

2. Probabilités

2.1. Un peu d'histoire



Pierre de **Fermat**
(1601 – 1665)



Jacques **Bernoulli**
(1654 - 1705)



Pierre-Simon **Laplace**
(1749 - 1827)

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme **Cardan** (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait **Cardan** était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise **Pascal** par son ami le **Chevalier de Méré**, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ? Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre **Pascal** et **Fermat**, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christiaan **Huygens**, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique. C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques.

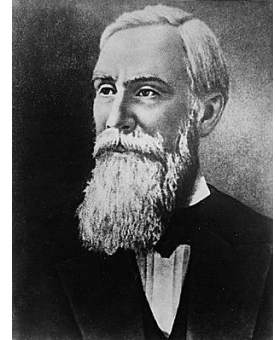
On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ? Le premier à se poser la question est le bâlois Jacques **Bernoulli**, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit *Ars Conjectandi*, qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel.

Au 19^{ème} siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.

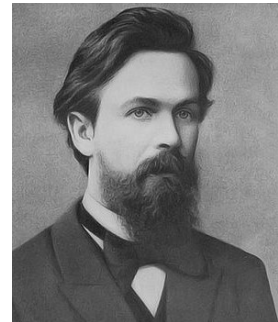
Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.

C'est **Laplace** qui s'en charge dans son ouvrage *Théorie analytique des probabilités*, paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »

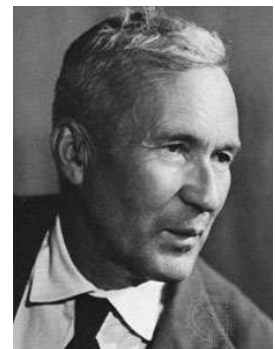
D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham **de Moivre** (1667-1754), Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), Denis **Poisson** (1781-1840), Pafnouti Lvovitch **Tchebychev** (1821-1894), Andrei Andreevich **Markov** (1856-1922) et Andrei Nikolaevich **Kolmogorov** (1903-1987).



Pafnouti Lvovitch **Tchebychev**
(1821 – 1894)



Andrei Andreevich **Markov**
(1856 - 1922)



Andrei Nikolaevich **Kolmogorov**
(1903 - 1987)

2.2. Univers, issues et événements

Une **issue** est le résultat d'une expérience aléatoire.

Supposons que l'on jette un dé. Lorsqu'il s'immobilisera, il indiquera l'une des six issues suivantes : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Les statisticiens appellent l'ensemble

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}$$

l'univers des résultats.

Événements

On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω .

L'événement est dit **élémentaire** s'il ne correspond qu'à une seule et unique issue.

Exemple du dé Les six événements élémentaires sont :

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}, \quad I_2 = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}, \quad I_3 = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}, \\ I_4 = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}, \quad I_5 = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}, \quad I_6 = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}.$$

Ainsi, l'événement « le résultat d'un lancer de dé est un nombre pair » est identifié par le sous-ensemble

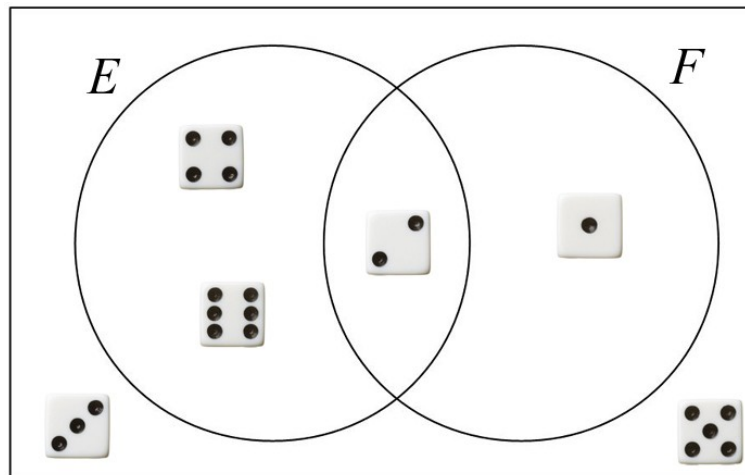
$$E = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}$$

Opérations sur les événements

Les opérations sur les événements sont les opérations classiques sur les ensembles.

Soit l'événement $E = \{2, 4, 6\}$ et l'événement « le résultat du lancer est plus petit que 3 » identifié par l'ensemble $F = \{1, 2\}$.

Si l'intersection de deux événements E et F est vide ($E \cap F = \emptyset$), on dit que ces deux événements sont **incompatibles**.



Intersection $E \cap F$ représente l'événement « le résultat du lancer est un chiffre pair **et** un chiffre plus petit que 3 », donc $E \cap F = \{2\}$.

Union $E \cup F$ représente l'événement « le résultat du lancer est un chiffre pair **ou** un chiffre plus petit que 3 », donc $E \cup F = \{1, 2, 4, 6\}$.

Complémentaire L'événement complémentaire de E , que l'on note \bar{E} (on prononce « **non** E »), correspond à l'événement « le résultat du lancer est un nombre impair ». On a donc $\bar{E} = \{1, 3, 5\}$.

Exercice 2.1

On lance deux fois une pièce de monnaie. On écrit p si la pièce montre pile et f si elle montre face. Écrivez l'ensemble Ω .

Exercice 2.2

Une urne contient quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. On tire successivement deux boules de l'urne, sans remettre la première boule tirée avant le tirage de la seconde. Écrivez l'ensemble Ω .

Exercice 2.3

Quatre chevaux avec les dossards numérotés de 1 à 4 font une course. Écrivez l'ensemble Ω des tiercés possibles.

2.3. Premiers pas en probabilités

Considérons une expérience dont l'univers est Ω . Nous voulons assigner à chaque issue I un **nombre** $P(I)$ qui indiquera sa **probabilité**.



La probabilité d'une issue I est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(I) \leq 1$$

0 indiquera que l'issue est **impossible** et **1** qu'elle est **certaine**.

Par exemple, si on lance un dé non pipé, chaque face aura une probabilité égale de sortir (1 chance sur 6). On peut donc dire que la probabilité d'une face est de $\frac{1}{6}$.

De plus, quand on lance un dé, on est sûr qu'il indiquera un chiffre de 1 à 6. On doit donc avoir $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$, ce qui est bien le cas.

Donc, en généralisant :

$$P(I_1) + P(I_2) + \dots + P(I_n) = P(\Omega) = 1$$

Attention ! Cette propriété n'est toujours vraie que pour des événements élémentaires.

Événements élémentaires équiprobables

On vient de voir ce qui se passait avec un dé non pipé. Les événements $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$ sont ce qu'on appelle des **événements élémentaires équiprobables** (ils sont constitués d'un seul élément et ont tous la même probabilité).

Ce théorème est la version moderne de la définition qu'avait donnée Laplace en 1812 (voir introduction).

Soit Ω un univers comportant n événements élémentaires **équiprobables**. Si A est un événement de Ω formé de la réunion de k événements élémentaires, alors $P(A) = \frac{k}{n}$.

