MÉTHODES

CHERCHER ...

Pour la rentrée, Tangente propose aux plus jeunes de ses lecteurs un dossier spécial méthodes. Premier volet :* CHERCHER ... *S'il n'y a aucune recette miracle en la matière, quelques conseils ne peuvent pas faire de mal pour développer de bonnes habitudes.

Faire des mathématiques, c'est chercher, vous diront les amateurs, la mine gourmande ... Mais quelle angoisse, aussi, quand, bloqué devant votre feuille blanche vous ne savez pas par quel bout prendre un problème !
Une horrible vérité, pour vous achever : il n'y a pas de recette absolue, ça se saurait ... Tel qui trouve aujourd'hui demain séchera, il faut accepter cette dure fatalité : chercher en maths est une activité de création, et, comme dirait l'Autre, la création, ça ne s'invente pas.

■ *Sécher sans complexes*

Apprenez donc d'abord à sécher sans vous dévaloriser : je cherche, donc je sèche ! Si ça peut vous consoler, les plus grands mathématiciens sont tous passés par-là un jour ou l'autre.

Et si certains "trouvent" plus souvent en maths que vous, avant de penser "que vous êtes décidément une tache", dites-vous bien que leur aisance apparente suppose d'abord un bon entraînement.
Les "dons" personnels ou le "style" peuvent apporter un "plus", mais ils ne se développent pas en terrain vierge. Vous le savez déjà pour le sport, la musique ou les échecs : le "génie" du mathématicien ne fait pas plus exception à la règle que le tour de main "magique" de l'artisan.

Si vous estimez quand même (peut-être à tort) que, décidément, vous êtes perdu pour la carrière de mathématicien, n'oubliez pas qu'en musique, en sport ... ou en mécanique auto, on peut pratiquer passablement et y prendre grand plaisir sans être pour autant le virtuose du siècle. Encore une fois, les maths ne font pas exception : donnez-vous au moins cet objectif, au lieu de baisser les bras !

■ *Chercher : un état d'esprit*

Apprendre à chercher, c'est donc d'abord se confronter régulièrement à la recherche, si possible au-delà du minimum exigé par le prof de maths.
Faites les problèmes de championnats, de rallyes, lisez régulièrement Tangente le crayon en main, vous verrez, vous y prendrez bientôt goût, et les idées vous viendront plus facilement avec une solide "culture" (le gros mot est

lâché : eh oui, la culture mathématique, ça existe ...).
Soyez toujours en train de chercher, en classe, à la maison, à vélo, au supermarché. Un bon conseil :

"Quand il n'y a rien à chercher, c'est simplement qu'il faut d'abord chercher l'énoncé !"
(Tonton Lulu, vol 36, à paraître)

■ Soyez actif !

"Quand on cherche, c'est qu'on ne sait pas encore" ... Voici encore une belle maxime pas chère.
N'attendez pas passivement que la solution se présente toute cuite : Cette solution, il va falloir que vous l'aidiez à naître, en préparant soigneusement le terrain.

Comme dans les autres matières, Commencez par cerner le sujet. Lisez bien l'énoncé, élaguez ce qui est inutile, résumez les hypothèses significatives par écrit (à ce stade, "ABC est un triangle" *n'est pas* une hypothèse significative, trois points forment en général un triangle ; plus tard, pour la rédaction, il deviendra peut-être important de souligner que A, B, C ne sont pas alignés).

Si le texte est compliqué, n'hésitez pas à l'analyser presque mot à mot, mais cherchez ensuite à comprendre la question dans sa globalité ; traduisez au besoin par une figure, un schéma, un tableau : le problème doit devenir assez familier pour le voir complètement "dans votre tête".
En géométrie, faites une première figure, en évitant soigneusement les cas particuliers : sauf indications contraires, vos triangles doivent être vraiment très quelconques, et vos angles pas trop droits. distinguez bien les points fixes des points variables, n'hésitez pas à utiliser la couleur.
En algèbre, prenez la mesure du problème : quelles sont les quantités fixes, celles qui "bougent" ? Y a-t-il plus d'équations que d'inconnues, ou le contraire ? Y a-t-il un ordre de grandeur vraisemblable ? Empoignez votre programmable pour examiner le comportement apparent des suites ou des fonctions.

Observez les symétries de l'énoncé (plusieurs éléments jouent le même rôle) : il sera en principe astucieux de les garder en évitant de privilégier l'un de ces éléments.

