5. Résolution d'équations

5.1. Équations du premier degré

Forme générale $ax + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0)$

Solution $x = -\frac{b}{a}$

Exercice 5.1

Résolvez les équations suivantes :

a. $2x + 1 = 0$ **b.** $\frac{5}{3}x - \frac{4}{5} = 0$ **c.** $-4x = 3$ **d.** $3x - 4 = -2x$

e. $4x = 4x$ **f.** $3 = -3x + 1$ **g.** $3x + 2 = 3x - 5$

Exercice 5.2

Résolvez les équations suivantes :

a. $\frac{x-3}{x-5} = 5$ **b.** $\frac{x-3}{x-5} = 1$ **c.** $\frac{x-3}{x-5} = 0$

d. $\frac{x-5}{4} - \frac{x-5}{8} = \frac{1}{8}$ **e.** $\frac{5}{x+1} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2}$ **f.** $\frac{1}{x-4} = \frac{1}{2x+1}$

Exercice 5.3

Résolvez les équations suivantes :

a. $5[3(2x - 1) + 7x] = 10(x + 20.5)$ **b.** $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} - \frac{3x-1}{15} - 1 = 1$

c. $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5(x-1)}{3} = \frac{20-5x}{12}$ **d.** $\frac{x-a}{2} - \frac{x-b}{3} = \frac{a+b}{6}$

5.2. Équations du second degré

Forme générale $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0)$

Solutions La valeur $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** de l'équation.

Si $\Delta > 0$, l'équation a **deux solutions** réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$, $x_1 = x_2$; l'équation a **une solution** réelle (solution double) : $x = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation **n'a pas de solution** réelle.

Δ se prononce « delta ».

Dans le traité *Hisâb al-jabr wa'l-muqqâbala* (Science de la transposition et de la réduction) du mathématicien d'Asie centrale Al'Khwarizmi, les équations du second degré sont classées en six types et résolues.

Mohammed **Al'Khwarizmi**
(788-850)

Factorisation
Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Si $\Delta < 0$, le polynôme n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Factorisons $2x^2 + 12x + 10$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 64$.

Comme, $\Delta > 0$, il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-12+\sqrt{64}}{2 \cdot 2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-12-\sqrt{64}}{2 \cdot 2} = -5$$

Donc, on peut factoriser ainsi : $2x^2 + 12x + 10 = 2(x + 1)(x + 5)$

D'où vient la formule du discriminant ?

La formule pour la résolution des équations du second degré est bien connue, mais d'où vient-elle ?

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=0\\ 4a^2x^2+4abx+4ac&=0\\ (2ax)^2+2(2ax)b+b^2&=b^2-4ac\\ (2ax+b)^2&=b^2-4ac\\ 2ax+b&=\pm\sqrt{b^2-4ac}\\ 2ax&=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\\ x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Exercice 5.4

Résolvez les équations suivantes, soit en factorisant, soit en utilisant le discriminant :

a. $x^2-3x+2=0$ **b.** $4-5x+x^2=0$ **c.** $x^2-4x=-5$

d. $x^2+6x+9=0$ **e.** $2x^2-5x-2=0$ **f.** $-\frac{x^2}{2}+x+6=0$

g. $\sqrt{3}x^2-4x+2\sqrt{3}=0$ **h.** $x(x+\sqrt{5})=2x$

Exercice 5.5

Pour quelle(s) valeur(s) de k l'équation $x^2+kx-k+3=0$ a-t-elle une seule solution ?

5.3. Équations bicarrées

Forme générale $ax^4+bx^2+c=0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$)

Solutions Poser $x^2=y$ et substituer pour obtenir l'équation $ay^2+by+c=0$. Trouver les solutions y_1 et y_2 de cette équation intermédiaire comme indiqué au § 5.2. Les solutions finales sont :

$x_1=\sqrt{y_1}$ et $x_2=-\sqrt{y_1}$ si y_1 existe dans $\mathbb{R}$ et si $y_1 \geq 0$.

$x_3=\sqrt{y_2}$ et $x_4=-\sqrt{y_2}$ si y_2 existe dans $\mathbb{R}$ et si $y_2 \geq 0$.