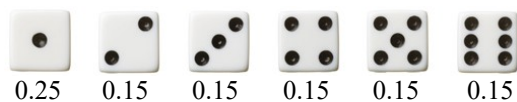
Autre formulation

« La probabilité est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles » (si tous les cas sont équiprobables).

Le seul moyen de vérifier qu'un dé n'est pas pipé, c'est de le lancer un grand nombre de fois, par exemple 6000 fois. On devrait alors en principe obtenir environ 1000 fois chacune des faces. Plus on lancera le dé, plus les fréquences observées seront proches des probabilités théoriques. C'est la **loi forte des grands nombres**.

Attention ! Si on utilise un dé pipé, les issues ne sont plus équiprobables et le théorème ci-dessus n'est plus vrai.

Prenons par exemple un dé dont les faces ont les probabilités d'apparition suivantes (on peut vérifier que la somme des probabilités donne bien 1) :

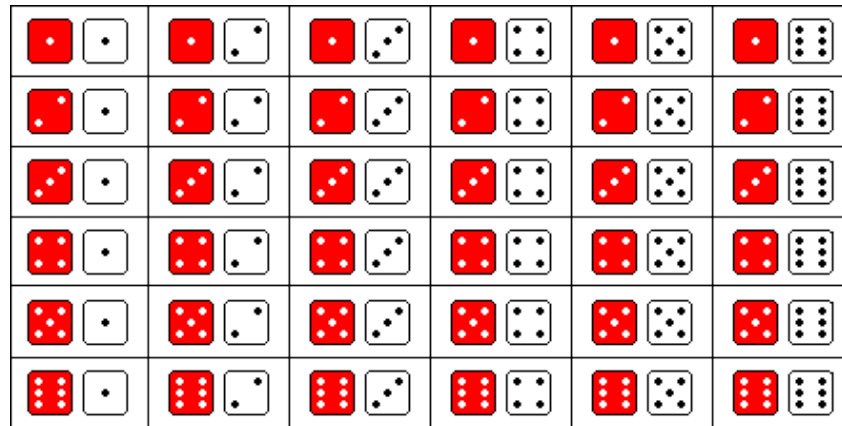


Ici, la probabilité d'obtenir sera $\frac{1}{4}$, et non $\frac{1}{6}$.

Exemple

On lance deux dés, un rouge et un blanc. Il y a 36 événements élémentaires possibles équiprobables. Chaque paire aura donc une probabilité d'apparition de $\frac{1}{36}$ (1 cas favorable sur 36 possibles).

On notera chaque issue par la paire $(r ; b)$ où r indiquera le résultat du dé rouge et b celui du dé blanc.



Description de l'événement	Événement	Probabilité
A : la somme des deux dés est 3	$A = \{(1; 2), (2; 1)\}$	$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
B : la somme des deux dés est 6	$B = \{(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)\}$	$P(B) = \frac{5}{36}$
C : le dé rouge montre un 1	$C = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)\}$	$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
D : la somme des dés est inférieure à 7 et est un nombre premier	$D = \{(1; 1), (1; 2), (1; 4), (2; 1), (2; 3), (3; 2), (4; 1)\}$	$P(D) = \frac{7}{36}$

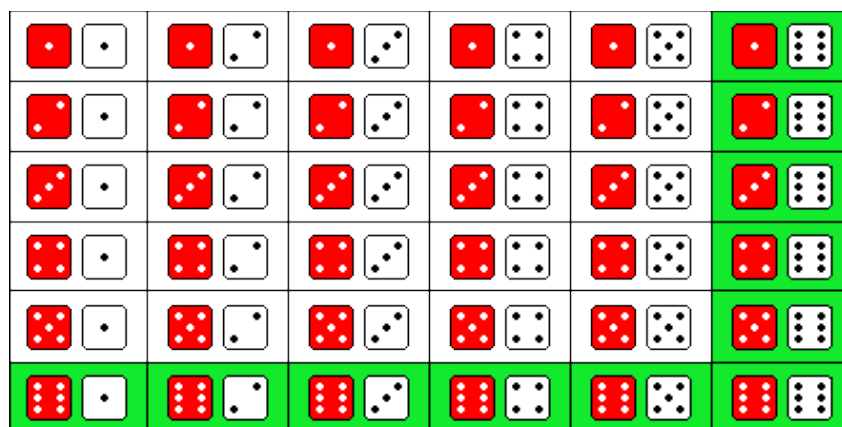
Théorème 2.1

Reprenons l'exemple des deux dés. Soit E l'événement « le dé rouge montre un 6 » et F l'événement « le dé blanc montre un 6 ».



$E \cup F$: « le dé rouge **ou** le dé blanc montre un 6 ».

$E \cap F$: « le dé rouge **et** le dé blanc montrent un 6 ».



$$P(E \cup F) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

$E \cup F$ est toute la partie verte.
 $E \cap F$ est l'intersection de la bande verticale et de la bande horizontale.
 Cela illustre le théorème 2.1 :

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

En comptant les paires vertes, on voit qu'il y en a bien 11 sur 36.

Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Lorsque les deux événements sont incompatibles, le théorème 2.1 se simplifie et devient :

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F), \text{ car } E \cap F = \emptyset.$$

Théorème 2.2

Soit l'événement E « les deux dés montrent un 4 ». L'événement \bar{E} est « au moins un des deux dés ne montre pas un 4 ».

$$P(E) = \frac{1}{36}$$

$$P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$



On vérifie immédiatement sur le dessin que

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

On peut commenter ce théorème comme suit : la probabilité qu'un événement ne survienne pas est 1 moins la probabilité qu'il survienne. Par exemple, si la probabilité de toucher une cible est 0.23, la probabilité de rater la cible est 0.77.

Exercice 2.4

Dans un canton, il y a 40'000 voitures dotées de plaques numérotées de 1 à 40'000. En n'observant que les voitures de ce canton, quelle probabilité a-t-on de voir une voiture dont le numéro de plaque commence par 1 ?

Exercice 2.5

On lance deux dés. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

- a. un 3 et un 5 ?
- b. deux 3 ?
- c. deux chiffres identiques ?
- d. un total de 8 ?

Exercice 2.6

Un magasin propose le jeu ci-dessous. Quelle est la probabilité de gagner ?

On supposera bien sûr que le client grattera exactement trois cases...

A gagner:



1 bouteille de jus de pomme naturel Ramseier, 50cl

Billet valable uniquement si seules 3 cases sur 4 ont été grattées et si 3 flammes apparaissent. A faire valoir entre le 6.7 et le 22.8.2015 dans les supermarchés Coop ou au rayon alimentaire des Coop City. Non cumulable avec d'autres bons. Dans la limite des stocks disponibles.

Grattez 3 cases. Si vous découvrez 3 flammes, c'est gagné!