Après cette lecture/traduction, vous pouvez peut-être déjà amorcer une piste ? Sinon, creusez-vous un peu : n'avez- vous pas déjà résolu un problème du même type ? N'y a-t-il pas un théorème dont les hypothèses ressemblent à votre situation ?

Vous ne "voyez" toujours pas ? Faites bouger les paramètres ou les données de la figure, le problème vous apparaîtra peut-être mieux. Habituez-vous à utiliser les logiciels de calcul, de graphiques ou de dessin géométrique pour faire des essais nombreux et rapides.
Imaginez ce qui se passe quand les éléments variables prennent des positions limites (quand le triangle devient aplati, quand je choisis mon point carrément sur le cercle, quand le réel m devient très grand, très petit ? ...), ou dans des cas particuliers (quand le parallélogramme devient un losange, un rectangle, quand a vaut 0 ?).

Peut être pouvez-vous introduire des éléments nouveaux (inconnues auxiliaires, droites pas encore tracées ...) qui vous ramèneront à une situation connue ?
En cas de désespoir prolongé, il vous reste les armes lourdes : calcul pur et dur en algèbre ou coordonnées en géométrie. Mais ne les sortez qu'en dernière extrémité.

Quand vous tenez enfin l'idée, hop, saisissez-la au passage, notez si besoin une abréviation, un bout de calcul, un dessin, un mot, quelque chose de très rapide pour ne pas la laisser s'évanouir. Ne tentez surtout pas de rédiger complètement tout de suite, laissez votre idée se développer jusqu'au bout. C'est si beau, une idée qui prend son vol !

Francis Dupuis

ET SI VOUS PRENIEZ DU RECUL ?

Parfois, l'énoncé vous dit ce que vous devez trouver : *"montrez que X, Y, Z sont alignés"*, par exemple, ou vous le devinez très vite : *"Bon sang, mais c'est bien sûr, y doit être égal à x^2"*. Partir du résultat mettra peut-être à votre portée un objectif qui vous inspirera davantage.

Plus généralement, prenez du recul, ne restez pas, tel un randonneur myope, le nez sur votre dernière ligne ! Vous trouverez plus facilement des idées, des enchaînements, vous choisirez plus facilement entre plusieurs pistes, et vous contrôlerez mieux, enfin, si vous restez dans la bonne direction. Posez-vous en permanence des questions sur votre démarche :

Qu'est-ce que je cherche ?
Est-ce qu'il n'y a pas, dans les résultats précédents, quelque chose d'utile ?
Mon résultat est-il vraisemblable ?
Mes calculs ne sont-ils pas déjà un peu longs ? ...

EN CLASSE, DES MÉTHODES PEU AVOUABLES ...

Le devoir en classe est au vrai problème de recherche ce que la piscine est à la plage. Pas passionnant, mais plus simple. Soyez rusé, utilisez le contexte : qu'est-ce qu'on étudie en ce moment ? Qu'est-ce qu'on a déjà vu comme méthode là-dessus ?

Ou encore, pour les problèmes d'examens à questions progressives, ne laissez pas passer les liens entre questions : à la lecture du mot magique "en déduire" votre regard doit balayer avidement les résultats qui précèdent, pour chercher à les organiser.

RAISONNER

La logique, c'est très simple : les choses sont vraies, ou fausses, selon les cas. Ensuite, on enchaîne tout ça, et on obtient un raisonnement tout neuf. Mais dans la pratique, des pièges vous guettent : sachez les éviter.

RAISONNER, C'EST la nature même des mathématiques !

Commençons par un peu de logique :

Toute *proposition* est *soit vraie, soit fausse* ; des règles précises de déduction permettent de construire une suite de propositions vraies :

- **L'implication** est une déduction "à sens unique".
  Ex : **Si** $x = y$ (est vraie)
  Alors $x^2 = y^2$ (est vraie).
  (l'implication *réciproque* – "en sens inverse" – n'est pas vraie : si $x^2 = y^2$, x et y peuvent aussi être opposés).
- **L'équivalence logique** est une déduction "à double sens".
  Ex : $x = y$, **équivaut à** $2x = 2y$.
  (les deux propositions sont soit vraies, soit fausses en même temps).

