Probabilités

Didier Müller, juin 2020

www.apprendre-en-ligne.net

Table des matières

1. Dénombrement

Analyse combinatoire est un synonyme de dénombrement.

Le **dénombrement** s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis.
Il est né de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développé sous l'influence du calcul des probabilités. Il est par ailleurs lié à la théorie des nombres et à la théorie des graphes.

1.1. Deux principes fondamentaux du dénombrement

Principe des tiroirs

« Si vous disposez d'une commode avec 10 tiroirs et que vous devez ranger 11 pantalons, alors au moins un des tiroirs contiendra au moins 2 pantalons. »

Plus généralement, si vous avez n « tiroirs » à disposition pour y ranger $n+k$ « objets », alors certains « tiroirs » contiendront plus d'un « objet ».

Un exemple simple Dans un village de 400 habitants, peut-on toujours trouver deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

Solution
Ici, les tiroirs représentent les jours de l'année et les objets les habitants. Seuls 366 habitants peuvent avoir des dates de naissance différentes.

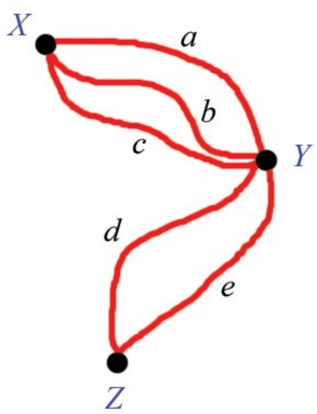
Un exemple plus subtil On jette 51 miettes sur une table carrée de 1 m de côté. Montrez qu'il y a toujours au moins un triangle formé de 3 miettes dont l'aire vaut au plus 200 cm^2.

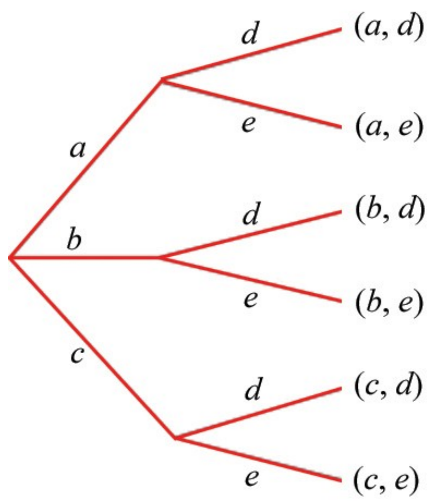
Solution
On partage la table en 5 x 5 = 25 carrés de 20 cm de côté ; comme il y a 51 miettes, il existe au moins 1 carré qui contient 3 miettes. Le triangle formé par ces 3 miettes a une aire au plus égale à la moitié de l'aire du carré dans lequel il est inscrit, soit 200 cm^2.

Principe de décomposition

Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1, n_2, ..., n_k manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ manières différentes.

Exemple Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e). Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?





Il y a 6 (= 3·2) trajets possibles : (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e).

1.2. Exercices d'échauffement

Exercice 1.1

À la fin d'une réunion d'anciens élèves, tout le monde se serre la main. S'il y a n personnes à la fête, combien de poignées de mains sont échangées ?

Exercice 1.2

Combien de diagonales contient un polygone convexe à n côtés (une diagonale relie deux sommets non adjacents) ?

Exercice 1.3

Le jeu « Tantrix » est composé de tuiles hexagonales sur lesquelles sont dessinés des rubans comme le montre le dessin ci-dessous. Un ruban part du milieu d'un côté pour aller vers le milieu d'un autre côté. Il y a quatre couleurs en tout, mais sur chaque tuile ne figurent que trois rubans de couleurs différentes.

Indication
Résolvez d'abord le problème avec trois couleurs puis réfléchissez comment passer à quatre couleurs.
Attention aux doublons obtenus par rotation !

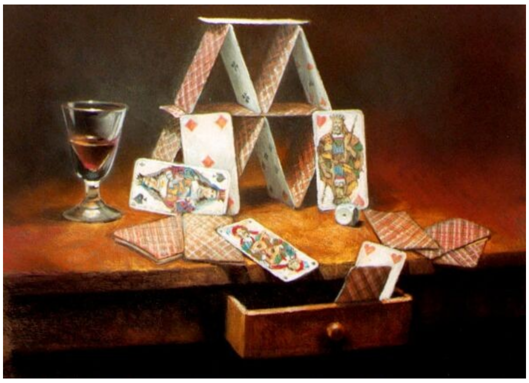
De combien de tuiles différentes est composé un jeu complet ?

Exercice 1.4*

Vous voulez construire un château de cartes avec…

a. un jeu de 52 cartes.
b. dix jeux de 52 cartes.

Combien d'étages aura votre château ? Le château doit être complet (en forme de triangle). Il est possible que l'on n'utilise pas toutes les cartes.



Château de cartes et jeux amoureux, par Patrick Martin
www.patrick-martin.com

Exercice 1.5

Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonne et voyelle peut-on former…

a. si la première lettre est une consonne ?
b. si la première lettre est une voyelle ?

Par « mot », on entend ici une suite de lettres, pas un mot du dictionnaire.

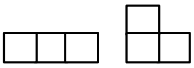
Traitez deux cas : 1) on peut utiliser plusieurs fois la même lettre ;
2) on ne peut pas utiliser plusieurs fois la même lettre.

Exercice 1.6

Un de vos amis hongrois vous a dit un jour ceci : « En Hongrie, il y a 10 millions d'habitants. 78% des Hongrois ont un téléphone portable. Je suis sûr de trouver en Hongrie au moins trois personnes qui sont nées le même jour et qui ont le même code PIN (code de 4 chiffres protégeant la carte SIM). » Votre ami a-t-il raison ?