- 1 Grattez seulement 3 des 4 cases.
- 2 Si vous découvrez 3 flammes, c'est gagné!
- 3 Faites valoir votre billet en le remettant à la caisse. Si vous avez gagné un produit, veuillez le prendre directement du rayon et le présenter à la caisse avec le billet.

Ne gratter que 3 des 4 cases!



2 063000 353352

Exercice 2.7

On propose à Camille de lancer simultanément trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées de 10, 20 et 50 centimes respectivement. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté pile.

a. Décrivez l'univers.

Quelle probabilité a-t-il de gagner...

b. 40 centimes ? c. moins de 50 centimes ? d. plus de 20 centimes ?

Exercice 2.8

Un tétraèdre pipé vous sert de dé. Les faces sont numérotées de 1 à 4. Après le jet, la face gagnante est celle qui repose contre le sol.

La probabilité de gain est proportionnelle au numéro inscrit sur la face : par exemple, la face numéro 4 a une probabilité de sortie 4 fois plus élevée que la face numéro 1.

Quelle est la probabilité de sortie de la face numéro 3 ?

Exercice 2.9

On jette deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit i ? Faites les calculs pour $i = 2, 3, \dots, 12$. Dessinez un histogramme.

Exercice 2.10

Deux boules sont tirées d'une urne contenant 6 boules blanches et 5 noires. Quelle est la probabilité qu'une des boules tirées soit blanche et l'autre noire ?

Exercice 2.11

Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voiture déterminé, les possibilités suivantes :



P_0 : il n'y a pas eu de panne ;

P_1 : il y a eu une panne ;

P_2 : il y a eu deux pannes ;

P_3 : il y a eu plus de deux pannes.

Le dépouillement de l'enquête a montré que ces possibilités se sont produites respectivement 233, 310, 156 et 81 fois. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type, de tomber en panne dans l'année qui vient...

a. au moins une fois ?

b. moins de deux fois ?

Exercice 2.12

On tire d'un paquet de 52 cartes deux cartes au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles forment un black jack, ou, autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi ?

Indication : utilisez les combinaisons.

Exercice 2.13*

On admet que les C_5^{52} mains possibles au poker fermé sont équiprobables. Quelle est la probabilité de recevoir...



a. une quinte royale (10, V, D, R, 1 de la même couleur : \spadesuit , \heartsuit , \clubsuit ou \diamondsuit) ?

b. une quinte flush (5 cartes consécutives de la même couleur, mais pas une quinte royale) ?

c. un carré (p. ex. D \spadesuit , D \clubsuit , D \diamondsuit , D \heartsuit , 2 \spadesuit) ?

d. un full, i.e. un brelan + une paire (p. ex. V \spadesuit , V \clubsuit , V \diamondsuit , 4 \diamondsuit , 4 \heartsuit) ?

e. un flush (p. ex. 2 \heartsuit , 3 \heartsuit , 4 \heartsuit , 9 \heartsuit , V \heartsuit) ?

f. une quinte (p. ex. 2 \heartsuit , 3 \clubsuit , 4 \clubsuit , 5 \diamondsuit , 6 \spadesuit) ? On ne comptera pas les quintes royales, ni les quintes flush).

g. un brelan (p. ex. 1 \spadesuit , 1 \clubsuit , 1 \diamondsuit , 5 \diamondsuit , 8 \spadesuit) ?

h. deux paires (p. ex. 6 \spadesuit , 6 \clubsuit , 9 \diamondsuit , 9 \spadesuit , 10 \diamondsuit) ?

i. une paire (p. ex. R \spadesuit , R \clubsuit , 7 \diamondsuit , 3 \diamondsuit , 2 \spadesuit) ?

Exercice 2.14



- a. Si n personnes sont présentes dans une pièce, quelle est la probabilité que leurs anniversaires tombent tous sur des jours différents ?
- b. Pour quelle valeur de n cette probabilité tombe en dessous de $\frac{1}{2}$?

Pour simplifier, on exclura les gens nés le 29 février.

Indication

Commencez par calculer la probabilité de non-coïncidence pour $n = 2, 3$ et 4 . Donnez ensuite la formule générale.

Exercice 2.15



Trois frères possèdent chacun trois chapeaux identiques, soit, au total, neuf chapeaux identiques, à part les initiales de chaque propriétaire, invisibles de l'extérieur. Ces neuf chapeaux sont accrochés les uns à côté des autres. Un jour, les trois frères prennent chacun un chapeau au hasard.

Quelle est la probabilité qu'aucun des trois frères n'ait pris un chapeau qui lui appartienne ?

Exercice 2.16

Sur un damier dont chaque case carrée mesure 58 mm de côté, on lance une pièce de 5 centimes (dont le diamètre est de 17 mm). Quelle est la probabilité que la pièce tombe à l'intérieur d'une case, sans en déborder ?

Exercice 2.17

Let's Make A Deal ! était un jeu très populaire diffusé sur une chaîne américaine dans les années septante. À la fin du jeu, Monty Hall vous offrait la possibilité de gagner ce qui se trouvait derrière une porte.

Vous avez trois portes devant vous : derrière une se trouve un prix magnifique (par exemple une voiture) et derrière les deux autres un prix moins intéressant (par exemple une chèvre). Vous choisissez une porte. Pour ménager le suspense, l'animateur, avant de révéler ce qu'il y a derrière votre porte, ouvre une des deux autres portes (derrière laquelle se trouve toujours une chèvre). Il vous pose alors la question : « Parmi les deux portes encore fermées, laquelle choisissez-vous ? »

Vaut-il mieux garder la première porte choisie ou au contraire prendre l'autre porte ? À moins que cela n'ait aucune importance...

2.4. Axiomes du calcul des probabilités et théorèmes (résumé)

Axiome 2.1 La probabilité d'un événement E est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Axiome 2.2 La probabilité de l'événement certain est égale à 1 :

$$P(\Omega) = 1$$

Axiome 2.3 La probabilité de la réunion de deux événements **incompatibles** est égale à la somme de leur probabilité :

$$\text{si } E \cap F = \emptyset, \text{ alors } P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Théorème 2.1 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Théorème 2.2 $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Théorème 2.3 $P(\emptyset) = 0$

Théorème 2.4 $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$ si les événements E_i sont deux à deux incompatibles.

Théorème 2.5 $P(F \cap \bar{E}) = P(F) - P(F \cap E)$

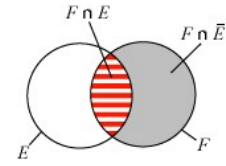
Preuve du théorème 2.5 $F \cap \bar{E}$ et $F \cap E$ sont incompatibles. En effet, $(F \cap \bar{E}) \cap (F \cap E) = \emptyset$ (voir dessin).

Par ailleurs, $(F \cap \bar{E}) \cup (F \cap E) = F$.

Donc, en vertu de l'axiome 2.3 :

$$P(F) = P((F \cap \bar{E}) \cup (F \cap E)) = P(F \cap \bar{E}) + P(F \cap E)$$

ce qui prouve le théorème 2.5.