Faire une démonstration, c'est, en partant des *données* de votre problème (parfois appelées *hypothèses*), construire un enchaînement d'implications ou d'équivalences jusqu'à la conclusion que vous vous proposez de montrer, qui sera donc vraie.

Le raisonnement ne tiendra donc que si tous ses maillons sont corrects. D'où l'importance, à chaque étape, de bien vérifier si ce que vous écrivez est déjà établi ou s'il s'agit d'une *conjecture*, d'une simple supposition ; soyez extrêmement clair sur ce point dans votre rédaction ... Et dans votre tête.

Les risques sont très grands en géométrie lorsque vous observez la figure : sur une figure correcte, tout apparaît évidemment aussi vrai, ce qui est déjà montré comme ce qui ne l'est pas encore !

Réservez aussi autant que possible le mot de *"conclusion"* pour la fin de votre démonstration. Au début du problème, employezc plutôt le mot *"conjecture"*, cela clarifie un peu le stade ou vous en êtes.

■ *La chaîne du "Vrai"*

Chaque maillon doit être justifié. Nuançons aussitôt : sauf si votre déduction repose sur un argument tellement simple que tout le monde l'acceptera sans discuter (ce qui introduit évidemment une marge d'appréciation).

Une figure, quelques exemples, un calcul approché ne sont *jamais* des justifications : leur rôle est précieux pour trouver une bonne conjecture, pas au-delà. Il faut éta-

blir une preuve générale, valable dans *tous* les cas.
Stationner 50 fois au même endroit sans avoir de PV ne signifie pas que le stationnement est autorisé. Par contre, la conformité aux règles du stationnement est inattaquable.

Il est plus facile de montrer que quelque chose est faux : un seul contre-exemple suffit. Si vous voyez un chat blanc, vous pouvez affirmer que tous les chats ne sont pas gris !
Vous pouvez aussi, dans ce cas, raisonner *"par l'absurde"* : si, partant d'une proposition, des déductions correctes vous amènent à un résultat faux, c'est que votre proposition de départ est certainement fausse.

Attention quand vous cherchez "à l'envers", en partant du résultat : vous espérez, sans même y penser, que vous pourrez refaire le chemin en sens inverse. Au moment de rédiger, il faut contrôler que vous pouvez effectivement réécrire toutes les étapes dans le bon sens.
Un seul maillon non réversible, et votre raisonnement tombe à l'eau ! Heureusement, il y a le plus souvent équivalence ; méfiez-vous d'autant plus des exceptions (élévations au carré en algèbre, projections en géométrie ...) !

Les équations vous exposent aux mêmes déboires : dès que vous n'êtes plus tout à fait sûr d'avoir suivi une chaîne d'équivalences (systèmes, notamment), il faut contrôler si les "solutions" n'ont pas été introduites par des transformations douteuses. Le test est facile : ces valeurs vérifient-elles encore l'équation de départ ? Utilisez en tous cas une rédaction très rigoureuse (voir encadré)

S'il s'agit de démontrer une égalité A = B, partez de A = ... et transformez peu à peu pour arriver à B. (ou l'inverse).
Ceci vous évite de partir, comme on le voit souvent, de A = B pour parvenir à 0 = 0, Mais **il faudrait** alors ajouter (et en être sûr) : *"puisque nous avons procédé par équivalences, et que 0 = 0 est vraie, alors A = B est vraie"*. Correct, mais franchement lourdingue !

Une subtilité, pour terminer.
La *réciproque* d'une implication n'est pas toujours vraie :

Si un animal est un éléphant, **alors** il a une trompe. *(1)*. Vrai.

Réciproquement,
Si un animal a une trompe,
Alors c'est un éléphant. *(2)*
Faux. (Ça peut être un papillon).

Par contre, à partir de *(1)*, vous disposez aussitôt du résultat suivant :
Si un animal n'a pas de trompe,
Alors ce n'est pas un éléphant.
On dit que c'est la forme contraposée de l'implication *(1)*. Elle est équivalente à l'implication *(1)*.

La réciproque a également une forme contraposée :
Si un animal n'est pas un éléphant,
Alors, il n'a pas de trompe.
(Equivalente à la forme *(2)* de la réciproque, donc aussi fausse. Voir encore le papillon).

Alors, si vous dites qu'un triangle de côtés 10, 50 et 49 n'est pas rectangle, utilisez-vous le théorème de Pythagore, ou sa réciproque ? Avouez qu'il y a de quoi se tromper !