Exercice 1.7

Les deux triminos :



Les polyminos ont été étudiés par les Anglais **Dudeney** et **Dawson** au début du XX^e^ siècle. Ils doivent leur popularisation, à partir des années cinquante, à Solomon W. **Golomb**, et sont devenus aujourd'hui un thème classique des récréations mathématiques. Les polyminos sont des assemblages de carrés de même taille par un de leurs côtés. Deux carrés s'assemblent en un domino, trois carré en un trimino (il n'y a que deux configurations possibles : le « bâton » et le « trimino en L »), quatre carrés en un tétramino (vous connaissez le jeu « Tétris » ?), cinq carrés en un pentamino, etc.
Combien y a-t-il de pentaminos différents (attention aux rotations et aux symétries axiales) ?

1.3. Permutations simples

Définition

Tout classement **ordonné** de n éléments distincts est une **permutation** de ces n éléments. Par exemple *aebcd* est une permutation des éléments *a, b, c, d, e*.

Nombre de permutations simples

Le nombre de permutations de n éléments peut être calculé de la façon suivante : il y a n places possibles pour un premier élément, $n-1$ pour un deuxième élément, ..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant. On peut représenter toutes les permutations possibles sur un arbre.
On remarque facilement alors qu'il y a $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ permutations possibles.

n! se lit « n factorielle ».

On note $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ Par convention, $0! = 1$.

Il y a donc $n!$ permutations de n éléments distincts.

$$P_n = n!$$

Voici les 4! = 24 permutations de 4 éléments distincts a, b, c, d :

abcd	abdc	acbd	acdb	adbc	adcb	bacd	badc
bcad	bcda	bdac	bdca	cabd	cadb	cbad	cbda
cdab	cdba	dabc	dacb	dbac	dbca	dcab	dcba

Questions classiques

De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?
Réponse : 10! = 3'628'800

De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?
Réponse : $36! \cong 3.72\cdot 10^{41}$

Remarque sur la fonction factorielle

La fonction factorielle croît extrêmement vite. Elle est tellement rapide que la plupart des calculatrices courantes ne peuvent pas calculer au-delà de 69!.

Pourquoi 69 ?

Pour calculer 70! et au-delà (tout en restant raisonnable), vous pouvez utiliser un logiciel puissant comme *Wolfram alpha* ou le langage *Python.*

Notation cyclique

Soit la permutation de nombres : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Cette permutation peut être écrite en **notation cyclique** :

$$(2\ 4\ 5)\ (1\ 3)\ (6)$$

Cela signifie que 2 est remplacé par 4, 4 par 5, 5 par 2 ; 1 est remplacé par 3 et 3 par 1 ; 6 est remplacé par 6.

Exercice 1.8

Soient les nombres entiers de 1 à 9 classés par ordre croissant.

Questions subsidiaires
Vérifiez qu'il y a 144 possibilités d'écrire la notation cyclique du points **a.**

Comment maximiser le nombre de permutations nécessaires pour revenir au point de départ ?

a. À quelle permutation correspond la notation cyclique (1 4 6 3)(2 9 7)(5 8) ?

b. Écrivez en notation cyclique la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 8 & 2 & 6 & 4 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

c. Combien de fois faut-il appliquer la permutation du point **a.** pour retrouver la séquence 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?

d. Combien de fois faut-il appliquer la permutation du point **b.** pour retrouver la séquence 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?

Nombre d'inversions

Le **nombre d'inversions** dénombre combien de fois un nombre plus grand se rencontre avant un plus petit dans la suite $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Si le nombre d'inversions est pair, la permutation est dite **paire** ; dans le cas contraire, elle est **impaire**.

Exemple

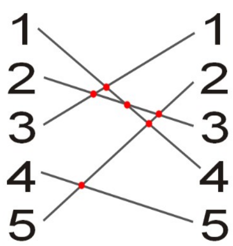
La permutation 4 3 1 5 2 comporte six inversions : 4 est avant 1, 2 et 3, 3 est avant 1 et 2, et enfin 5 est avant 2. Cette permutation est donc paire.

Méthode graphique

Il ne faut pas que plus de deux lignes se croisent au même point...

On peut aussi trouver le nombre d'inversions à l'aide d'un dessin. On met sur deux colonnes les n nombres de la permutation, puis on relie le chiffre de gauche qui a été remplacé par l'élément de droite. Le nombre d'inversions correspond au nombre d'intersections de lignes.

Voici un exemple avec la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.



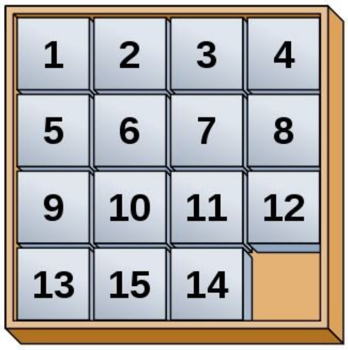
Il y bien 6 intersections qui correspondent aux 6 inversions que l'on avait déjà calculées.

Exercice 1.9*

Samuel **Loyd** (1841-1911), l'inventeur du taquin (voir ci-contre), avait inversé l'ordre des pièces 14 et 15, et lancé le défi de reconstituer l'ordre naturel des petits carrés en les faisant coulisser.

Personne n'a réussi à remettre les pièces en place. Et pour cause : c'est impossible !

Pourrez-vous le démontrer ? *Indication :* c'est une question de parité...