Exercice 2.18

A, B et $A \cup B$ sont trois événements de probabilités 0.4, 0.5 et 0.6, respectivement. Calculez les probabilités des événements suivants :

Formules de de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- | | | |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|
| a. \bar{A} | b. \bar{B} | c. $A \cap B$ |
| d. $\bar{A} \cap B$ | e. $A \cap \bar{B}$ | f. $\bar{A} \cup B$ |
| g. $A \cup \bar{B}$ | h. $\bar{A} \cap \bar{B}$ | i. $\bar{A} \cup \bar{B}$ |

Vérifiez vos résultats avec $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.5. Probabilité conditionnelle

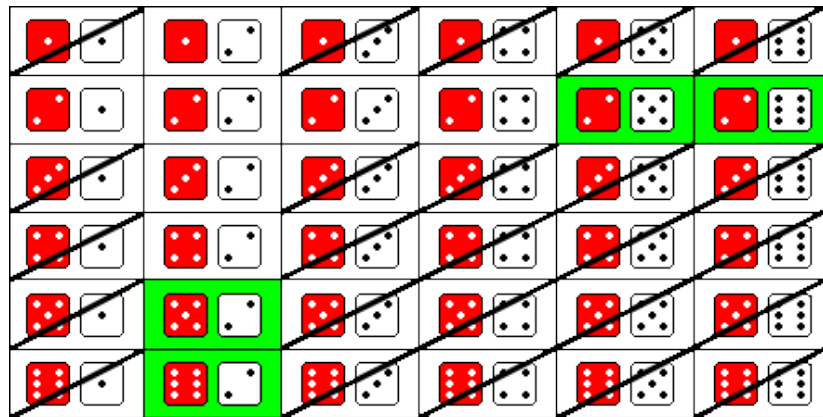
Nous noterons $P(E | F)$ cette nouvelle probabilité (probabilité conditionnelle de E , sachant que F s'est produit).

Supposons que nous attendions le résultat d'une épreuve et que nous connaissons la probabilité $P(E)$ de l'événement attendu E . Si, l'épreuve s'étant déroulée, nous recevons une information supplémentaire, par exemple que l'événement F s'est produit, ce renseignement va en général modifier la probabilité de réalisation de l'événement E .

Définition Soient E et F deux événements d'un univers Ω . Si $P(F) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de E par F le nombre noté $P(E | F)$ et tel que

$$P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Exemple On lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 6, sachant que l'un des deux dés indique un 2 ?



Résolution sans la définition Remarquons tout d'abord que toutes les 36 paires « habituelles » ne sont pas envisageables. En fait, seules 11 sont possibles. Et sur ces 11 paires, 4 ont une somme supérieure à 6. Donc $p = \frac{4}{11}$.

Résolution avec la définition On pose : E : « la somme des dés est supérieure à 6 »
 F : « un des deux dés indique un 2 ».

Donc $E \cap F$: « la somme des dés est supérieure à 6 et un des deux dés indique un 2 ».

D'après la figure ci-dessus, on voit que $P(E \cap F) = \frac{4}{36}$ et $P(F) = \frac{11}{36}$.

Remarque

Il est souvent plus facile de résoudre une probabilité conditionnelle sans la formule.

Donc, selon la formule, on obtient bien $P(E|F) = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{4}{11}$.

Exercice 2.19

Un sac contient vingt jetons ; la moitié sont noirs, les autres blancs. Cinq jetons portent en plus une marque spéciale et trois de ceux-là sont noirs.

On tire au hasard un jeton du sac. Quelle est la probabilité que ce jeton...

- a. soit noir si l'on sait qu'il porte une marque ?
- b. ne porte pas de marque si l'on sait qu'il est blanc ?

Exercice 2.20

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre un 6, sachant que les deux chiffres montrés sont différents ?

Exercice 2.21

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre un 6, sachant que la somme des deux est i ? Calculez le résultat pour toutes les valeurs possibles de i .

Exercice 2.22

Dans une petite ville, la police recherche un ivrogne. Il y a quatre chances sur cinq qu'il se trouve dans un des huit bars de la ville. Deux agents de police visitent sept des huit bars sans le trouver. Quelle est la probabilité qu'ils le trouvent dans le huitième bar ?

Exercice 2.23

On considère trois urnes. L'urne A contient 2 boules blanches et 4 rouges ; l'urne B , 8 blanches et 4 rouges ; l'urne C 1 blanche et 3 rouges. On tire une boule de chacune des urnes.

Quelle est la probabilité que la boule tirée de l'urne A soit blanche, si l'on sait que le tirage a livré 2 boules blanches exactement ?

Indication : utilisez la formule de la probabilité conditionnelle.

Exercice 2.24

On choisit au hasard une famille parmi celles qui ont deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux garçons...

- a. si l'on sait que l'un des deux au moins est un garçon ?
- b. si l'on sait que l'un des deux enfants s'appelle Ernest ?

Formule de Bayes



Thomas Bayes
(1702 - 1761)

La formule de la probabilité conditionnelle peut être écrite sous une autre forme, appelée **formule de Bayes** :

$$P(E|F) = \frac{P(F|E) \cdot P(E)}{P(F|E) \cdot P(E) + P(F|\bar{E}) \cdot P(\bar{E})}$$

Le numérateur découle de la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \Rightarrow P(F \cap E) = P(F|E) \cdot P(E)$$

Le dénominateur s'obtient ainsi :

$$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \bar{E}) = P(F|E) \cdot P(E) + P(F|\bar{E}) \cdot P(\bar{E})$$

Exemple

Un élève répond à une question à choix multiple. De deux choses l'une : soit il connaît la réponse, soit il la devine. Soit p la probabilité que l'élève connaisse la réponse et

donc $1-p$ celle qu'il la devine. On admet que l'élève qui devine répondra correctement avec probabilité $1/m$ où m est le nombre de réponses proposées. Quelle est la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question s'il y a répondu correctement ?

Soient E et F respectivement les événements « il connaît vraiment la réponse » et « l'étudiant répond correctement à la question ». Alors

$$P(E|F) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \left(\frac{1}{m}\right)(1-p)} = \frac{m \cdot p}{1 + (m-1) \cdot p}$$

En prenant par exemple $m = 5$ et $p = 0.5$, la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question sachant qu'il a répondu correctement sera ainsi de $\frac{5}{6}$.

Exercice 2.25



Une maladie atteint une personne sur mille. Il existe un test pour savoir si une personne est infectée, mais ce test n'est pas parfait : si la personne est infectée, le test sera positif dans 99 % des cas ; mais, dans 2 % des cas, le test sera positif alors que la personne est saine.

Vous venez d'être examiné et le test est positif. Quelle est la probabilité que vous soyez vraiment atteint par cette maladie ?

Exercice 2.26

Un inspecteur est convaincu à 60 % de la culpabilité d'un suspect. À ce stade de l'enquête, on découvre que le coupable est gaucher. Le suspect l'est aussi, comme 14 % de la population. Cela renforce-t-il sensiblement la conviction de l'inspecteur ?