Francis Dupuis

ET VOILÀ COMMENT ON DÉMONTRE QUE 3 = 0 !

Résoudre dans R l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$ ***(1).***

0 n'est pas solution ;
On peut donc diviser les deux membres par x :

$$x + 1 + 1/x = 0,$$

d'où $1/x = -(x + 1).$
Or, d'après (1), $-(x + 1) = x^2,$
d'où $1/x = x^2,$
et finalement, $x^3 = 1.$

La solution est donc x = 1, et on en déduit $1^2 + 1 + 1 = 0$ ***!***

Où est l'erreur ?

SOLUTION

(sur des idées de M. Brunet et R. Raynaud)

Qu'est-ce que l'énoncé :

"$x + 1 + 1/x = 0$",

jeté sans présentation ? Ce n'est pas une égalité, puisqu'on n'a pas posé l'hypothèse que x est une solution de l'équation.
C'est donc une équation. Quel est alors son rapport avec la première ? Lui est-elle équivalente ? Oui. Première imprécision, ce n'est pas dit.

Plus grave : le premier "d'où ...", le "Or, d'après (1)...", le "d'où ...", et le "finalement ..." qui suivent nous font dévier de la tonalité "équation" à la tonalité "égalité".
De sorte que la conclusion "$x = 1$" est déduite de l'hypothèse que $x^2 + x + 1$ est égal à 1.
Mais comme cette hypothèse n'a pas été formulée, on ne songe pas à la contester, et le mauvais tour est joué !

Reprenons sans tricher :

•Supposons qu'il y a des solutions, et soit x l'une d'entre elles.

Alors, $x^2 + x + 1 = 0.$ *(1)*
0 n'est pas solution, d'où $x \neq 0$.
Donc, $x + 1 + 1/x = 0,$
d'où $1/x = -(x + 1).$
Or, d'après *(1)*,
$-(x + 1) = x^2,$
d'où $1/x = x^2,$
et finalement, $x^3 = 1.$

Par conséquent, <u>*si x est une solution*</u>, <u>alors $x = 1$</u>.

• Si $x = 1$, alors $x^2 + x + 1 = 3.$
<u>1 n'est donc pas une solution.</u>

Conclusion, l'équation n'a pas de solution.
[Les écritures en bleu ont, cette fois, clairement le statut d'égalités, non plus d'équations].

TANGENTE, le magazine de l'aventure mathématique - 5, rue Jean Grandel 95100 ARGENTEUIL - ☎ (1) 39 98 83 50

MÉTHODES

RÉDIGER

Vous avez des connaissances, vous avez quelques idées, bref, vous ne vous sentez pas trop malheureux en maths, mais chaque devoir écrit est une corvée pour vous ... et pour votre prof ! Tangente vous livre les secrets de la rédaction.

Quand vous rédigez un document scientifique, ce que vous écrivez doit être particulièrement précis, compréhensible par n'importe qui sans avoir à jouer aux devinettes.
Aujourd'hui, c'est le professeur qui lit votre copie, demain, c'est d'après vos rapports que vos collègues ou vos "chefs" se prononceront sur vos projets.

■ *La logique au bout du stylo*

Première croyance à dissiper, rédiger, ce n'est pas "en écrire des kilomètres" : trop, c'est trop, vous seriez vous-même noyé sous le déluge de vos phrases.
Non, rédiger en maths, c'est avant tout bien mettre en évidence les grandes lignes et les articulations de votre raisonnement.
Enoncez clairement vos hypothèses, en les séparant bien, dites clairement ce qu'il faut montrer, et chaînez vos expressions mathématiques par des liens logiques brefs : *donc*, (ou *par suite*, ou *on en déduit*) *or*, *mais*, *car* ...
Préférez des phrases courtes juxtaposées, une par élément de raisonnement ou d'explication, plutôt qu'une grosse phrase mélangeant tout dans des subordonnées emboîtées maladroitement. N'hésitez pas à laisser des blancs, à souligner ou à encadrer pour faire ressortir les étapes, les résultats intermédiaires.

La phase de rédaction est le moment idéal pour vérifier que vos raisonnements se lisent "dans le bon sens", surtout si vous avez cherché en partant du résultat.