1.4. Permutations avec répétitions

Nombre de permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.
Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \leq n$), chacun d'eux apparaissant $n_1, n_2, \ldots, n_k$ fois, avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ et $n_i \geq 1$, on a :

La barre sur le P signifie « avec répétitions ».

$$\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

En effet, si chacune des n_i places occupées par des éléments identiques ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) était occupée par des éléments différents, le nombre de permutations serait alors à multiplier par n_i !, d'où :

$$\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k) \cdot n_1!\, n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! = n!$$

Les $\frac{5!}{2!1!2!}$ permutations des 5 éléments a, a, b, c, c :

aabcc	aacbc	aaccb	abacc	abcac	abcca	acabc	acacb	acbac	acbca
accab	accba	baacc	bacac	bacca	bcaac	bcaca	bccaa	caabc	caacb
cabac	cabca	cacab	cacba	cbaac	cbaca	cbcaa	ccaab	ccaba	ccbaa

Question classique Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot « excellence » ?

Réponse : $\frac{10!}{4!1!2!2!1!}$ = 37'800

1.5. Arrangements simples

Définition Un **arrangement** est une collection de p objets pris successivement parmi n **en tenant compte de l'ordre d'apparition**. Il est dit **simple** si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Nombre d'arrangements simples Le nombre d'arrangements de p éléments distincts choisis parmi n est noté A_p^n (dans certains livres, p et n sont inversés).
Le premier élément peut être choisi parmi n, le deuxième parmi n–1, le troisième parmi n–2 et le p-ième élément parmi n–p+1. D'où :

$$A_p^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Les 4·3·2 = 24 arrangements de 3 éléments choisis parmi a, b, c, d :

abc	abd	acb	acd	adb	adc	bac	bad	bca	bcd	bda	bdc
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb	dab	dac	dba	dbc	dca	dcb

Questions classiques Après les prolongations d'un match de football, l'entraîneur doit choisir les 5 tireurs de penaltys parmi les onze joueurs et l'ordre de passage. Combien de choix a-t-il ?

Réponse : A_5^{11} = 55'440

Le *bingo* est un jeu où les nombres tirés sont annoncés les uns à la suite des autres. S'il y a 90 numéros en tout dans un sac, combien de suites différentes peut-on former avec les 10 premiers numéros tirés ?

Réponse : $A_{10}^{90} \cong 2.076 \cdot 10^{19}$

1.6. Arrangements avec répétitions

Nombre d'arrangements avec répétitions Le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi n avec répétitions possibles est noté $\overline{A}_p^n$. Si les répétitions sont permises, alors tous les éléments peuvent prendre n valeurs. On a donc, d'après le principe de décomposition :

$$\overline{A}_p^n = n^p$$

Les 3^2 = 9 arrangements avec répétitions de 2 éléments choisis parmi a, b, c :

aa ab ac ba bb bc ca cb cc

Questions classiques Combien de numéros de téléphone composés de 7 chiffres existe-t-il ?

Réponse : $\overline{A}_7^{10} = 10^7$

On a 6 clochettes produisant chacune un son différent des autres. On veut faire une mélodie de 10 notes avec ces clochettes. Combien de possibilités a-t-on ?

Réponse : $\overline{A}_{10}^6 = 6^{10}$ = 60'466'176

1.7. Combinaisons simples

Définition

Une **combinaison** est une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc **sans tenir compte de l'ordre d'apparition**. Elle est dite **simple** si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Nombre de combinaisons simples

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté C_p^n.
Si l'on permute les éléments de chaque combinaison simple, on obtient tous les arrangements simples. Il y a donc p! fois plus d'arrangements que de combinaisons, ce qui s'écrit :

$$A_p^n = p!\,C_p^n$$

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est donc :

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les $\frac{3!}{2!1!} = 3$ combinaisons de 2 éléments choisis parmi a, b, c : ab ac bc.

Questions classiques

Au jass, on reçoit 9 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien de mains différentes y a-t-il ?
Réponse : $C_9^{36} = 94'143'280$

Un joueur choisit entre 1 et 20 numéros et marque une feuille de Keno, qui en contient 80 (de 1 à 80). Le casino tire alors 20 nombres au hasard. Combien de grilles différentes de Keno existe-t-il ?
Réponse : $C_{20}^{80} \cong 3.535 \cdot 10^{18}$

1.8. Combinaisons avec répétitions

Nombre de combinaisons avec répétitions

Si les répétitions sont permises, le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté $\overline{C}_p^n$.
La démonstration de la formule est un peu compliquée. Comme les combinaisons avec répétitions sont peu fréquentes, nous donnerons la formule sans commentaire :

$$\overline{C}_p^n = C_p^{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}$$

Les $\frac{(4+2-1)!}{(4-1)!2!} = 10$ combinaisons avec répétitions de 2 lettres choisies parmi a, b, c, d sont :

aa ab ac ad bb bc bd cc cd dd

Questions classiques

Combien y a-t-il de dominos avec 10 symboles différents ?
Réponse : $\overline{C}_2^{10} = C_2^{10+2-1} = C_2^{11} = \frac{11!}{9!2!} = 55$

Pour la Saint-Valentin, vous voulez offrir un bouquet de 5 roses à votre fiancée. La fleuriste a 8 sortes de roses.
Combien de bouquets différents peut-elle composer ?
Réponse : $\overline{C}_5^8 = C_5^{8+5-1} = C_5^{12} = \frac{12!}{7!5!} = 792$

1.9. Exercices

Pour tous ces exercices, il s'agira tout d'abord de déterminer s'il s'agit d'une permutation, d'un arrangement ou d'une combinaison. Demandez-vous toujours si l'ordre intervient ou non. Si c'est le cas, c'est un arrangement ou une permutation ; sinon, c'est une combinaison. Demandez-vous ensuite s'il y a des répétitions ou non.

