \\
\quad x^3 - 7x^2 & \\
\quad \underline{x^3 - 3x^2} & \\
\qquad -4x^2 + 8x & \\
\qquad \underline{-4x^2 + 12x} & \\
\qquad\qquad -4x + 12 & \\
\qquad\qquad \underline{-4x + 12} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$P(x)$ est divisible par $(x - 3)$ car le reste est nul. 3 est donc une racine, ce qu'on peut facilement vérifier en constatant que $P(3) = 0$.

$P(x)$ peut alors se factoriser : $P(x) = (x - 3)(x^3 + x^2 - 4x - 4)$.

Essayons maintenant de diviser $P(x)$ par $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 & x - 1 \\
\underline{x^4 - x^3} & x^3 - x^2 - 8x \\
\quad -x^3 - 7x^2 & \\
\quad \underline{-x^3 + x^2} & \\
\qquad -8x^2 + 8x & \\
\qquad \underline{-8x^2 + 8x} & \\
\qquad\qquad\qquad 12 &
\end{array}
$$

On voit que $P(x)$ n'est pas divisible par $(x - 1)$, car le reste vaut 12. 1 n'est donc pas une racine. D'autre part, on remarque que $P(1) = 12$.

Exercice 4.5 Trouvez les racines de $x^3 - 3x^2 - 46x + 168$, sachant que -7 est une racine.

Exercice 4.6 Trouvez les racines de $x^4 - 14x^3 + 68x^2 - 136x + 96$, sachant que 2 est une racine double.

Exercice 4.7 Trouvez les racines de $x^3 - 2x^2 - x + 2$ ...

a. en le factorisant ;

b. par une division de polynômes, après avoir trouvé une racine.

Exercice 4.8 Trouvez les racines de $2x^3 - 3x^2 + 1$.

Exercice 4.9

Divisez $a^3 - b^3$ par $a - b$.

Schéma de Horner

William George **Horner** (1786-1837) est un mathématicien britannique. Il est connu pour « sa » méthode, déjà publiée par **Zhu** Shijie vers 1300, mais aussi utilisée (en Angleterre) par Isaac **Newton**, 150 ans avant Horner.

Le schéma de Horner utilise un tableau pour calculer $P(r)$, où P est un polynôme. Sa force est que, tout en calculant $P(r)$, on peut obtenir une factorisation de P si r est une racine de P.

1. Soit n le degré du polynôme. Tracer un tableau avec trois lignes et n+2 colonnes.
2. Reporter les coefficients a_i du polynôme dans la première ligne, en commençant par la droite (laisser la colonne de gauche vide).
3. Placer la racine « évidente » r dans la case la plus à gauche de la deuxième ligne.
4. Reporter le premier coefficient dans la troisième ligne (deuxième colonne).
5. Remplir ensuite les deux dernières lignes du tableau, colonne par colonne, de gauche à droite :
    6. Multiplier le nombre le plus à droite de la troisième ligne par la racine évidente.
    7. Reporter le résultat dans la colonne suivante, sur la deuxième ligne.
    8. Dans cette nouvelle colonne, effectuer l'addition des nombres de la première et de la deuxième ligne et reporter le résultat dans la troisième ligne.

   Refaire les opérations 6 à 8 jusqu'à la dernière colonne du tableau.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
r		$r \cdot b_{n-1}$	$r \cdot b_{n-2}$	...	$r \cdot b_1$	$r \cdot b_0$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + r \cdot b_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + r \cdot b_{n-2}$	...	$b_0 = a_1 + r \cdot b_1$	$P(r) = a_0 + r \cdot b_0$

Un exemple

Résolvons $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$ (*)

L'objectif est de mettre (*) sous la forme $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = 0$

On commence par rechercher une racine évidente du polynôme (une racine évidente est une solution comme −2, −1, 1, 2, 3, ...).
Dans notre cas, 3 est une racine évidente de P.

		1	−2	−7	8	12 ← coefficients de (*)
racine évidente →	3		3	3	−12	−12
		1	1	−4	−4	0

Comme la dernière case de la troisième ligne contient un 0, cela confirme que 3 est une racine de P.

À partir des coefficients b_i obtenus sur la troisième ligne on peut effectuer la factorisation :
(*) devient $(x - 3)(x^3 + x^2 - 4x - 4) = 0$

On peut ensuite recommencer avec le polynôme : $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ (**)
(**) a encore une racine évidente : −1.
D'où le tableau de Horner suivant :

		1	1	−4	−4 ← coefficients de (**)
racine évidente →	−1		−1	0	4
		1	0	−4	0

On factorise donc (*) comme suit : $(x - 3)(x + 1)(x^2 - 4) = 0$

On peut alors résoudre le polynôme du second degré. La factorisation de (*) donne donc finalement : $(x - 3)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$.

Pour terminer, calculons encore $P(1)$ avec le schéma de Horner :

		1	−2	−7	8	12	← coefficients de (*)
Pas une racine ! →	1		1	−1	−8	0	
		1	−1	−8	0	12	← différent de 0 !

On voit que 1 n'est pas une racine, puisque $P(1) = 12$.

Exercice 4.10 Refaites les divisions des exercices 4.5 à 4.8 en utilisant le schéma de Horner.

4.4. Racines et factorisation

Ce qui suit a déjà été dit, mais insistons sur ce point très important :

Factoriser un polynôme permet de trouver ses racines.
Inversement, trouver les racines d'un polynôme permet de le factoriser.

Il y donc un lien très étroit entre les racines d'un polynôme et sa factorisation.

Exercice 4.11 Soit le polynôme $x^3 - 10x^2 + 9x$.
Factorisez ce polynôme pour trouver ses racines.

Exercice 4.12 Soit le polynôme $2x^2 - 11x + 15$. Ses racines sont $\frac{5}{2}$ et 3.
Factorisez ce polynôme.

4.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Manipuler les monômes	❏ ok
Manipuler les polynômes	❏ ok
Factoriser un polynôme	❏ ok
Diviser deux polynômes	❏ ok
Appliquer le schéma de Horner	❏ ok
Trouver les racines d'un polynôme	❏ ok
Comprendre le lien entre racines et factorisation	❏ ok