6. Inéquations

6.1. Définition

Exemple : $x < 4 + 2x$

Une **inéquation** affirme que deux expressions contenant une variable ne sont pas égales. Une expression peut être plus petite (<), plus petite ou égale (≤), plus grande (>), ou encore plus grande ou égale (≥) à une autre expression.

La droite réelle

Le symbole ∞ utilisé pour les intervalles infinis est une notation et **ne représente pas un nombre réel**.

Vous savez que l'on peut représenter les nombres réels sur une droite allant de moins l'infini (–∞) à plus l'infini (+∞).
Sur la droite réelle, le nombre *a* est à gauche du nombre *b* si *a* est plus petit que *b*. Tous les nombres à gauche de *b* satisfont l'inéquation $x < b$.
La solution d'une inéquation n'est donc pas un nombre, mais un **ensemble** de nombres, aussi appelé **intervalle**.

6.2. Intervalles

Le symbole ∅ (lu « ensemble vide ») représente un intervalle vide.

L'intervalle 1 est un intervalle **ouvert** (les extrémités ne sont pas comprises).
L'intervalle 2 est un intervalle **fermé** (les extrémités sont comprises).
Les intervalles 3 et 4 sont **semi-ouverts**.
Les intervalles 5 à 9 sont des intervalles **infinis**.
L'intervalle 10 est l'union (∪) de deux sous-intervalles. Cela se traduit en français par un « ou ».

	Notations	Inéquations
1	$]a\,;b[$	$a < x < b$
2	$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$
3	$[a\,;b[$	$a \leq x < b$
4	$]a\,;b]$	$a < x \leq b$
5	$]a\,;+\infty[$	$x > a$
6	$[a\,;+\infty[$	$x \geq a$
7	$]-\infty\,;b[$	$x < b$
8	$]-\infty\,;b]$	$x \leq b$
9	$]-\infty\,;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}$)	$-\infty < x < +\infty$
10	$]-\infty\,;a[\,\cup\,[b\,;c[$	$x < a$ ou $b \leq x < c$

Remarquez que –∞ est toujours précédé d'un «] » et +∞ toujours suivi d'un « [». On ne peut pas borner l'infini, sinon il serait fini !

Exercice 6.1

Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont fausses. Quand c'est le cas, donnez un contre-exemple.

a. Si $x > 1$ et $y > 2$, alors $x + y > 3$.
b. Si $x < 5$ et $y < 6$ alors $x{\cdot}y < 30$.
c. Si $x < 0$, alors $x < x^2$
d. Si $x < y < -2$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Exercice 6.2

Écrivez sous forme d'intervalles les inégalités ci-dessous :

a. $-5 \leq x \leq 2$
b. $0 < x < 7$
c. $-6 \leq x < 0$
d. $-2 < x < 4$
e. $x < -2$
f. $1 < x$
g. $x < 0$ ou $4 < x < 10$
h. $x < 3$ ou $x \geq 4$

6.3. Propriétés des inégalités

Propriété d'inversion

Cette propriété est similaire pour $a \leq b$, $a > b$ et $a \geq b$.

Pour tous les réels a et b de même signe (donc $a \cdot b > 0$), on a :

Si $a < b$ et $a \cdot b > 0$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Propriété d'addition

Illustration :
Si $2 < 4$, alors $2 + 8 < 4 + 8$

Pour tous les réels a, b et c, on a :

Si $a < b$, alors $a + c < b + c$

Cette propriété va nous permettre de résoudre l'inégalité suivante :

La propriété d'addition est similaire pour $a \leq b$, $a > b$ et $a \geq b$.

	$-4x - (3 - 5x) > 8$
On enlève les parenthèses	$-4x - 3 + 5x > 8$
On simplifie	$x - 3 > 8$
On additionne 3 des deux côtés	$x - 3 + 3 > 8 + 3$
Et on trouve	$x > 11$

La solution est donc l'ensemble des nombres réels qui sont plus grands que 11.

Propriété de multiplication

Cette propriété est similaire pour $a \leq b$, $a > b$ et $a \geq b$.

Illustrations :
Si $2 < 4$, alors $2 \cdot 8 < 4 \cdot 8$
Si $2 < 4$, alors $2 \cdot (-8) > 4 \cdot (-8)$

Pour tous les réels a, b et c, on a :

Si $a < b$ et c **positif**, alors $a \cdot c < b \cdot c$.
Si $a < b$ et c **négatif**, alors $a \cdot c > b \cdot c$.

Cette propriété va nous permettre de résoudre l'inégalité suivante :

	$5(3 - 2x) \geq 10$
On multiplie tout par $\frac{1}{5}$	$3 - 2x \geq 2$
On soustrait 3 des deux côtés	$-2x \geq -1$
On multiplie tout par $-\frac{1}{2}$	$x \leq \frac{1}{2}$

En fait, on remarque que tout se déroule comme avec une équation… Il faut juste ne pas oublier de changer le sens de l'inéquation quand on multiplie par un nombre négatif.