On admet que la probabilité qu'un individu soit gaucher si on sait qu'il est non coupable est aussi de 14 %.

Exercice 2.27

Après avoir fait appel plusieurs fois, Sally Clark a été libérée lorsque des statisticiens de la *Royal Statistical Society* ont démontré que l'argument mathématique était totalement faux, et qu'il est apparu que les médecins avaient caché le fait que Harry montrait des signes d'infection généralisée pouvant expliquer sa mort.

En décembre 1996, un enfant âgé de deux ans et demi meurt alors que sa mère, Sally Clark, était seule dans la maison avec lui. En janvier 1998, son second fils Harry meurt également à l'âge de deux mois, dans des circonstances similaires.

Le verdict de la cour a été le suivant. La fréquence de la mort subite est de 1 enfant sur 8500. En conséquence, il y a une chance sur 73 millions que Sally Clark soit innocente. Elle est donc jugée coupable au-delà du doute raisonnable.

Sachant que le taux de meurtre d'enfants par l'un de leur parent durant leur première année est de 1 sur 90'000, que pensez-vous de ce verdict ?

Pour en savoir plus : *Raisonnez probabilités sans vous faire piéger*, par Pierre Spagnou, § 4.8 La mort subite ou https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Affaire_Sally_Clark.pdf

Exercice 2.28



Une personne a été attaquée de nuit dans la rue. Elle prétend que son agresseur est noir. Or, il est établi que, dans de telles circonstances, la victime perçoit correctement la couleur de peau de son agresseur 8 fois sur 10.

De plus, la région est peuplée de 90 % de blancs et de 10 % de noirs, et le taux de criminalité est le même pour les deux communautés.

Quelle est la probabilité que l'agresseur soit effectivement une personne de couleur ?

2.6. Événements indépendants

Occurrence : apparition, réalisation

Deux événements E et F sont indépendants l'un de l'autre si l'occurrence de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de l'autre. Par exemple, le jet d'un dé n'a pas d'influence sur le jet d'un autre (sauf s'ils sont collés, magnétisés, etc.).

De la formule de la probabilité conditionnelle donnée au § 2.5, on sait que $P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$. Si les deux événements E et F sont indépendants, alors $P(E|F) = P(E)$, donc $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.

Définition On dit que deux événements E et F sont **indépendants** si $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont **dépendants**.

Exercice 2.29

On jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « Le même côté sort deux fois. »

B : « Le nombre de côtés face est inférieur à deux. »

Exercice 2.30

On tire au hasard une carte d'un paquet de 52 cartes à jouer ordinaires. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « La carte tirée est un as. »

B : « La carte tirée est un pique. »

Exercice 2.31

Je vais lancer une pièce de monnaie équilibrée pour la quatrième fois. Les trois premières fois j'ai obtenu pile. Quelle est la probabilité que j'obtienne pile encore cette fois ?

Exercice 2.32

Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5.

Questions **a - d** :
voir exercice 2.18

Quelle probabilité y a-t-il...

- que la première salle soit libre ?
 - que les deux salles soient libres ?
 - que l'une des deux salles au moins soit libre ?
 - qu'une seule salle soit libre ?
 - que la seconde salle soit libre si l'on sait que la première est occupée ?
- f.** Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?
- A : « La première salle est occupée ».
- B : « La seconde salle est occupée ».

Exercice 2.33*

Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.

Julie étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible.

Un couple de caméléons daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

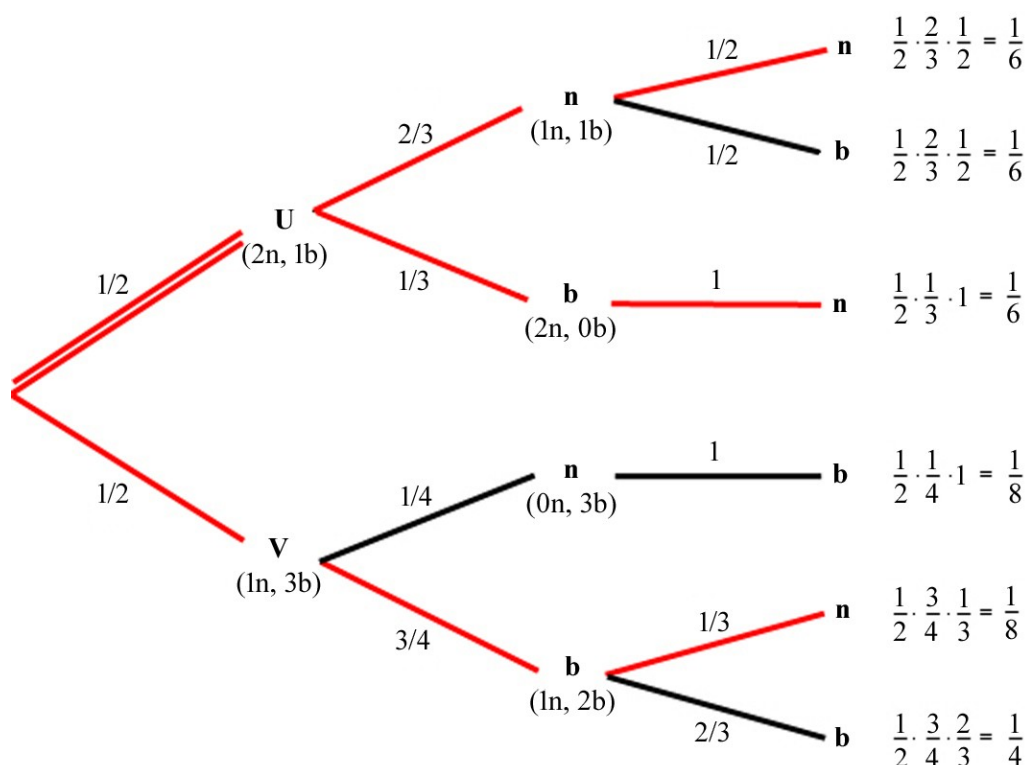
- Calculez la probabilité qu'ils soient de la même couleur.
- Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?
- Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculez la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

2.7. Épreuves successives

Dans de nombreuses applications, une épreuve globale se compose de n épreuves partielles successives.

Exemple On a deux urnes U et V extérieurement identiques. U contient 2 boules noires et 1 blanche, V contient 1 noire et 3 blanches. On choisit d'abord une des deux urnes au hasard, puis on extrait d'elle successivement 2 boules (sans remettre la première dans l'urne).

L'arbre ci-dessous représente cette suite d'opérations, avec les probabilités associées :



La probabilité d'un chemin est égale au **produit des probabilités** des branches qui forment ce chemin. En effet, d'après la formule de probabilité conditionnelle :

$$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F).$$

On remarquera que dans un arbre deux chemins sont toujours incompatibles. Pour calculer la probabilité d'un événement qui est la réunion de plusieurs chemins, on **additionne** les probabilités de ces chemins (voir théorème 2.4).

