1. Dénombrement

Analyse combinatoire est un synonyme de dénombrement.

Le **dénombrement** s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis.

Il est né de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développé sous l'influence du calcul des probabilités. Il est par ailleurs lié à la théorie des nombres et à la théorie des graphes.

1.1. Deux principes fondamentaux du dénombrement

Principe des tiroirs

« Si vous disposez d'une commode avec 10 tiroirs et que vous devez ranger 11 pantalons, alors au moins un des tiroirs contiendra au moins 2 pantalons. »

Plus généralement, si vous avez n « tiroirs » à disposition pour y ranger $n+k$ « objets », alors certains « tiroirs » contiendront plus d'un « objet ».

Un exemple simple

Dans un village de 400 habitants, peut-on toujours trouver deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

Solution

Ici, les tiroirs représentent les jours de l'année et les objets les habitants. Seuls 366 habitants peuvent avoir des dates de naissance différentes.

Un exemple plus subtil

On jette 51 miettes sur une table carrée de 1 m de côté. Montrez qu'il y a toujours au moins un triangle formé de 3 miettes dont l'aire vaut au plus 200 cm^2.

Solution

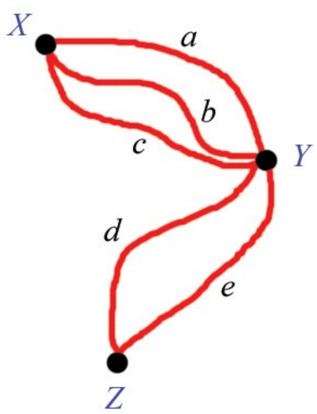
On partage la table en 5 x 5 = 25 carrés de 20 cm de côté ; comme il y a 51 miettes, il existe au moins 1 carré qui contient 3 miettes. Le triangle formé par ces 3 miettes a une aire au plus égale à la moitié de l'aire du carré dans lequel il est inscrit, soit 200 cm^2.

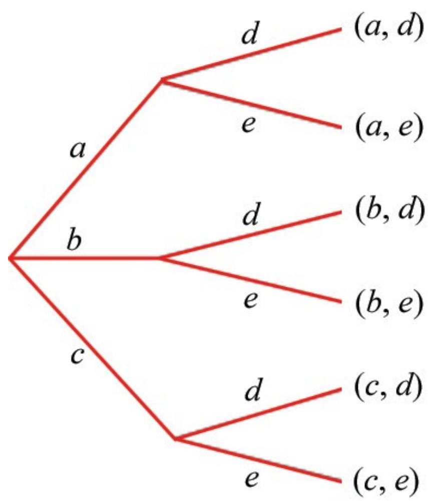
Principe de décomposition

Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1, n_2, ..., n_k manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ manières différentes.

Exemple

Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e). Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?





Il y a 6 (= 3·2) trajets possibles : (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e).

1.2. Exercices d'échauffement

Exercice 1.1

À la fin d'une réunion d'anciens élèves, tout le monde se serre la main. S'il y a n personnes à la fête, combien de poignées de mains sont échangées ?

Exercice 1.2

Combien de diagonales contient un polygone convexe à n côtés (une diagonale relie deux sommets non adjacents) ?

Exercice 1.3

Le jeu « Tantrix » est composé de tuiles hexagonales sur lesquelles sont dessinés des rubans comme le montre le dessin ci-dessous. Un ruban part du milieu d'un côté pour aller vers le milieu d'un autre côté. Il y a quatre couleurs en tout, mais sur chaque tuile ne figurent que trois rubans de couleurs différentes.

Indication
Résolvez d'abord le problème avec trois couleurs puis réfléchissez comment passer à quatre couleurs.
Attention aux doublons obtenus par rotation !

De combien de tuiles différentes est composé un jeu complet ?

Exercice 1.4*

Vous voulez construire un château de cartes avec…

a. un jeu de 52 cartes.
b. dix jeux de 52 cartes.

Combien d'étages aura votre château ? Le château doit être complet (en forme de triangle). Il est possible que l'on n'utilise pas toutes les cartes.