Exercice 1.10

Combien un village doit-il avoir d'habitants au minimum pour que l'on soit sûr de trouver deux personnes au moins avec les mêmes initiales (composées de 2 lettres) ?

Exercice 1.11

Un ordinateur des années 1980 codait les couleurs sur 8 bits. Combien de couleurs l'écran d'un tel ordinateur pouvait-il afficher ?

Exercice 1.12

Quatre couples vont s'asseoir sur un banc de 8 places. Combien y a-t-il de façons de le faire si :

- **a.** il n'y a pas de contraintes ;
- **b.** les hommes restent ensemble et les femmes aussi ;
- **c.** les hommes restent ensemble ;
- **d.** chaque couple reste ensemble.

Exercice 1.13

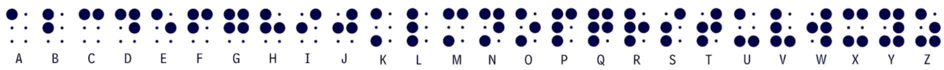
Les douze tomes d'une encyclopédie sont rangés au hasard.

a. Combien y a-t-il de manières de les aligner sur une étagère ?

b. Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte (dans cet ordre) ?

Exercice 1.14

Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montre l'image ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?



Exercice 1.15

Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres des mots :

a. deux **b.** abracadabra **c.** sociologique

Exercice 1.16

Dans le passé, chaque classe du lycée cantonal devait avoir une délégation de trois élèves : un délégué, un suppléant du délégué et un laveur de tableau. Une classe est composée de 11 filles et 3 garçons.

- **a.** Combien y a-t-il de délégations possibles ?

Combien y a-t-il de délégations possibles…

- **b.** si le délégué et le suppléant doivent être de sexe différent ?
- **c.** si le laveur de tableau doit être un garçon ?
- **d.** si les deux sexes doivent être présents dans la délégation ?

Exercice 1.17

Un représentant s'apprête à visiter cinq clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visites...

- **a.** s'il les fait toutes le même jour ?
- **b.** s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

Exercice 1.18

Les **Rapetou** (*the Beagle Boys* en anglais) sont des personnages de fiction créés en 1951 par Carl Barks pour les studios Disney. Ils se ressemblent et s'habillent de manière identique. La seule façon de les différencier est leur matricule de prisonnier qui fait office de nom. Les trois combinaisons récurrentes sont 176-167, 176-671 et 176-761.
Les Rapetou ne sont pas en nombre défini. Carl Barks a déclaré dans une interview qu'il y a autant de Rapetou que de matricules en ABC-XYZ avec les chiffres 1, 6 et 7 avant et après le tiret. Combien sont-ils donc ?

Exercice 1.19

Une châtelaine a onze amis très proches. Elle veut en inviter cinq à dîner.

a. Combien de groupes différents d'invités existe-t-il ?

b. Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble ?

c. Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne veulent pas se voir ?

Exercice 1.20

Triominos (ou Tri-ominos ou 3-ominos selon les éditions) est un jeu familial classique datant de 1967. C'est l'extension du domino sur des triangles.
Toutes les combinaisons de 0 à 5 sont représentées, depuis 0-0-0 jusqu'à 5-5-5. L'image ci-contre en montre quelques-unes.
Il y a 56 pièces dans le jeu de base. En manque-t-il ? Si oui, combien ?

Exercice 1.21

Lors d'un examen, un élève doit répondre à 10 questions sur 13.

a. Combien de choix a-t-il ?

b. Combien de possibilités a-t-il s'il doit répondre aux deux premières questions ?

c. Combien s'il doit répondre soit à la première question, soit à la deuxième ?

d. Combien s'il doit répondre à exactement 3 des 5 premières questions ?

e. Combien s'il doit répondre à au moins 3 des 5 premières questions ?

Exercice 1.22

À partir d'un jeu de 36 cartes, de combien de façons peut-on choisir exactement :

a. deux cartes rouges et un pique ?

b. deux rois et un carreau ?

Exercice 1.23

Au « Swiss Lotto », un jeu de type Keno, il faut cocher 6 numéros sur 45.

a. Combien y a-t-il de grilles possibles ?

b. Combien y a-t-il de grilles avec exactement trois numéros gagnants ?

Exercice 1.24

Il reste au magasin 10 patates d'un poids total de 1 kg. On veut en mettre un certain nombre (entre 1 et 10) dans un sac. Montrez que parmi tous les sacs de patates possibles, il y en a au moins 2 qui ont le même poids, au gramme près.

Exercice 1.25

D'un jeu de 36 cartes, on veut choisir une main de 9 cartes. Combien y a-t-il de mains...

a. ne comportant que des cartes noires (trèfle ou pique) ?

b. ne comportant que des figures (valet, dame, roi ou as) ?

c. comportant 4 as ?

d. comportant 5 figures, dont 3 noires ?

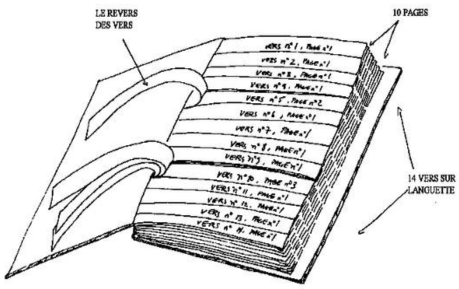
e. comportant 3 as, 3 dames et 3 carreaux ?