Avant d'appliquer un théorème, rappelez bien que les conditions d'utilisation sont remplies :
*"Dans le triangle ABC, **rectangle en C,** le théorème de Pythagore nous donne ..."*
Pour citer le théorème, utilisez son nom, comme ci-dessus, ou une phrase complète et précise si ce n'est pas un grand classique :
"On sait que si l'on fait suivre dans cet ordre deux symétries centrales S_O et $S_{O'}$, on obtient la translation $T_{2\overrightarrow{OO'}}$."
Dans l'exemple ci-dessus, il ne suffit pas de dire *"la composée de deux symétries centrales est une translation"* : il faut préciser l'ordre des deux symétries. Par contre, si, dans votre problème, les centres des symétries s'appellent A et B, utilisez tout de suite ces lettres à la place de O et O'.

Enfin, n'oubliez pas de conclure en bonne et dûe forme, ne restez pas sur un vague calcul.

Quelques "ficelles" :

• n'hésitez pas à *nommer* les éléments dont vous voulez parler : *"soit H le pied de la hauteur..."*

• Numérotez les équations ou résultats partiels que vous allez réutiliser : *"d'après l'équation (3), on a ..."* ou *"de (1) et (4), on tire..."*

• Attention au sens de certains mots : en mathématiques, le mot *"un"* veut dire *"au moins un"*. Il faut, le cas échéant, préciser "u*n et un seul"* ou *"un unique"*.

LES PHRASES QUI TUENT

Sachez éviter les phrases qui font bondir le correcteur à 50 centimètres au-dessus de son fauteuil, avec des retombées pas totalement prévisibles, mais toujours particulièrement dangereuses :

"On voit sur la figure que ..." : une figure n'est pas une preuve. C'est l'erreur classique du débutant, la Bérésina du collégien, le Waterloo du lycéen.
"On voit que ...", "Il est évident que ..." : variantes du précédent, utilisées également en algèbre. Le seul ennui, c'est que votre prof a une très mauvaise vue : ce qui suit doit être vraiment évident, du type 3 + 1 = 4, sinon, il jurera que lui, il n'a rien vu, avec une mauvaise foi éhontée. Surtout pas de bluff avec ce type d'arguments, ou c'est l'estocade au stylo rouge garantie !
ANTIDOTE : proscrire ces expressions, sauf si vous annoncez clairement. qu'il s'agit d'une constatation, que vous vous proposez ensuite de prouver.

"On sait qu'un trapèze est toujours inscrit dans un cercle quand le milieu de ses côtés ..." : ici aussi, le professeur flairera l'arnaque. En bon professionnel, il connaît en principe le signalement de la plupart des théorèmes courants. Inventer un théorème-maison qui répond justement à la question est très risqué.
ANTIDOTE : avouez clairement votre ignorance quand il manque un maillon.

"D'où x = 1/7 = 0,14." : la confusion entre valeur exacte et approchée est toujours très mal vue, la récidive pardonne rarement.
ANTIDOTE : Utilisez le signe ≈, qui montre bien la nuance, ou laissez tomber la valeur approchée. Rien ne vous oblige à la donner quand elle n'est pas demandée. Gardez-la pour vérifier votre ordre de grandeur. Et surtout, utilisez la valeur exacte pour poursuivre votre calcul, sinon, c'est carrément faux ...

"Je mets la pointe du compas sur M, je trace ..." : on vous a demandé d'expliquer votre construction, pas de raconter votre vie ! Pas dramatique, mais très agaçant. Et très long pour vous. La mort survient en une à quatre heures par étouffement rédactionnel du raisonnement, compliqué d'un dépassement du temps réglementaire ...
ANTIDOTE : expliquez tout, mais de manière concise !

■ *Pas de négligence !*

Il existe quelques règles qui ne nécessitent aucune habileté particulière, et qui améliorent la qualité de votre travail. Les ignorer vous ferait passer pour négligent ou superficiel. Vous ne laisseriez pas croire une chose pareille !

• N'utilisez jamais d'abréviations,

• Distinguez bien phrases en Français et expressions mathématiques. Écrivez *(d) // (d')*, ou *"les droites (d) et (d') sont parallèles"*, mais pas *"(d) et (d') sont //"*,

• Si la réponse s'exprime dans certaines unités, n'oubliez pas de les mentionner (et de vérifier au passage la vraisemblance,

• Alignez vos traits de fraction avec les signes d'opération,

• Prolongez bien vos radicaux (vos signes $\sqrt{\quad}$) jusqu'au bout de la quantité qu'ils doivent couvrir, vers la droite et vers le bas,

• Simplifiez des écritures comme $1x$, $3y/3$, $2z/1$, , $3t^1$, $\sqrt{9}$, écrivez : x, y, $2z$, $3t$, 3 ...