Château de cartes et jeux amoureux, par Patrick Martin
www.patrick-martin.com

Exercice 1.5

Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonne et voyelle peut-on former…

a. si la première lettre est une consonne ?
b. si la première lettre est une voyelle ?

Par « mot », on entend ici une suite de lettres, pas un mot du dictionnaire.

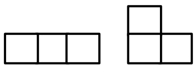
Traitez deux cas : 1) on peut utiliser plusieurs fois la même lettre ;
2) on ne peut pas utiliser plusieurs fois la même lettre.

Exercice 1.6

Un de vos amis hongrois vous a dit un jour ceci : « En Hongrie, il y a 10 millions d'habitants. 78% des Hongrois ont un téléphone portable. Je suis sûr de trouver en Hongrie au moins trois personnes qui sont nées le même jour et qui ont le même code PIN (code de 4 chiffres protégeant la carte SIM). » Votre ami a-t-il raison ?

Exercice 1.7

Les deux triminos :



Les polyminos ont été étudiés par les Anglais **Dudeney** et **Dawson** au début du XX^e siècle. Ils doivent leur popularisation, à partir des années cinquante, à Solomon W. **Golomb**, et sont devenus aujourd'hui un thème classique des récréations mathématiques. Les polyminos sont des assemblages de carrés de même taille par un de leurs côtés. Deux carrés s'assemblent en un domino, trois carré en un trimino (il n'y a que deux configurations possibles : le « bâton » et le « trimino en L »), quatre carrés en un tétramino (vous connaissez le jeu « Tétris » ?), cinq carrés en un pentamino, etc.
Combien y a-t-il de pentaminos différents (attention aux rotations et aux symétries axiales) ?

1.3. Permutations simples

Définition

Tout classement **ordonné** de n éléments distincts est une **permutation** de ces n éléments. Par exemple *aebcd* est une permutation des éléments *a, b, c, d, e*.

Nombre de permutations simples

Le nombre de permutations de n éléments peut être calculé de la façon suivante : il y a n places possibles pour un premier élément, $n-1$ pour un deuxième élément, ..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant. On peut représenter toutes les permutations possibles sur un arbre.
On remarque facilement alors qu'il y a $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ permutations possibles.
On note $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ Par convention, $0! = 1$.

$n!$ se lit « n factorielle ».

Il y a donc $n!$ permutations de n éléments distincts.

$$P_n = n!$$

Voici les 4! = 24 permutations de 4 éléments distincts a, b, c, d :

abcd	abdc	acbd	acdb	adbc	adcb	bacd	badc
bcad	bcda	bdac	bdca	cabd	cadb	cbad	cbda
cdab	cdba	dabc	dacb	dbac	dbca	dcab	dcba

Questions classiques

De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?
Réponse : 10! = 3'628'800

De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?
Réponse : $36! \cong 3.72\cdot 10^{41}$

Remarque sur la fonction factorielle

La fonction factorielle croît extrêmement vite. Elle est tellement rapide que la plupart des calculatrices courantes ne peuvent pas calculer au-delà de 69!.
Pour calculer 70! et au-delà (tout en restant raisonnable), vous pouvez utiliser un logiciel puissant comme *Wolfram alpha* ou le langage *Python*.

Pourquoi 69 ?

Notation cyclique

Soit la permutation de nombres : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Cette permutation peut être écrite en **notation cyclique** :

(2 4 5) (1 3) (6)

Cela signifie que 2 est remplacé par 4, 4 par 5, 5 par 2 ; 1 est remplacé par 3 et 3 par 1 ; 6 est remplacé par 6.

Exercice 1.8

Soient les nombres entiers de 1 à 9 classés par ordre croissant.

Questions subsidiaires
Vérifiez qu'il y a 144 possibilités d'écrire la notation cyclique du points **a.**

Comment maximiser le nombre de permutations nécessaires pour revenir au point de départ ?

a. À quelle permutation correspond la notation cyclique (1 4 6 3)(2 9 7)(5 8) ?

b. Écrivez en notation cyclique la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 8 & 2 & 6 & 4 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

c. Combien de fois faut-il appliquer la permutation du point **a.** pour retrouver la séquence 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?

d. Combien de fois faut-il appliquer la permutation du point **b.** pour retrouver la séquence 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?