Si $x^2=y$, alors $x=\pm\sqrt{y}$

(n'oubliez pas le ± !)

Exercice 5.6

Résolvez les équations suivantes :

a. $x^4-5x^2+4=0$ **b.** $x^4-2x^2+1=0$ **c.** $4u^4-4u^2+3=0$

d. $7x^6-48x^3-7=0$

5.4. Résolution d'équations de degré supérieur à 2

Niels Henrik **Abel** (1802-1829)

Si on connaît une ou plusieurs racines d'un polynôme de degré supérieur à 2, on peut le **factoriser** et ainsi obtenir un produit de polynômes de degré inférieur (voir § 4.4). Si le plus grand degré de ces polynômes est 2 ou 1, alors on peut trouver les autres racines.

Les formules de résolution des équations de degré 3 (trouvées par **Tartaglia**, puis généralisées et publiées par **Cardan**) et 4 sont d'un emploi peu fréquent.
Il n'existe aucune formule générale pour la résolution des équations de degré supérieur à 4 (théorème d'**Abel**, 1826).

Exercice 5.7

Résolvez l'équation $x^4-x^3-6x^2=0$.

5.5. Équations irrationnelles

Une équation où l'inconnue figure sous un radical est dite **irrationnelle**. Pour résoudre une telle équation, on est amené à élever les deux membres d'une égalité à la puissance n pour éliminer le radical $\sqrt[n]{}$.

Un exemple résolu

Résolvons l'équation $\sqrt{2+x}+4-\sqrt{10-3x}=0$.

$\sqrt{2+x}+4=\sqrt{10-3x}$	on a isolé un radical
$2+x+8\sqrt{2+x}+16=10-3x$	on a élevé au carré
$8\sqrt{2+x}=-8-4x$	on a isolé le radical restant
$2\sqrt{2+x}=-2-x$	on a simplifié par 4
$4(2+x)=4+4x+x^2$	on a élevé au carré une deuxième fois
$x^2=4$	on a simplifié

On obtient deux solutions : $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$.
Cependant, seule la solution $x_1 = -2$ satisfait l'équation proposée.

$x_2 = 2$ est une **solution fantôme** qui est apparue suite à l'élévation au carré. Il faut donc **toujours vérifier** les résultats obtenus.

Exercice 5.8

Résolvez les équations suivantes :

a. $x-\sqrt{4x-19}=4$ **b.** $2(x+4)+\sqrt{x(x+6)}=16$ **c.** $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}=5$

d. $\sqrt{x+18}+\sqrt{x-8}=\sqrt{x+2}$ **e.** $\sqrt{x^2+1}=7-x$ **f.** $x^2=\sqrt[3]{2x^3+4}$

g. $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\dfrac{12}{\sqrt{5+x}}$ **h.** $\sqrt{x\sqrt{x+x\sqrt{x+x\sqrt{x}}}}=x$

5.6. Où est l'erreur ?

Exercice 5.9

$a = b$
$a^2 = ab$
$a^2 - b^2 = ab - b^2$
$(a + b)(a - b) = b(a - b)$
$(a + b) = b$
$a + a = a$
$2a = a$
$2 = 1$

Exercice 5.10

Soit x le poids d'un éléphant et y le poids d'un moustique.
Appelons la somme des deux poids $2v$. Donc $x + y = 2v$.
De cette équation, nous pouvons tirer :

a) $x - 2v = -y$
b) $x = -y + 2v$

En multipliant a) par x, on obtient :	$x^2 - 2vx = -yx$
En remplaçant x dans la partie droite, grâce à b) :	$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$
Additionnons v^2 des deux côtés de l'équation :	$x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$
On peut factoriser des deux côtés :	$(x - v)^2 = (y - v)^2$
Prenons la racine carrée des deux côtés :	$x - v = y - v$
Après avoir simplifié, il reste :	$x = y$

Le poids d'un éléphant est donc égal au poids d'un moustique !

5.7. Ce qu'il faut absolument savoir

Reconnaître et résoudre des équations du premier degré ❏ ok
Reconnaître et résoudre des équations du second degré ❏ ok
Reconnaître et résoudre des équations bicarrées (ou bicubiques) ❏ ok
Reconnaître et résoudre des équations irrationnelles ❏ ok