• Arrondissez correctement les valeurs approchées, vers le haut si le premier chiffre supprimé est 5, 6, 7, 8, 9, vers le bas s'il est égal à 0, 1, 2, 3 ou 4. Écrivez-les avec une précision raisonnable : pour 7.295867814 sur votre calculatrice, gardez 7,296, ou 7,30 (ce n'est pas pareil que 7,3).

Francis Dupuis

MÉTHODES

DÉTECTER SES ERREURS

Tout le monde a peur de se tromper. A tel point que l'on cherche plus souvent à se persuader qu'on a raison plutôt que d'essayer de voir où l'on a pu faire des fautes. Aujourd'hui, prenons les devants et combattons l'erreur de front ...

BON. LE RÉDACTEUR en chef de Tangente veut cet article pour dans deux semaines, alors je décide de m'y mettre. Un stylo dans la main, mon courage de l'autre, et c'est parti. Je commence à écrire. Hum... Drôlement mal tournée, cette phrase. Allez, on barre. Reprenons...
Eh oui ! Je sais bien que vous, lecteur, avez sous les yeux deux pages parfaites, sans rature, sans faute (ou si peu). Mais, croyez-moi, le brouillon ne leur ressemble pas beaucoup ... Il y a plus de ratures que de texte, et de loin.

Ma seule consolation quand, je relis mes brouillons, c'est que je ne suis pas le seul dans ce cas : tout le monde se trompe.
Et pas qu'un peu. De Pasteur, farouchement opposé à la construction des égouts de Paris en invoquant l'hygiène, à Einstein qui soutint mordicus que l'Univers était statique, en désaccord avec ses propres équations et avec ce qui allait donner la théorie du Big Bang, l'histoire des sciences fourmille d'exemples de scientifiques qui se sont royalement plantés. La palme du début du siècle revient peut-être à Percival Lowell, précurseur de la découverte de Pluton, qui défendit durant plus de vingt ans, jusqu'à sa mort, qu'il y a des canaux sur Mars (construits par des Martiens, bien sûr...).

Donc, pas de honte à commettre des erreurs ! Mieux : en mathématiques, l'erreur constitue une arme précieuse pour progresser.

■ *Errare humanum est*

Imaginez-vous aux prises avec un problème quelconque, mathématique ou pas. Une première étape vers la solution peut être une petite étude qualitative préliminaire : on ne connaît pas la réponse au problème, mais on peut quand même dire des choses dessus. Par exemple, si vous voulez calculer la moyenne des notes de votre petite sœur et que celles-ci sont comprises entre 14/20 et 8/20 (petite faiblesse de fin de trimestre), alors le résultat sera forcément entre ces valeurs extrêmes. N'oublions pas cette phrase citée par Jean-Marc Lévy-Leblond : «ne jamais faire un calcul avant d'en connaître le résultat.» Autrement dit, avant de foncer, faisons fonctionner notre cerveau.

Bon : cette fois, ça y est, on a trouvé la réponse au problème posé.

Super. Étape suivante à ne pas négliger dans la joie du succès : nous assurer que notre solution est la bonne. Comment faire ?

Malheureusement, il est rare de disposer d'une méthode permettant de s'assurer à cent pour cent que la réponse proposée est juste. Mais, bien souvent, on dispose de beaucoup de critères pour se rendre compte que l'on s'est trompé. En d'autres termes : le chemin vers la résolution d'un problème est semé d'embûches. On ne peut pas garantir que la voie choisie arrive à bon port, mais on a quand même les moyens de se rendre compte si on est tombé dans ce chausse-trappe-ci ou dans ce traquenard-là.

Décevant, de ne pouvoir confirmer qu'on a cheminé entièrement convenablement ? Non, inévitable. En fait, une telle vérification équivaudrait pratiquement à la résolution complète de notre problème. Pas vraiment raisonnable, donc, à moins qu'il ne s'agisse en fait d'une autre méthode de résolution, auquel cas l'identité entre les solutions trouvées est un atout en béton !
A la fin du siècle dernier, le fait que plusieurs expériences *indépendantes* aient toutes donné une même évaluation de ce que l'on appelle aujourd'hui le nombre d'Avogadro ($6{,}023.10^{23}$ mol^{-1}) a ainsi été l'une des victoires décisives pour la théorie atomique.