Nombre d'inversions

Le **nombre d'inversions** dénombre combien de fois un nombre plus grand se rencontre avant un plus petit dans la suite $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Si le nombre d'inversions est pair, la permutation est dite **paire** ; dans le cas contraire, elle est **impaire**.

Exemple

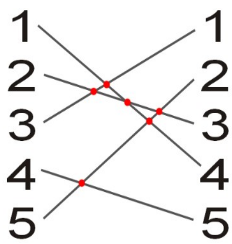
La permutation 4 3 1 5 2 comporte six inversions : 4 est avant 1, 2 et 3, 3 est avant 1 et 2, et enfin 5 est avant 2. Cette permutation est donc paire.

Méthode graphique

Il ne faut pas que plus de deux lignes se croisent au même point...

On peut aussi trouver le nombre d'inversions à l'aide d'un dessin. On met sur deux colonnes les n nombres de la permutation, puis on relie le chiffre de gauche qui a été remplacé par l'élément de droite. Le nombre d'inversions correspond au nombre d'intersections de lignes.

Voici un exemple avec la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.



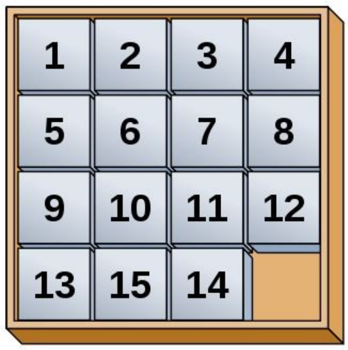
Il y bien 6 intersections qui correspondent aux 6 inversions que l'on avait déjà calculées.

Exercice 1.9*

Samuel **Loyd** (1841-1911), l'inventeur du taquin (voir ci-contre), avait inversé l'ordre des pièces 14 et 15, et lancé le défi de reconstituer l'ordre naturel des petits carrés en les faisant coulisser.

Personne n'a réussi à remettre les pièces en place. Et pour cause : c'est impossible !

Pourrez-vous le démontrer ? *Indication :* c'est une question de parité...



1.4. Permutations avec répétitions

Nombre de permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.
Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \le n$), chacun d'eux apparaissant $n_1, n_2, \ldots, n_k$ fois, avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ et $n_i \ge 1$, on a :

La barre sur le P signifie « avec répétitions ».

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

En effet, si chacune des n_i places occupées par des éléments identiques ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) était occupée par des éléments différents, le nombre de permutations serait alors à multiplier par $n_i\,!$, d'où :

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)\cdot n_1!\,n_2!\cdot\ldots\cdot n_k! = n!$$

Les $\frac{5!}{2!1!2!}$ permutations des 5 éléments a, a, b, c, c :

aabcc	aacbc	aaccb	abacc	abcac	abcca	acabc	acacb	acbac	acbca
accab	accba	baacc	bacac	bacca	bcaac	bcaca	bccaa	caabc	caacb
cabac	cabca	cacab	cacba	cbaac	cbaca	cbcaa	ccaab	ccaba	ccbaa

Question classique Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot « excellence » ?

Réponse : $\frac{10!}{4!1!2!2!1!} = 37'800$

1.5. Arrangements simples

Définition Un **arrangement** est une collection de p objets pris successivement parmi n **en tenant compte de l'ordre d'apparition**. Il est dit **simple** si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Nombre d'arrangements simples Le nombre d'arrangements de p éléments distincts choisis parmi n est noté A_p^n (dans certains livres, p et n sont inversés).
Le premier élément peut être choisi parmi n, le deuxième parmi n–1, le troisième parmi n–2 et le p-ième élément parmi n–p+1. D'où :

$$A_p^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Les 4·3·2 = 24 arrangements de 3 éléments choisis parmi a, b, c, d :

abc	abd	acb	acd	adb	adc	bac	bad	bca	bcd	bda	bdc
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb	dab	dac	dba	dbc	dca	dcb

Questions classiques Après les prolongations d'un match de football, l'entraîneur doit choisir les 5 tireurs de penaltys parmi les onze joueurs et l'ordre de passage. Combien de choix a-t-il ?