Exercice 1.26

L'Oulipo est un groupe de littérature inventive et innovante qui naît au 20e siècle. Il a pour but de découvrir de nouvelles potentialités du langage à travers des jeux d'écriture.

Ce livre est disponible en ligne : www.parole.tv/cento.asp

En 1961, Raymond **Queneau** a publié une œuvre majeure de l'Oulipo. Le livre contient 10 sonnets de 14 alexandrins chacun. Chaque page du livre contient un sonnet et est découpée en 14 languettes contenant chacune un alexandrin. On peut ainsi composer un poème par exemple avec le premier alexandrin du cinquième sonnet, le deuxième alexandrin du neuvième sonnet, et ainsi de suite jusqu'au quatorzième alexandrin.



a. Le début du titre vous a échappé, mais vous vous rappelez que cela se termine par « ... milliards de poèmes ». Quel est le titre du livre de *Queneau* ?

b. À raison d'un poème toutes les minutes, combien d'années faudrait-il pour lire tous les poèmes possibles ?

Exercice 1.27

Résolvez **a.** $A_2^n = 72$ **b.** $A_4^n = 42\,A_2^n$ **c.** $2\,A_2^n + 50 = A_2^{2n}$

Exercice 1.28

Sur une feuille quadrillée, dessinez un rectangle de 10 carrés de long et de 6 carrés de large. En se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut en suivant les lignes du quadrillage, combien y a-t-il de chemins pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du rectangle ?

Exercice 1.29

On dit que cette question faisait partie de l'entretien d'embauche chez Microsoft.

Quatre personnes, au bord d'un précipice, doivent traverser la passerelle qui mène sur l'autre bord. Mais il y a un problème : la passerelle n'est pas très solide et on ne peut pas la franchir à plus de deux. De plus, il faut se munir d'une torche, car la nuit est tombée et certaines planches sont pourries. Notons pour finir que le pas doit toujours s'accorder sur celui de la personne la plus lente :

Alix traverse en 1 minute,
Billy en 2 minutes,
Camille en 5 minutes et
Dany, pusillanime, met 8 minutes.

Elles n'ont qu'une seule torche, et elles ne peuvent pas se la lancer d'un bord du ravin à l'autre ; il faut donc la rapporter à chaque fois.

a. Combien y a-t-il de façons de faire traverser cette passerelle à ces quatre personnes en cinq passages ?
b. Quelle est la solution la plus rapide ?

Exercice 1.30

La série *WW* dans le bloc de gauche indique un garage.

La nouvelle immatriculation française se base sur le modèle AA-111-AA (deux lettres, trois chiffres, deux lettres) en vigueur depuis 1994 en Italie.

a. Combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes ?

En réalité, il y en a moins que cela, car on exclut les lettres *I*, *O* et *U* (du fait de leur trop grande ressemblance avec le *1*, le *0* et le *V*) ainsi que les séries *SS* et *WW* du bloc de gauche et la série *SS* du bloc de droite. De plus, les séries de chiffres démarrent à 001.

b. Avec ces contraintes, combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes ?
c. Les combinaisons de lettres prêtant à rire *KK*, *PQ*, *QQ*, *TG* et *WC* ne sont cependant pas supprimées. Si c'était le cas, combien y aurait-il de plaques d'immatriculation ?

1.10. Coefficients binomiaux

Triangle de Pascal

En fait, ce triangle était connu des mathématiciens chinois au 12e siècle déjà puisque **Zhu Shijie** s'y intéressait. **Pascal** en fait une étude détaillée en 1653, c'est pourquoi il porte son nom.

Blaise **Pascal**
(1623 - 1662)

Le triangle de **Pascal** se construit ligne par ligne : chaque terme est l'addition des deux nombres de la ligne supérieure qui lui sont adjacents.

	p=0	*p*=1	*p*=2	*p*=3	*p*=4	*p*=5	*p*=6	*p*=7
n=0 ←	1							
n=1 ←	1	1						
n=2 ←	1	2	1					
n=3 ←	1	3	**3**	**1**				
n=4 ←	1	4	6	**4**	1			
n=5 ←	1	5	10	10	5	1		
n=6 ←	1	6	15	20	15	6	1	
n=7 ←	1	7	21	35	35	21	7	1

Exemple : on voit que le **4** est égal à **3** + **1**.

Ce triangle permet de déterminer les coefficients binomiaux sans connaître la formule.

Par exemple, le nombre $C_3^4 = \frac{4\,!}{3\,!\,1\,!}$ se lit à l'intersection de la ligne *n* = 4 et de la diagonale *p* = 3.

Binôme de Newton

Vous connaissez les identités binomiales depuis longtemps déjà :

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Mais quelles sont les formules pour des degrés supérieurs ?

C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on les appelle coefficients binomiaux !

En comparant les formules de degré 0, 1, 2 et 3 avec les lignes 0, 1, 2 et 3 du triangle de Pascal, vous constaterez que les coefficients des identités binomiales correspondent avec les nombres du triangle. Donc :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

etc.

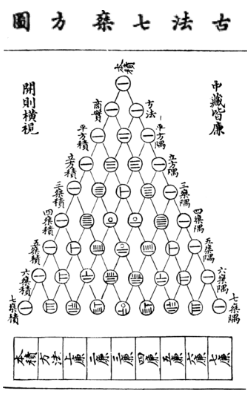
Rappel

$\binom{n}{p}$ est une autre notation de C_p^n.

Soit n un nombre entier strictement positif. La formule générale du **binôme de Newton** est :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Quelques propriétés du triangle de Pascal



Triangle arithmétique de **Zhu Shijie** (1270 - 1330)

Il y a toujours un 1 dans les bords : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Le triangle est symétrique par rapport à la verticale : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Par la construction du triangle, on a : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Vérifiez encore que : $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}$

La somme des termes sur la ligne de rang n (première ligne = rang 0) est égale à 2^n.