Les questions suivantes se résolvent aisément à l'aide de l'arbre :

Ce sont les trois chemins rouges dans le dessin ci-dessus.

- a. Quelle probabilité a-t-on de tirer en dernier une boule noire ?

$$\begin{aligned} P((- , - , n) &= P((U, n, n) \cup (U, b, n) \cup (V, b, n)) = \\ &= P((U, n, n)) + P((U, b, n)) + P((V, b, n)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24} \end{aligned}$$

- b. Quelle probabilité a-t-on de tirer deux boules de même couleur ?

$$P((- , n, n) \cup (- , b, b)) = P((U, n, n) \cup (V, b, b)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

- c. Quelle probabilité a-t-on de tirer une boule noire en dernier si l'on sait que la première était blanche ?

$$P((- , -, n) | (- , b, -)) = \frac{P((- , b, n))}{P((- , b, -))} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{8}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}} = \frac{7}{13}$$

Les questions c et d sont des probabilités conditionnelles.

- d. Quelle probabilité a-t-on d'avoir choisi l'urne U si la seconde boule tirée est noire ?

$$P((U, -, -) | (- , -, n)) = \frac{P((U, -, n))}{P((- , -, n))} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \frac{8}{11}$$

Exercice 2.34

Me voici sur une plage isolée d'Hawaï. J'ai l'intention d'y prendre un vrai bain de vagues, c'est-à-dire passer les brisants, nager tranquillement au large puis rentrer en me faisant ramener par une vague. Mais on me le déconseille fortement. Les vagues sont en effet ici colossalement fortes et charrient 2 mètres d'écumes environ. Aussi, 1 bon nageur sur 5 ne réussit pas à franchir les brisants et revient directement sur la plage. Quand on nage tranquillement au large, les requins vous dévorent 1 fois sur 4. Puis la probabilité de se noyer dans l'écume en suivant une vague au retour est de 40 %. Pour finir, 3 personnes sur 20 parmi les rescapés apparents de ce bain s'effondrent terrassés par une crise cardiaque en arrivant sur le sable.

Quelle est donc la probabilité, si je me lance malgré tout en mer...

- de me noyer ?
- de revenir vivant à l'hôtel ?
- de revenir vivant à l'hôtel après avoir passé les brisants ?

Épreuves successives indépendantes

Lorsqu'une épreuve globale est formée d'une succession d'épreuves **indépendantes** les unes des autres (par exemple lancer un dé plusieurs fois de suite), le problème se simplifie considérablement. En effet, si A , B et C sont trois événements relatifs à trois épreuves successives indépendantes, on aura :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Exemple On lance un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir la suite 2, 5, 3 ?

La réponse est simplement $P((2, 5, 3)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Exercice 2.35

On lance un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité que ni le 3 ni le 5 n'apparaissent ?

Exercice 2.36

On atteint une cible 3 fois sur 10. Combien de fois, au minimum, faut-il tirer pour avoir plus de 99 chances sur 100 de toucher la cible au moins une fois ?

Exercice 2.37

voir ex 1.23

Vous participez 100 fois par an au tirage du « Swiss Lotto ». Chaque fois, vous cochez 6 numéros sur une grille de 45 numéros. Vous gagnez le gros lot si vous avez coché les 6 numéros tirés au sort.

- Quelles sont vos chances de gagner le gros lot au moins une fois si vous persévérez à ce rythme pendant cinquante ans ?
- À ce rythme, combien d'années devriez-vous jouer pour avoir plus d'une chance sur deux de gagner le gros lot au moins une fois ?

Exercice 2.38

Cette politique de « surréservation » (overbooking) est très courante parmi les compagnies d'aviation.

Un guide dispose d'un minicar à 10 places pour faire visiter Paris. Avec le temps, il a remarqué qu'une personne qui a réservé une place annule sa réservation 1 fois sur 5. Il décide donc de toujours louer 11 places.

Quel est le nombre approximatif de jours dans l'année où le guide devra renvoyer un de ses clients par manque de place, en supposant qu'il travaille 250 jours par an ?

Exercice 2.39

Problème du Chevalier de Méré (posé à Blaise **Pascal** en 1654).

Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 2.40

Quand je plante une capucine, elle fleurit 1 fois sur 4.

Combien de capucines (au minimum) dois-je planter pour avoir plus de 3 chances sur 4 d'en voir au moins une fleurir ?

Exercice 2.41

Koh-Lanta
Le totem maudit
mai 2022

Sur Koh-Lanta, deux ambassadeurs (Louana et Colin) se concertent pour éliminer un de leurs camarades ou bien participer à un tirage au sort qui se déroulera ainsi :

- Louana a dans son sac une boule noire (perdante) et une boule blanche ;
- victime d'une malédiction, Colin a dans son sac à lui 2 boules noires et une boule blanche ;
- chaque ambassadeur tire une boule dans son sac ;
- si chacun tire une boule de la même couleur, on recommence le tirage.

- a. Quelle est la probabilité que Colin soit éliminé ? Et Louana ?
- b. Quelle est la probabilité qu'il faille moins de 5 tirages au sort pour éliminer un des deux ambassadeurs ?

Exercice 2.42

On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 36 cartes. Le jeu ayant été brassé convenablement, quelle probabilité a-t-on de tirer...

- a. dans l'ordre : as ♠, as ♣, as ♦, as ♥ ?
- b. les quatre as ?
- c. les quatre as sachant que les deux premières cartes tirées étaient des as ?
- d. exactement un as ?
- e. au moins un as ?
- f. un as au moins sachant que la première carte tirée n'était pas un as ?

Exercice 2.43

Deux urnes U et V contiennent respectivement :

U : 3 boules rouges, 2 boules bleues

V : 1 boule rouge, 1 boule bleue

On enlève une boule de U puis l'on met les boules restantes dans V. On tire alors une boule de V. Calculez la probabilité...

- a. que cette boule soit rouge
- b. que cette boule soit rouge si l'on sait que la première boule tirée était rouge
- c. que la première boule tirée ait été rouge si au second tirage on a une boule rouge.

Exercice 2.44

Un tricheur professionnel garde dans sa poche 2 pièces, l'une normale et l'autre ayant ses deux faces identiques, disons deux fois pile. Il en prend une au hasard et la lance ; elle montre pile.

- a. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la pièce normale ?
- b. Il jette la pièce une seconde fois et elle montre à nouveau pile. Même question.

Exercice 2.45

Combien faut-il rencontrer de personnes pour avoir plus d'une chance sur deux de trouver quelqu'un qui est né le même jour que soi (par exemple le 3 juillet, peu importe l'année) ?

Attention ! Cet exercice ressemble beaucoup au 2.14, mais le résultat est, comme vous le verrez, très différent.

2.8. La loi binomiale

Schéma Une urne contient N boules, dont R sont rouges. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, puis **on la remet dans l'urne**. On répète cette épreuve n fois de suite.