Réponse : $A_5^{11} = 55'440$

Le *bingo* est un jeu où les nombres tirés sont annoncés les uns à la suite des autres. S'il y a 90 numéros en tout dans un sac, combien de suites différentes peut-on former avec les 10 premiers numéros tirés ?

Réponse : $A_{10}^{90} \cong 2.076\cdot 10^{19}$

1.6. Arrangements avec répétitions

Nombre d'arrangements avec répétitions Le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi n avec répétitions possibles est noté $\overline{A}_p^n$. Si les répétitions sont permises, alors tous les éléments peuvent prendre n valeurs. On a donc, d'après le principe de décomposition :

$$\overline{A}_p^n = n^p$$

Les $3^2 = 9$ arrangements avec répétitions de 2 éléments choisis parmi a, b, c :

aa ab ac ba bb bc ca cb cc

Questions classiques Combien de numéros de téléphone composés de 7 chiffres existe-t-il ?

Réponse : $\overline{A}_7^{10} = 10^7$

On a 6 clochettes produisant chacune un son différent des autres. On veut faire une mélodie de 10 notes avec ces clochettes. Combien de possibilités a-t-on ?

Réponse : $\overline{A}_{10}^6 = 6^{10} = 60'466'176$

1.7. Combinaisons simples

Définition

Une **combinaison** est une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc **sans tenir compte de l'ordre d'apparition**. Elle est dite **simple** si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Nombre de combinaisons simples

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté C_p^n.
Si l'on permute les éléments de chaque combinaison simple, on obtient tous les arrangements simples. Il y a donc p! fois plus d'arrangements que de combinaisons, ce qui s'écrit :

$$A_p^n = p!\,C_p^n$$

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est donc :

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les $\frac{3!}{2!1!} = 3$ combinaisons de 2 éléments choisis parmi a, b, c : ab ac bc.

Questions classiques

Au jass, on reçoit 9 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien de mains différentes y a-t-il ?
Réponse : C_9^{36} = 94'143'280

Un joueur choisit entre 1 et 20 numéros et marque une feuille de Keno, qui en contient 80 (de 1 à 80). Le casino tire alors 20 nombres au hasard. Combien de grilles différentes de Keno existe-t-il ?
Réponse : $C_{20}^{80} \cong 3.535 \cdot 10^{18}$

1.8. Combinaisons avec répétitions

Nombre de combinaisons avec répétitions

Si les répétitions sont permises, le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté $\overline{C}_p^n$.
La démonstration de la formule est un peu compliquée. Comme les combinaisons avec répétitions sont peu fréquentes, nous donnerons la formule sans commentaire :

$$\overline{C}_p^n = C_p^{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}$$

Les $\frac{(4+2-1)!}{(4-1)!2!} = 10$ combinaisons avec répétitions de 2 lettres choisies parmi a, b, c, d sont :

aa ab ac ad bb bc bd cc cd dd

Questions classiques

Combien y a-t-il de dominos avec 10 symboles différents ?
Réponse : $\overline{C}_2^{10} = C_2^{10+2-1} = C_2^{11} = \frac{11!}{9!2!} = 55$

Pour la Saint-Valentin, vous voulez offrir un bouquet de 5 roses à votre fiancée. La fleuriste a 8 sortes de roses.
Combien de bouquets différents peut-elle composer ?
Réponse : $\overline{C}_5^{8} = C_5^{8+5-1} = C_5^{12} = \frac{12!}{7!5!} = 792$

1.9. Exercices

Pour tous ces exercices, il s'agira tout d'abord de déterminer s'il s'agit d'une permutation, d'un arrangement ou d'une combinaison. Demandez-vous toujours si l'ordre intervient ou non. Si c'est le cas, c'est un arrangement ou une permutation ; sinon, c'est une combinaison. Demandez-vous ensuite s'il y a des répétitions ou non.