Si vous faites la somme alternée des éléments d'une ligne ($a - b + c - d + \ldots$), vous obtenez 0.

Les nombres situés sur la troisième diagonale descendante correspondent aux nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10, ...
Ceux de la quatrième diagonale sont les nombres tétraédriques : 1, 4, 10, 20, ...

Exercice 1.31

a. Développez $(a + b)^7$.
b. Écrivez le cinquième terme du développement de $(r \cdot s^2 + 3)^{16}$.

1.11 Ce qu'il faut absolument savoir

Maîtriser le principe des tiroirs ❏ ok
Maîtriser le principe de décomposition ❏ ok
Reconnaître à quel type de dénombrement on a affaire en lisant une donnée ❏ ok
Calculer tous les types de dénombrement sur sa calculatrice ❏ ok
Connaître le triangle de Pascal et les coefficients binomiaux ❏ ok

2. Probabilités

2.1. Un peu d'histoire

Pierre de **Fermat**
(1601 – 1665)

Jacques **Bernoulli**
(1654 - 1705)

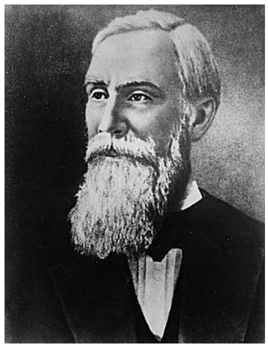
Pierre-Simon **Laplace**
(1749 - 1827)

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme **Cardan** (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait **Cardan** était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise **Pascal** par son ami le **Chevalier de Méré**, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ? Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre **Pascal** et **Fermat**, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christiaan **Huygens**, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique. C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques.

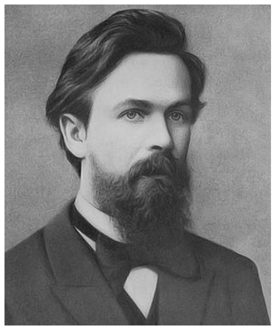
On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ? Le premier à se poser la question est le bâlois Jacques **Bernoulli**, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit *Ars Conjectandi*, qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel.

Au 19ème siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.

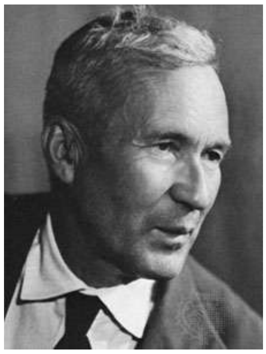
Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.



Pafnouti Lvovitch **Tchebychev**
(1821 – 1894)



Andrei Andreeivich **Markov**
(1856 - 1922)



Andrei Nikolaevich **Kolmogorov**
(1903 - 1987)

C'est **Laplace** qui s'en charge dans son ouvrage *Théorie analytique des probabilités*, paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »

D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham **de Moivre** (1667-1754), Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), Denis **Poisson** (1781-1840), Pafnouti Lvovitch **Tchebychev** (1821-1894), Andrei Andreeivich **Markov** (1856-1922) et Andrei Nikolaevich **Kolmogorov** (1903-1987).

2.2. Univers, issues et événements

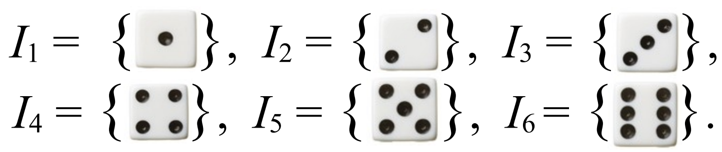
Une **issue** est le résultat d'une expérience aléatoire.
Supposons que l'on jette un dé. Lorsqu'il s'immobilisera, il indiquera l'une des six issues suivantes : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Les statisticiens appellent l'ensemble

l'**univers des résultats**.

Événements

On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω.
L'événement est dit **élémentaire** s'il ne correspond qu'à une seule et unique issue.

Exemple du dé Les six événements élémentaires sont :

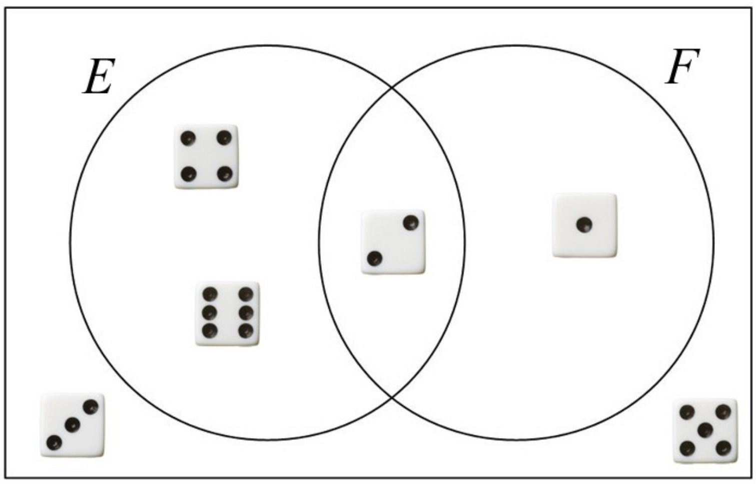


Ainsi, l'événement « le résultat d'un lancer de dé est un nombre pair » est identifié par le sous-ensemble

Opérations sur les événements

Les opérations sur les événements sont les opérations classiques sur les ensembles.
Soit l'événement $E = \{2, 4, 6\}$ et l'événement « le résultat du lancer est plus petit que 3 » identifié par l'ensemble $F = \{1, 2\}$.