■ *Le truc des unités*

Revenons à nos moutons : nous tenons une solution, comment savoir si elle est bonne ? Voici quelques moyens généraux et efficaces pour y parvenir.

D'abord, les unités. En Mathématiques, comme en Physique ou en Chimie, la réponse à un problème est rarement «15,23» tout court, mais bien plutôt «15,23 unités.»
Typiquement, si on vous demande de calculer la consommation sur autoroute de la dernière 807 Pigeot, ne faites PAS intervenir la masse des pneus, ou alors «com-

pensez» par autre chose : une autre masse, ou quelque chose qui s'exprime dans une unité qui contient une masse (une pression, par exemple).

N'oubliez pas qu'*on n'a* JAMAIS *le droit d'ajouter ou de retrancher des unités diférentes.*

Et attention : deux quantités, même exprimées dans la même unité, ne peuvent pas toujours être additionnées. Un litre d'eau à 40° plus un autre litre d'eau à 40°, ça fait bien 2 litres, mais pas à 80° (ou alors, mon chauffe-eau va m'entendre).

Par contre, on peut en général multiplier (ou diviser) : mais en multipliantl'unité Truc par l'unité Muche, on obtient des Truc.Muche, et pas autre chose.

Soyons concrets : la 807 Pigeot consomme 0,1 litre au kilomètre à 90 km/h. Elle consomme 0,012 litres de plus chaque fois que lla vitesse augmente de 10 km/h.
Question : combien la 807 consomme-t-elle à 130 km/h ?
Toto propose le calcul suivant :

$$0{,}1 + 0{,}012.(130 - 90) = 0{,}1 + 0{,}48 = 0{,}58,$$

Toto suggère donc 0,58 litres au kilomètre.
C'est faux. Et heureusement pour la firme Pigeot, d'ailleurs, parce que des voitures à 58 litres aux cent, elle n'en vendrait pas beaucoup.
Pour voir où s'est trompé Toto, écrivons son calcul uniquement en termes d'unités :

l/km + l/km.(km/h – km/h)
= l/km + l/km.km/h
= l/km + l/h.

Aïe ! Toto n'a pas le droit d'ajouter 0,1 à 0,48 dans son calcul ! Comment corriger le tir ?

Le raisonnement est le suivant : puisque l'énoncé demande une réponse qui s'exprime en l/km, c'est le deuxième terme de la réponse de Toto qu'il faut modifier. Par quel tour de magie transforme-t-on des l/h en des l/km ? En les multipliant par des h/km, tout bêtement. Autrement dit, en les divisant par des km/h !

On peut donc soupçonner que Toto a simplement oublié de diviser le second membre par une vitesse. Il s'agit, bien sûr, des 10 km/h de l'énoncé.

Refaisons le calcul en tenant compte de cette correction :

$$0{,}1 + (1/10).0{,}012.(130 - 90) = 0{,}1 + 0{,}012.40 = 0{,}148.$$

Nouvelle réponse proposée : 0,148 l/km. Notons au passage que c'est déjà plus raisonnable.

Vérifions les unités :
l/km+1/(km/h).l/km.(km/h + km/h)
= l/km + h/km.l/km.km/h
= l/km+l/km = l./km.
C'est bon (au moins pour les unités).

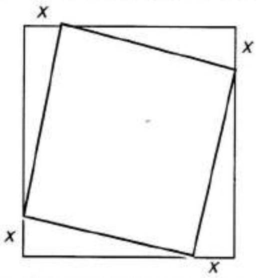
Finissons-en avec les unités en énonçant deux règles qui permettent de bien appliquer la recette précédente :

– Exprimez de préférence calculs sous forme littérale, et ne passez au calcul numérique que tout à la fin. Comme ça, il est plus facile de savoir dans quelle unité s'exprime tel ou tel terme.

– Choisissez une fois pour toutes vos unités de masse, de longueur... Ne mélangez pas les Angström (1Å = 10^{-10} m) avec les mégaparsecs (un mégaparsec = $3{,}08.10^{19}$ km) ou les centimètres.