Exercice 1.10

Combien un village doit-il avoir d'habitants au minimum pour que l'on soit sûr de trouver deux personnes au moins avec les mêmes initiales (composées de 2 lettres) ?

Exercice 1.11

Un ordinateur des années 1980 codait les couleurs sur 8 bits. Combien de couleurs l'écran d'un tel ordinateur pouvait-il afficher ?

Exercice 1.12

Quatre couples vont s'asseoir sur un banc de 8 places. Combien y a-t-il de façons de le faire si :

a. il n'y a pas de contraintes ;
b. les hommes restent ensemble et les femmes aussi ;
c. les hommes restent ensemble ;
d. chaque couple reste ensemble.

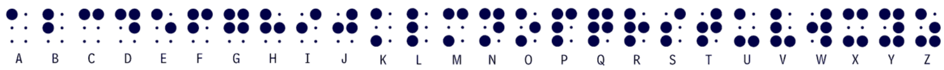
Exercice 1.13

Les douze tomes d'une encyclopédie sont rangés au hasard.

a. Combien y a-t-il de manières de les aligner sur une étagère ?
b. Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte (dans cet ordre) ?

Exercice 1.14

Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montre l'image ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?



Exercice 1.15

Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres des mots :

a. deux **b.** abracadabra **c.** sociologique

Exercice 1.16

Dans le passé, chaque classe du lycée cantonal devait avoir une délégation de trois élèves : un délégué, un suppléant du délégué et un laveur de tableau. Une classe est composée de 11 filles et 3 garçons.

a. Combien y a-t-il de délégations possibles ?

Combien y a-t-il de délégations possibles…

b. si le délégué et le suppléant doivent être de sexe différent ?
c. si le laveur de tableau doit être un garçon ?
d. si les deux sexes doivent être présents dans la délégation ?

Exercice 1.17

Un représentant s'apprête à visiter cinq clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visites...

a. s'il les fait toutes le même jour ?
b. s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

Exercice 1.18

Les **Rapetou** (*the Beagle Boys* en anglais) sont des personnages de fiction créés en 1951 par Carl Barks pour les studios Disney. Ils se ressemblent et s'habillent de manière identique. La seule façon de les différencier est leur matricule de prisonnier qui fait office de nom. Les trois combinaisons récurrentes sont 176-167, 176-671 et 176-761.
Les Rapetou ne sont pas en nombre défini. Carl Barks a déclaré dans une interview qu'il y a autant de Rapetou que de matricules en ABC-XYZ avec les chiffres 1, 6 et 7 avant et après le tiret. Combien sont-ils donc ?

Exercice 1.19

Une châtelaine a onze amis très proches. Elle veut en inviter cinq à dîner.

a. Combien de groupes différents d'invités existe-t-il ?
b. Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble ?
c. Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne veulent pas se voir ?

Exercice 1.20

Triominos (ou Tri-ominos ou 3-ominos selon les éditions) est un jeu familial classique datant de 1967. C'est l'extension du domino sur des triangles.
Toutes les combinaisons de 0 à 5 sont représentées, depuis 0-0-0 jusqu'à 5-5-5. L'image ci-contre en montre quelques-unes.
Il y a 56 pièces dans le jeu de base. En manque-t-il ? Si oui, combien ?

Exercice 1.21

Lors d'un examen, un élève doit répondre à 10 questions sur 13.

a. Combien de choix a-t-il ?
b. Combien de possibilités a-t-il s'il doit répondre aux deux premières questions ?
c. Combien s'il doit répondre soit à la première question, soit à la deuxième ?
d. Combien s'il doit répondre à exactement 3 des 5 premières questions ?
e. Combien s'il doit répondre à au moins 3 des 5 premières questions ?

Exercice 1.22

À partir d'un jeu de 36 cartes, de combien de façons peut-on choisir exactement :

a. deux cartes rouges et un pique ?
b. deux rois et un carreau ?