Si l'intersection de deux événements E et F est vide ($E \cap F = \varnothing$), on dit que ces deux événements sont **incompatibles**.



Intersection $E \cap F$ représente l'événement « le résultat du lancer est un chiffre pair **et** un chiffre plus petit que 3 », donc $E \cap F = \{2\}$.

Union $E \cup F$ représente l'événement « le résultat du lancer est un chiffre pair **ou** un chiffre plus petit que 3 », donc $E \cup F = \{1, 2, 4, 6\}$.

Complémentaire L'événement complémentaire de E, que l'on note $\overline{E}$ (on prononce « **non** E »), correspond à l'événement « le résultat du lancer est un nombre impair ». On a donc $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$.

Exercice 2.1

On lance deux fois une pièce de monnaie. On écrit p si la pièce montre pile et f si elle montre face. Écrivez l'ensemble Ω.

Exercice 2.2

Une urne contient quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4.
On tire successivement deux boules de l'urne, sans remettre la première boule tirée avant le tirage de la seconde. Écrivez l'ensemble Ω.

Exercice 2.3

Quatre chevaux avec les dossards numérotés de 1 à 4 font une course. Écrivez l'ensemble Ω des tiercés possibles.

2.3. Premiers pas en probabilités

Considérons une expérience dont l'univers est Ω. Nous voulons assigner à chaque issue I un **nombre** $P(I)$ qui indiquera sa **probabilité**.

La probabilité d'une issue I est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(I) \leq 1$$

0 indiquera que l'issue est **impossible** et **1** qu'elle est **certaine**.

Par exemple, si on lance un dé non pipé, chaque face aura une probabilité égale de sortir (1 chance sur 6). On peut donc dire que la probabilité d'une face est de $\frac{1}{6}$.

Attention ! Cette propriété n'est toujours vraie que pour des événements élémentaires.

De plus, quand on lance un dé, on est sûr qu'il indiquera un chiffre de 1 à 6. On doit donc avoir $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$, ce qui est bien le cas.

Donc, en généralisant :

$$P(I_1) + P(I_2) + \ldots + P(I_n) = P(\Omega) = 1$$

Événements élémentaires équiprobables

On vient de voir ce qui se passait avec un dé non pipé. Les événements {1}, {2}, {3}, {4}, {5} et {6} sont ce qu'on appelle des **événements élémentaires équiprobables** (ils sont constitués d'un seul élément et ont tous la même probabilité).

Ce théorème est la version moderne de la définition qu'avait donnée *Laplace* en 1812 (voir introduction).

Soit Ω un univers comportant n événements élémentaires **équiprobables**. Si A est un événement de Ω formé de la réunion de k événements élémentaires, alors $P(A) = \frac{k}{n}$.

Autre formulation

« La probabilité est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles » (si tous les cas sont équiprobables).

Le seul moyen de vérifier qu'un dé n'est pas pipé, c'est de le lancer un grand nombre de fois, par exemple 6000 fois. On devrait alors en principe obtenir environ 1000 fois chacune des faces. Plus on lancera le dé, plus les fréquences observées seront proches des probabilités théoriques. C'est la **loi forte des grands nombres.**

Attention ! Si on utilise un dé pipé, les issues ne sont plus équiprobables et le théorème ci-dessus n'est plus vrai.
Prenons par exemple un dé dont les faces ont les probabilités d'apparition suivantes (on peut vérifier que la somme des probabilités donne bien 1) :

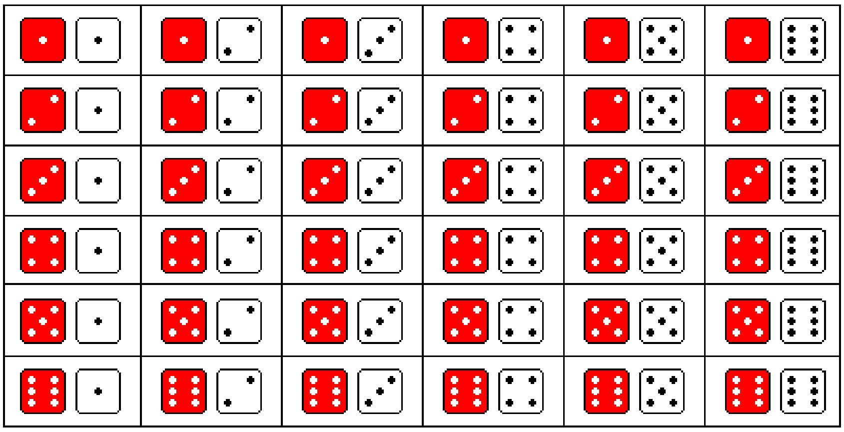
0.25 0.15 0.15 0.15 0.15 0.15

Ici, la probabilité d'obtenir  sera $\frac{1}{4}$, et non $\frac{1}{6}$.

Exemple

On lance deux dés, un rouge et un blanc. Il y a 36 événements élémentaires possibles équiprobables. Chaque paire aura donc une probabilité d'apparition de $\frac{1}{36}$ (1 cas favorable sur 36 possibles).

On notera chaque issue par la paire (r ; b) où r indiquera le résultat du dé rouge et b celui du dé blanc.