Exercice 6.3

Résolvez les inéquations suivantes :

a. $5x - 7 > 11x + 9$

b. $5x + 5 < 5x$

c. $2(4x - 1) \leq 3x - 6$

d. $3(x + 1) - x \leq 1 + 2(1 + x)$

e. $\frac{1}{2}x - 5 > \frac{1}{4}x + 3$

f. $-\frac{3}{5}x - 6 < -\frac{2}{5}x + 7$

g. $3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$

h. $|2x + 5| < 4$

6.4. Méthode générale de résolution

Si l'inéquation ne se ramène pas après simplifications à une inéquation du premier degré, on suit la démarche suivante :

1. On regroupe tous les termes dans le membre de gauche pour que celui de droite soit égal à 0.
2. On factorise le membre de gauche sous forme d'un produit ou d'un quotient.
3. On étudie le signe de chacun des facteurs dans un **tableau de signes.**
4. On conclut en observant la dernière ligne du tableau.

Exemple 1 Résoudre l'inéquation $\frac{x-1}{x-2} \geq 0$.

Étape 1.
Trouver les racines de tous les facteurs. Ici, on trouve 1 pour le numérateur et 2 pour le dénominateur. On place ces racines sur la première ligne du tableau, par ordre croissant (comme sur la droite réelle). On laisse des colonnes vides sur les bords et entre les racines pour pouvoir noter les signes. On place enfin les 0 dans les cases adéquates.

Étape 1	$x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$x>2$
signe de $(x-1)$		0			
signe de $(x-2)$				0	
signe de $\frac{x-1}{x-2}$					

Étape 2.
Placer les signes + et – dans les lignes des facteurs.

Étape 2	$x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$x>2$
signe de $(x-1)$	–	0	+	+	+
signe de $(x-2)$	–	–	–	0	+
signe de $\frac{x-1}{x-2}$					

Étape 3.
Remplir la dernière ligne, en regardant les signes des colonnes au-dessus de chaque case. La division par 0 est interdite. Il peut donc y avoir des cases vides.

Étape 3	$x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$x>2$
signe de $(x-1)$	–	0	+	+	+
signe de $(x-2)$	–	–	–	0	+
signe de $\frac{x-1}{x-2}$	+	0	–		+

Étape 4.
Lire la solution sur la dernière ligne du tableau. Ici, on veut que $\frac{x-1}{x-2} \geq 0$.

L'inéquation a pour solution tous les réels x tels que $x \leq 1$ ou $x > 2$.

Exemple 2 Résoudre l'inéquation $-x^3 + 4x^2 + x - 4 \leq 0$.

On peut factoriser par groupement :

$(-x^3 + 4x^2) + (x - 4) = -x^2(x - 4) + (x - 4) = (x - 4)(1 - x^2) = (x - 4)(1 + x)(1 - x)$

Le polynôme $-x^3 + 4x^2 + x - 4$ a donc trois racines : –1, 1 et 4.

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$x>4$
signe de $(1 + x)$	–	0	+	+	+	+	+
signe de $(1 - x)$	+	+	+	0	–	–	–
signe de $(x - 4)$	–	–	–	–	–	0	+
signe de $(x - 4)(1 + x)(1 - x)$	+	0	–	0	+	0	–

On lit sur la dernière ligne du tableau que l'inéquation proposée a pour solution tous les réels x tels que $-1 \leq x \leq 1$ ou $x \geq 4$.

Exercice 6.4

Résolvez les inéquations suivantes :

a. $x^2 - 5x + 9 > x(x - 1) + 12$ **b.** $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

c. $x^2 - 3x - 28 > 0$ **d.** $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$

e. $4x^3 - 10x^2 + 48x < 0$ **f.** $x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \geqslant 0$

On ne peut multiplier (ou diviser) les deux côtés d'une inégalité que par des valeurs connues (des constantes).
En effet, rappelons que le sens de l'inéquation change si on la multiplie par un nombre négatif. Mais si on multiplie par une valeur inconnue, on ne sait pas si c'est un nombre positif ou négatif ! D'où le problème...

Exercice 6.5

Résolvez les inéquations suivantes :

a. $\frac{x-3}{x^2-3x+2} \geqslant 0$ **b.** $\frac{x+1}{x-1} > \frac{x-1}{x+1}$

c. $\frac{1}{x} \geqslant x$ **d.** $\frac{13}{2-x} \leqslant 7 - \frac{4}{3x+1}$

Exercice 6.6

L'*indice de masse corporelle* (ou *IMC*) donne une évaluation de la corpulence pour les adultes de 20 à 65 ans. Il se calcule simplement en divisant le poids (en kilos) par la taille (en mètres) au carré. Selon l'Organisation Mondiale de la Santé, la corpulence est dite « normale » si l'*IMC* est compris entre 18.5 et 25.
Si une personne mesure 175 cm, dans quelle fourchette de poids doit-elle se situer pour avoir une corpulence « normale » ?