Exercice 1.23

Au « Swiss Lotto », un jeu de type Keno, il faut cocher 6 numéros sur 45.

a. Combien y a-t-il de grilles possibles ?
b. Combien y a-t-il de grilles avec exactement trois numéros gagnants ?

Exercice 1.24

Il reste au magasin 10 patates d'un poids total de 1 kg. On veut en mettre un certain nombre (entre 1 et 10) dans un sac. Montrez que parmi tous les sacs de patates possibles, il y en a au moins 2 qui ont le même poids, au gramme près.

Exercice 1.25

D'un jeu de 36 cartes, on veut choisir une main de 9 cartes. Combien y a-t-il de mains...

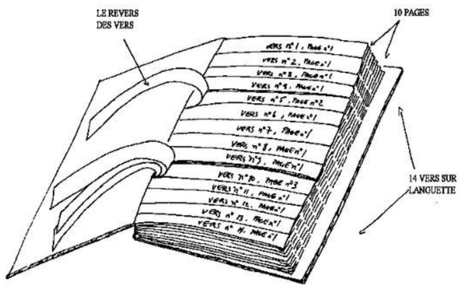
a. ne comportant que des cartes noires (trèfle ou pique) ?
b. ne comportant que des figures (valet, dame, roi ou as) ?
c. comportant 4 as ?
d. comportant 5 figures, dont 3 noires ?
e. comportant 3 as, 3 dames et 3 carreaux ?

Exercice 1.26

L'Oulipo est un groupe de littérature inventive et innovante qui naît au 20e siècle. Il a pour but de découvrir de nouvelles potentialités du langage à travers des jeux d'écriture.

Ce livre est disponible en ligne : www.parole.tv/cento.asp

En 1961, Raymond **Queneau** a publié une œuvre majeure de l'Oulipo. Le livre contient 10 sonnets de 14 alexandrins chacun. Chaque page du livre contient un sonnet et est découpée en 14 languettes contenant chacune un alexandrin. On peut ainsi composer un poème par exemple avec le premier alexandrin du cinquième sonnet, le deuxième alexandrin du neuvième sonnet, et ainsi de suite jusqu'au quatorzième alexandrin.



a. Le début du titre vous a échappé, mais vous vous rappelez que cela se termine par « ... milliards de poèmes ». Quel est le titre du livre de *Queneau* ?
b. À raison d'un poème toutes les minutes, combien d'années faudrait-il pour lire tous les poèmes possibles ?

Exercice 1.27

Résolvez **a.** $A_2^n = 72$ **b.** $A_4^n = 42\,A_2^n$ **c.** $2\,A_2^n + 50 = A_2^{2n}$

Exercice 1.28

Sur une feuille quadrillée, dessinez un rectangle de 10 carrés de long et de 6 carrés de large. En se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut en suivant les lignes du quadrillage, combien y a-t-il de chemins pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du rectangle ?

Exercice 1.29

On dit que cette question faisait partie de l'entretien d'embauche chez Microsoft.

Quatre personnes, au bord d'un précipice, doivent traverser la passerelle qui mène sur l'autre bord. Mais il y a un problème : la passerelle n'est pas très solide et on ne peut pas la franchir à plus de deux. De plus, il faut se munir d'une torche, car la nuit est tombée et certaines planches sont pourries. Notons pour finir que le pas doit toujours s'accorder sur celui de la personne la plus lente :

Alix traverse en 1 minute,
Billy en 2 minutes,
Camille en 5 minutes et
Dany, pusillanime, met 8 minutes.

Elles n'ont qu'une seule torche, et elles ne peuvent pas se la lancer d'un bord du ravin à l'autre ; il faut donc la rapporter à chaque fois.

a. Combien y a-t-il de façons de faire traverser cette passerelle à ces quatre personnes en cinq passages ?

b. Quelle est la solution la plus rapide ?

Exercice 1.30

La série *WW* dans le bloc de gauche indique un garage.

La nouvelle immatriculation française se base sur le modèle AA-111-AA (deux lettres, trois chiffres, deux lettres) en vigueur depuis 1994 en Italie.

a. Combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes ?