La probabilité de tirer k boules rouges est égale à :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}, \text{ avec } p = \frac{R}{N}$$

Cette loi s'utilise lorsqu'il n'y a que **deux issues possibles** à l'épreuve : **succès** (boule rouge) ou **échec** (boule pas rouge) et que l'on s'intéresse au nombre de succès possibles (k) sur un total de n épreuves.

p est la probabilité de tirer une boule rouge lors d'un tirage (succès).

p ne varie pas au cours du temps.

$1-p$ est la probabilité d'échec.

k est le nombre de succès.

$n-k$ est le nombre d'échecs.

Exemple On lance un dé équilibré 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir respectivement 1, 2, 3, 4 fois « 6 » ?

$$P(1 \text{ fois « 6 »}) = C_1^{20} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{19} \approx 0.104$$

$$P(2 \text{ fois « 6 »}) = C_2^{20} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \approx 0.198$$

$$P(3 \text{ fois « 6 »}) = C_3^{20} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 0.238$$

$$P(4 \text{ fois « 6 »}) = C_4^{20} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \approx 0.202$$

Exercice 2.46

Quand $p = 1/2$, les calculs se simplifient beaucoup, car $p = 1-p$.

On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

- 8 fois face ?
- 9 fois face ?
- 10 fois face ?
- plus de 7 fois et moins de 13 fois face ?
- moins de 4 fois face ?

Exercice 2.47

On admet qu'un trait physique (telle la couleur des yeux ou le fait d'être gaucher) est déterminé par une paire de gènes. On désignera par d le gène de la paire qui est dominant, et par r celui qui est récessif. Une personne portant dd sera ainsi à dominance pure, une autre portant rr sera à caractère récessif pur, alors que rd entraînera une dominance hybride. Les dominances pures et hybrides ne se distinguent pas extérieurement. Un enfant recevra un gène de chacun de ses parents.

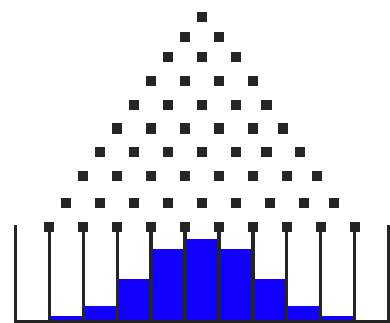
Si, pour un trait particulier, les deux parents sont hybrides et s'ils ont 4 enfants, quelle est la probabilité que 3 de ceux-ci manifestent extérieurement le trait dominant ?

Exercice 2.48*

La planche de Galton

Des billes tombent verticalement sur un assemblage de clous placés en quinconce sur des lignes horizontales et équidistants de leurs voisins immédiats (voir dessin ci-contre). Le diamètre des billes est égal à la distance entre les clous. Chaque fois qu'une bille tape un clou, elle a la même probabilité ($p = 0.5$) de continuer sa chute à gauche ou à droite.

En bas du crible se trouvent des compartiments dans lesquels tombent les billes. Si nous réalisons l'expérience un grand nombre de fois, les billes viennent s'accumuler dans les compartiments et forment ainsi un histogramme. La hauteur d'un bâton de l'histogramme est proportionnelle au nombre de billes s'y trouvant.



- Déterminez l'histogramme théorique du crible de Galton ci-dessus. On laisse tomber 1024 billes (cela simplifie les calculs).
- Même question si la probabilité que la bille tombe à droite d'un clou est $p = 0.25$. Dessinez la répartition obtenue et comparez-la avec l'histogramme du point a.

Exercice 2.49

Dans une école, il y a 10 % de gauchers. Calculez la probabilité d'avoir au moins 4 gauchers dans une classe de 20 élèves.

Exercice 2.50

Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90 % des cas. On lui soumet 20 échantillons d'écriture.

On accepte son affirmation s'il réussit à identifier au moins 15 fois le sexe correct. Dans le cas contraire, on rejette son affirmation. Quelle est la probabilité...

- que l'on accepte son affirmation alors qu'il répond au hasard ?
- que l'on rejette son affirmation alors qu'elle est fondée ?

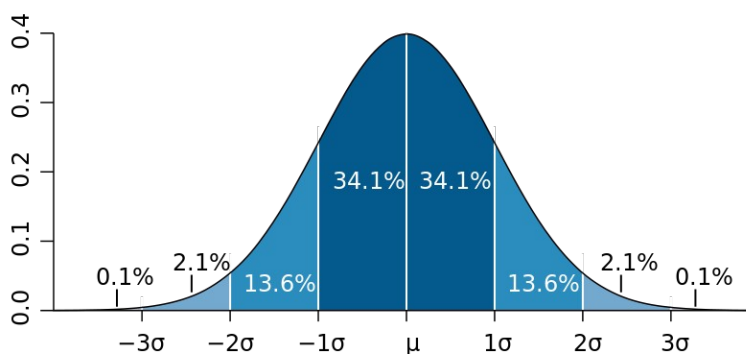
Exercice 2.51

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On y tire au hasard 3 boules une par une, d'abord en les remettant chaque fois dans l'urne (méthode 1), puis sans les y remettre (méthode 2). Avec quelle méthode a-t-on le plus de chances de tirer ainsi une boule blanche et 2 boules noires (l'ordre d'apparition n'a pas d'importance) ?

Affaire Castaneda contre Partida**Attendu de la Cour Suprême des États-Unis (affaire Castaneda contre Partida)**

Un accusé d'origine mexicaine, condamné pour cambriolage et tentative de viol dans un comté du sud du Texas attaqua le jugement sous le motif que la désignation des jurés dans l'État du Texas était discriminatoire pour les Américains d'origine mexicaine. Son argument était que ceux-ci n'étaient pas suffisamment représentés dans les jurys populaires.

« Si les jurés étaient tirés au hasard dans l'ensemble de la population, le nombre d'américains mexicains dans l'échantillon pourrait être modélisé par une distribution binomiale... Étant donné que 79.1 % de la population est mexico-américaine, le nombre attendu d'américains mexicains parmi les 870 personnes convoquées en tant que grands jurés pendant la période de 11 ans est approximativement 688. Le nombre observé est 339. Bien sûr, dans n'importe quel tirage considéré, une certaine fluctuation par rapport au nombre attendu est prévisible. Le point essentiel cependant, est que le modèle statistique montre que les résultats d'un tirage au sort tombent vraisemblablement dans le voisinage de la valeur attendue...



La mesure des fluctuations prévues par rapport à la valeur attendue est l'écart-type, défini pour la **distribution binomiale** comme la racine carrée de la taille de l'échantillon (ici 870) multiplié par la probabilité de sélectionner un américain mexicain (ici 0.791) et par la probabilité de sélectionner un non américain mexicain (ici 0.209)... Ainsi, dans ce cas, l'écart-type est approximativement de 12. En règle générale, pour de si grands échantillons, si la différence entre la valeur attendue et le nombre observé est plus grande que deux ou trois écarts-types, alors l'hypothèse que le tirage du jury était fait au hasard serait suspecte à un spécialiste des sciences humaines. Les données sur 11 années reflètent ici une différence d'environ 29 écarts-types. Un calcul détaillé révèle qu'un éloignement aussi important de la valeur attendue se produirait avec moins d'une chance sur 10^{140} ».