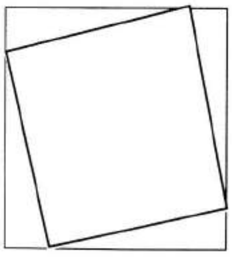
■ *Symétries*

Une autre recette très efficace pour repérer un bug (ou bogue, c'est selon) : les symétries.
Si on vous demande par exemple de déterminer les plus petits carrés inscrits dans un carré C donné et que vous répondez ceci :

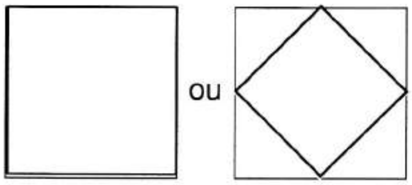


où x a été trouvé par une savante méthode, dites-vous qu'il n'est pas encore temps de vous écrier «M'sieu ! J'ai trouvé !»

Voilà le malaise : l'énoncé présente un caractère symétrique (la symétrie du carré), donc la solution doit l'avoir aussi (rappelez-vous du principe de Curie, Tangente n°36). En conséquence, si le dessin ci-dessus est une réponse au problème, alors le dessin symétrique en est automatiquement une autre :



Si vous avez des raisons de penser que le problème posé n'a qu'une solution, alors le premier dessin n'est pas une réponse incomplète, mais une réponse fausse. Plus fort : si vous savez à l'avance que le problème n'a qu'une solution, alors les considérations de symétrie vous imposent automatiquement l'une des deux formes suivantes :

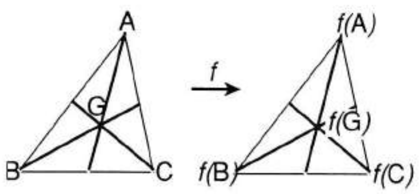


Nous laissons le lecteur démontrer que la solution est en fait donnée par le dernier dessin ...

Plus généralement, lorsque l'on est aux prises avec un problème, un bon réflexe est de regarder ce que l'on appelle ses invariants. En Mécanique classique, par exemple, la masse totale d'un système est conservée, ainsi que l'énergie totale.

L'idée d'invariant s'exprime de la manière suivante : une bonne fonction envoie le truc d'un machin sur le truc de l'image du machin. Pas très clair, dit comme ça ... Mais remplacez donc «bonne fonction» par «translation», «truc» par «barycentre» et «machin» par «triangle» et vous obtenez le théorème suivant :

« si f est une translation et ABC un triangle dont le barycentre est G, alors f(G) est le barycentre du triangle f(A)f(B)f(C) ».

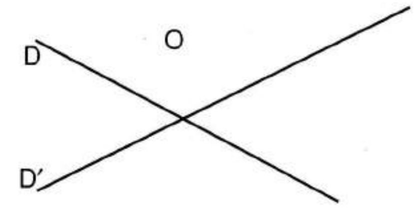


On dit que le barycentre d'un triangle est invariant par translation, ou que «l'image du barycentre est le barycentre des images.»

Transcrivez vous-même le petit tableau suivant :

bonne fonction	truc	machin
f(x)=1/x	opposé	nombre non nul
rotation	milieu	segment
réflexion	centre	cercle
descendant	roi	peuple

La nature des invariants mis en jeu dépend du problème à traiter. Par exemple, s'il s'agit de déterminer (l'équation de) la droite D' image de D par la rotation de centre O et d'angle a :



alors l'invariant que l'on peut utiliser est la valeur de la distance de D à O, qui doit être la même que celle de D' à O. Un bon petit moyen pour repérer une faute de calcul éventuelle.

Un autre principe utile : le passage à la limite. Penchons-nous encore sur la consommation de la 807.
Si on remplace la valeur 130 km/h par une valeur de plus en plus grande, alors, selon notre formule, la consommation augmente. C'est plutôt bon signe. Si on remplace la valeur 10 km/h par une valeur beaucoup plus petite ou beaucoup plus grande, l'écart de vitesse de la voiture devient négligeable devant la consommation initiale, ou au contraire prépondérant. C'est encore de bon augure. Et l'on peut continuer ...
Enfin, si, le jour d'un examen, vous arrivez comme Toto à la solution déraisonnable de 58 litres aux cent sans parvenir à trouver l'erreur, n'hésitez pas à faire ce que tous les professeurs recommandent : signalez que vous vous êtes sûrement trompé !

C'est faire preuve d'intelligence que d'avoir l'esprit critique !

Benoît Rittaud