En réalité, il y en a moins que cela, car on exclut les lettres *I*, *O* et *U* (du fait de leur trop grande ressemblance avec le *1*, le *0* et le *V*) ainsi que les séries *SS* et *WW* du bloc de gauche et la série *SS* du bloc de droite. De plus, les séries de chiffres démarrent à 001.

b. Avec ces contraintes, combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes ?

c. Les combinaisons de lettres prêtant à rire *KK*, *PQ*, *QQ*, *TG* et *WC* ne sont cependant pas supprimées. Si c'était le cas, combien y aurait-il de plaques d'immatriculation ?

1.10. Coefficients binomiaux

Triangle de Pascal

En fait, ce triangle était connu des mathématiciens chinois au 12e siècle déjà puisque **Zhu Shijie** s'y intéressait. **Pascal** en fait une étude détaillée en 1653, c'est pourquoi il porte son nom.

Blaise **Pascal**
(1623 - 1662)

Le triangle de **Pascal** se construit ligne par ligne : chaque terme est l'addition des deux nombres de la ligne supérieure qui lui sont adjacents.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
$n=0$ ←	1							
$n=1$ ←	1	1						
$n=2$ ←	1	2	1					
$n=3$ ←	1	3	**3**	**1**				
$n=4$ ←	1	4	6	**4**	1			
$n=5$ ←	1	5	10	10	5	1		
$n=6$ ←	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$ ←	1	7	21	35	35	21	7	1

Exemple : on voit que le **4** est égal à **3** + **1**.

Ce triangle permet de déterminer les coefficients binomiaux sans connaître la formule. Par exemple, le nombre $C_3^4 = \frac{4!}{3!1!}$ se lit à l'intersection de la ligne n = 4 et de la diagonale p = 3.

Binôme de Newton

Vous connaissez les identités binomiales depuis longtemps déjà :

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Mais quelles sont les formules pour des degrés supérieurs ?
En comparant les formules de degré 0, 1, 2 et 3 avec les lignes 0, 1, 2 et 3 du triangle de Pascal, vous constaterez que les coefficients des identités binomiales correspondent avec les nombres du triangle. Donc :

C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on les appelle coefficients binomiaux !

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

etc.

Soit n un nombre entier strictement positif. La formule générale du **binôme de Newton** est :

Rappel

$\binom{n}{p}$ est une autre notation de C_p^n.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Quelques propriétés du triangle de Pascal

Il y a toujours un 1 dans les bords : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Le triangle est symétrique par rapport à la verticale : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

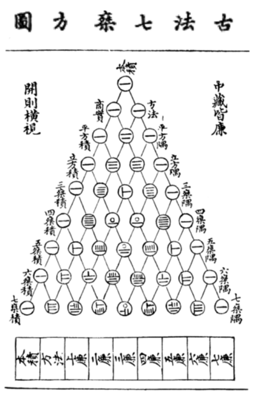
Par la construction du triangle, on a : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Vérifiez encore que : $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}$

La somme des termes sur la ligne de rang n (première ligne = rang 0) est égale à 2^n.

Si vous faites la somme alternée des éléments d'une ligne ($a - b + c - d + \ldots$), vous obtenez 0.

Les nombres situés sur la troisième diagonale descendante correspondent aux nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10, ...
Ceux de la quatrième diagonale sont les nombres tétraédriques : 1, 4, 10, 20, ...



Triangle arithmétique de **Zhu Shijie** (1270 - 1330)

Exercice 1.31

a. Développez $(a+b)^7$.
b. Écrivez le cinquième terme du développement de $(r \cdot s^2 + 3)^{16}$.

1.11 Ce qu'il faut absolument savoir

Maîtriser le principe des tiroirs ❑ ok
Maîtriser le principe de décomposition ❑ ok
Reconnaître à quel type de dénombrement on a affaire en lisant une donnée ❑ ok
Calculer tous les types de dénombrement sur sa calculatrice ❑ ok
Connaître le triangle de Pascal et les coefficients binomiaux ❑ ok