Source : *Prove It with Figures (Statistics for Social Science and Behavioral Sciences)*, par Hans Zeisel et David Kaye, Springer (2006).

2.9. La loi multinomiale

Il s'agit d'un tirage **avec remise** dans une urne.

Une urne contient des boules de k couleurs différentes r_k . On note p_j la proportion des boules de couleur r_j . On effectue n tirages avec remise.

Considérons une expérience aléatoire avec k résultats possibles, disons les résultats r_1, r_2, \dots, r_k .

La probabilité du résultat r_j sera notée p_j . On a donc $0 \leq p_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^k p_j = 1$.

Maintenant, considérons n répétitions indépendantes de cette expérience aléatoire. La probabilité d'obtenir n_1 fois le résultat r_1 , n_2 fois le résultat r_2 , ..., et n_k fois le résultat r_k est donné par la formule :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$$

avec $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Exercice 2.52

Une urne contient 10 boules rouges, 15 bleues, 3 jaunes et 8 vertes. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve dix fois de suite.

Quelle est la probabilité d'avoir noté 3 boules rouges, 4 bleues, 1 jaune et 2 vertes ?

Exercice 2.53

On lance un dé équilibré 24 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

- 5 six et 5 cinq ?
- 9 six et 12 nombres impairs ?
- les 6 chiffres 4 fois ?

Exercice 2.54

On « alourdit » un dé pour que le 6 apparaisse 30 % du temps, pour que le 1 apparaisse 10 % du temps, et pour que chacune des autres faces apparaisse 15 % du temps. On jette le dé six fois. Calculez la probabilité que...

- chaque face apparaisse une fois ;
- les faces 4, 5 et 6 apparaissent chacune deux fois.

2.10. Exercices récapitulatifs

Exercice 2.55



Quatre amis pêcheurs ont mélangé leurs bottes avant d'aller se coucher. René se lève toujours le premier et prend deux bottes au hasard dans l'obscurité pour ne pas réveiller ses camarades, puis il sort de la chambre.

1. (a) Calculez la probabilité des événements suivants :

- A : Ces deux bottes sont les siennes.
- B : Il a pris une botte gauche et une botte droite.
- C : Il a pris deux bottes droites.
- D : Une botte appartient à René et l'autre pas.
- E : Ces deux bottes appartiennent à des pêcheurs différents.

(b) Sachant que René a pris une botte gauche et une botte droite, quelle est la probabilité que ces bottes soient les siennes ?

2. Chaque jour, c'est la même histoire : les bottes sont mélangées et René prend deux bottes au hasard dans l'obscurité.

2.1. Cela va durer 10 jours. Calculez la probabilité des événements suivants :

- F : René prendra au moins une fois ses deux bottes.
- G : René prendra exactement 3 fois ses deux bottes.
- H : René prendra 1 fois ses deux bottes, 4 fois une seule de ses bottes et 5 fois aucune de ses bottes.

2.2. Combien de jours devraient durer la partie de pêche pour que René soit sûr à plus de 95 % de prendre au moins une fois ses deux bottes ?

3. Suite aux remontrances de ses amis, René procède désormais autrement : il prend d'abord quatre bottes, puis sort de la chambre. Dans le couloir, à la lumière, il regarde ce qu'il a pris, puis il chausse la ou les bottes qui lui appartiennent. S'il n'a pas ses deux bottes aux pieds, il retourne dans la chambre et prend encore deux bottes parmi les quatre restantes dans l'obscurité, puis il retourne dans le couloir à la lumière.
- Quelle est la probabilité qu'après son petit manège il ait trouvé ses deux bottes ?

Exercice 2.56



Lors d'un test d'adresse, on dispose de 3 carreaux pour tirer à l'arbalète sur une cible. On réussit le test (et on arrête de tirer) dès qu'un carreau a atteint le centre de la cible ou que deux carreaux ont touché la cible. On estime la probabilité de toucher le centre de la cible à 0.25, alors que la probabilité d'atteindre la cible ailleurs qu'au centre est estimée à 0.5 (la probabilité de rater la cible est donc estimée à 0.25).

- Quelle est la probabilité de réussir le test ?
- Sachant qu'on a réussi le test, quelle est la probabilité qu'un seul carreau ait touché la cible ?
- Trois personnes pour lesquelles on estime les probabilités comme ci-dessus se présentent au test. Quelle est la probabilité...
 - qu'aucune d'entre elles ne le réussisse ?
 - qu'au moins l'une d'entre elles ne le réussisse pas ?

Exercice 2.57

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

On lance des fléchettes les yeux bandés sur la cible ci-contre. On suppose qu'on atteint chaque case de la cible avec la même probabilité et qu'on ne rate jamais la cible.

- On lance une fléchette :
 - Quelle est la probabilité des événements suivants :
 - A : toucher une case grise ;
 - B : toucher une case grise ayant un numéro inférieur ou égal à 6 ;
 - C : toucher une case grise ou un numéro inférieur ou égal à 6 ;
 - D : toucher une case grise sachant qu'un nombre premier y est inscrit.
 - Soit l'événement E : « toucher un numéro impair ». Les événements A et E sont-ils indépendants ? Justifiez.
- On lance trois fléchettes :
 - Si la somme des trois nombres touchés est 8, quelle est la probabilité d'avoir touché trois fois une case blanche ?
 - La première fléchette touche une case grise, la deuxième un nombre impair, la troisième un nombre premier. Quelle est la probabilité d'avoir touché trois fois le même nombre ?
- On lance dix fléchettes. Quelle est la probabilité qu'on ait touché exactement cinq nombres impairs ?
- Combien de fléchettes devra-t-on lancer pour être sûr à plus de 95 % d'avoir touché au moins une fois le numéro 3 ?
- Après avoir lancé une fléchette, on peint en rouge la case touchée. On va lancer trois fléchettes. Quelle est la probabilité de peindre exactement deux cases en rouge ?

Rappel :

1 n'est pas un nombre premier

Variante plus difficile

Refaites l'exercice en supposant que les quatre cases centrales sont atteintes avec une probabilité de $1/10$ et celles du bord avec une probabilité de $1/20$.

2.11. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les axiomes	<input type="checkbox"/> ok
Connaître les théorèmes	<input type="checkbox"/> ok
Reconnaître et calculer les probabilités conditionnelles	<input type="checkbox"/> ok
Reconnaître deux événements indépendants	<input type="checkbox"/> ok
Savoir faire un arbre pour résoudre un problème d'épreuves successives	<input type="checkbox"/> ok
Maîtriser la loi binomiale	<input type="checkbox"/> ok
Maîtriser la loi multinomiale	<input type="checkbox"/> ok