Exercice 6.7

Pour qu'un médicament soit efficace, il faut que sa concentration dans le sang dépasse une certaine valeur, appelée *niveau thérapeutique minimal* (*NTM*).

Admettons que la concentration c (en mg/l) d'un certain médicament t heures après qu'on l'a pris oralement est donnée par

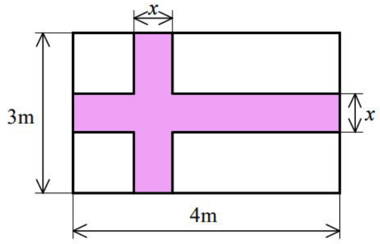
$$c = \frac{20t}{t^2+4}$$

Si le *NTM* est 4 mg/l, déterminez dans quel intervalle de temps la concentration c sera au-dessus de ce niveau.

Exercice 6.8

Quelle largeur x doit-on donner à la croix pour que son aire soit inférieure ou égale à l'aire restante du drapeau ?

Cette largeur doit être au moins égale à 50 cm.



Exercice 6.9

Pour quelles valeurs de λ les équations du second degré ci-dessous ont-elle deux solutions réelles ?

a. $4x^2 + 3x + \lambda = 0$ **b.** $3x^2 + \lambda x + \lambda = 0$

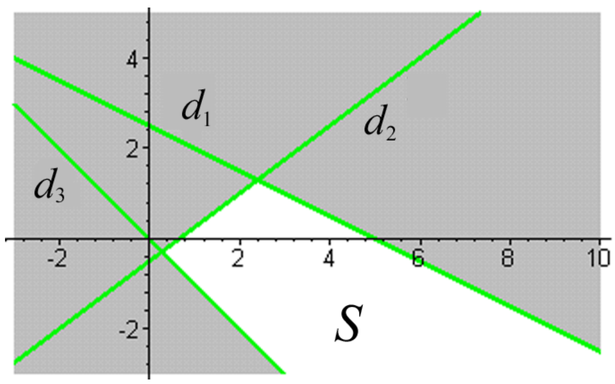
6.5. Domaines du plan

Si d est la droite d'équation $ax + by + c = 0$, alors l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant $ax + by + c \geq 0$ est un **demi-plan** P_1 de frontière d. Sur l'autre demi-plan P_2 de frontière d, on a $ax + by + c \leq 0$.

Exemple Le système $\begin{cases} 2x + 4y \leq 10 \\ 3x - 4y \geq 2 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$ se représente graphiquement en utilisant les trois droites d_1, d_2 et d_3 d'équations :

$$d_1 : 2x + 4y = 10$$
$$d_2 : 3x - 4y = 2$$
$$d_3 : x + y = 0$$

L'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant $2x + 4y \leq 10$ est donc un des demi-plans de frontières d_1. Cette droite passe, par exemple, par les points A de coordonnées (5 ; 0) et B de coordonnées (1 ; 2).
On trace cette droite, puis on prend un point test, c'est-à-dire, un point n'appartenant pas à d_1 qui permettra de savoir dans quel demi-plan on a $2x + 4y \leq 10$. Prenons, par exemple, le point O (0 ; 0). Les coordonnées de O vérifient bien $2x + 4y \leq 10$. Donc ce point appartient à l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $2x + 4y \leq 10$.
L'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient $2x + 4y \leq 10$ est donc le demi-plan de frontière d_1 et contenant le point O. Par commodité, on hachure l'autre demi-plan (celui qui n'est pas solution). Il ne reste plus qu'à tracer la droite d_1 et à hachurer le demi-plan non-solution.
On fait de même pour $3x - 4y \geq 2$, en traçant la droite d_2. Pour $x + y \geq 0$, on trace d_3 mais on ne peut pas prendre le point O comme point test car ce point est situé sur la droite d_3. On choisit alors un autre point, par exemple C de coordonnées (1 ; 1).
Après avoir hachuré les trois demi-plans de frontières d_1, d_2 et d_3 qui ne vérifient pas les inéquations correspondant aux droites, la partie non-hachurée (S) est alors la solution.



Exercice 6.10 Dessinez les domaines correspondant aux contraintes suivantes :

a. $$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 9 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} -x + 2y \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$$

6.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Maîtriser les notations des intervalles	❏ ok
Connaître les propriétés des inégalités	❏ ok
Résoudre des inéquations	❏ ok
Dessiner un domaine du plan défini par un ensemble d'inégalités	❏ ok