Description de l'événement	**Événement**	**Probabilité**
A : la somme des deux dés est 3	$A = \{(1; 2), (2; 1)\}$	$P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
B : la somme des deux dés est 6	$B = \{(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)\}$	$P(B)=\frac{5}{36}$
C : le dé rouge montre un 1	$C = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)\}$	$P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
D : la somme des dés est inférieure à 7 et est un nombre premier	$D = \{(1; 1), (1; 2), (1; 4), (2; 1), (2; 3), (3; 2), (4; 1)\}$	$P(D)=\frac{7}{36}$

Théorème 2.1

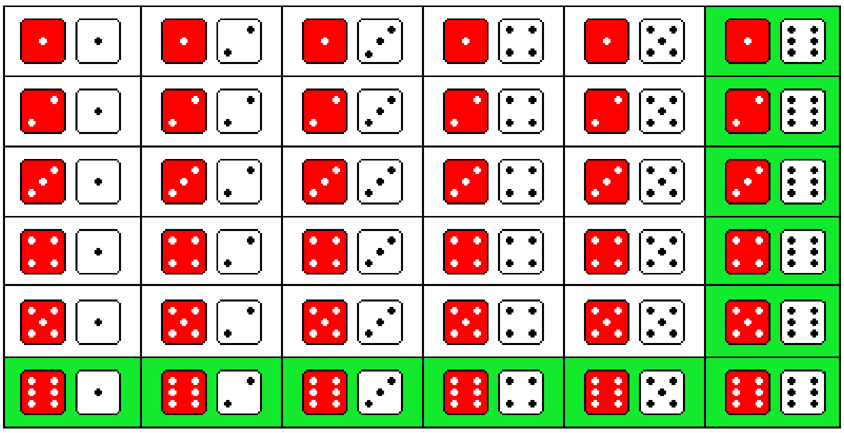
Reprenons l'exemple des deux dés. Soit E l'événement « le dé rouge montre un 6 » et F l'événement « le dé blanc montre un 6 ».

$E \cup F$: « le dé rouge **ou** le dé blanc montre un 6 ».

$E \cap F$: « le dé rouge **et** le dé blanc montrent un 6 ».

$P(E \cup F) = \frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$

En comptant les paires vertes, on voit qu'il y en a bien 11 sur 36.



$E \cup F$ est toute la partie verte.
$E \cap F$ est l'intersection de la bande verticale et de la bande horizontale.
Cela illustre le théorème 2.1 :

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Lorsque les deux événements sont incompatibles, le théorème 2.1 se simplifie et devient :

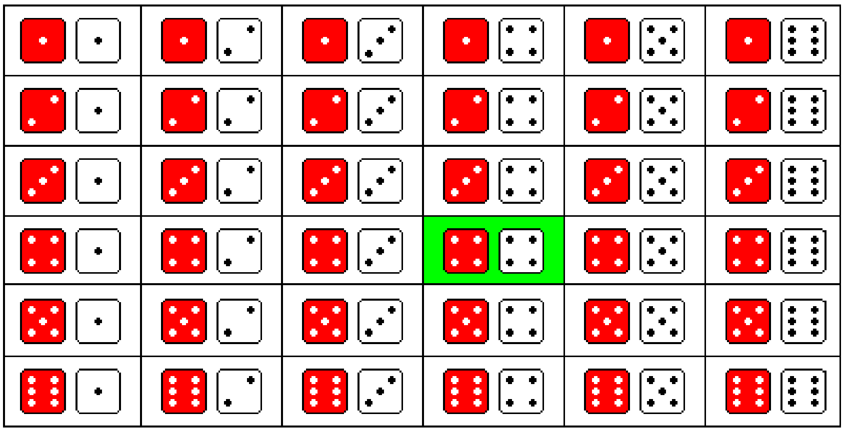
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F), \quad \text{car} \quad E \cap F = \varnothing.$$

Théorème 2.2

Soit l'événement E « les deux dés montrent un 4 ». L'événement $\overline{E}$ est « au moins un des deux dés ne montre pas un 4 ».

$P(E)=\frac{1}{36}$

$P(\overline{E})=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$



On vérifie immédiatement sur le dessin que

$$P(\overline{E})=1-P(E)$$

On peut commenter ce théorème comme suit : la probabilité qu'un événement ne survienne pas est 1 moins la probabilité qu'il survienne. Par exemple, si la probabilité de toucher une cible est 0.23, la probabilité de rater la cible est 0.77.

Exercice 2.4

Dans un canton, il y a 40'000 voitures dotées de plaques numérotées de 1 à 40'000. En n'observant que les voitures de ce canton, quelle probabilité a-t-on de voir une voiture dont le numéro de plaque commence par 1 ?

Exercice 2.5

On lance deux dés. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir…

a. un 3 et un 5 ? **b.** deux 3 ?

c. deux chiffres identiques ? **d.** un total de 8 ?

Exercice 2.6

Un magasin propose le jeu ci-dessous. Quelle est la probabilité de gagner ?

On supposera bien sûr que le client grattera exactement trois cases...

Exercice 2.7

On propose à Camille de lancer simultanément trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées de 10, 20 et 50 centimes respectivement. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté pile.

a. Décrivez l'univers.

Quelle probabilité a-t-il de gagner…

b. 40 centimes ? **c.** moins de 50 centimes ? **d.** plus de 20 centimes ?

Exercice 2.8

Un tétraèdre pipé vous sert de dé. Les faces sont numérotées de 1 à 4. Après le jet, la face gagnante est celle qui repose contre le sol.
La probabilité de gain est proportionnelle au numéro inscrit sur la face : par exemple, la face numéro 4 a une probabilité de sortie 4 fois plus élevée que la face numéro 1.
Quelle est la probabilité de sortie de la face numéro 3 ?

Exercice 2.9

On jette deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit i ? Faites les calculs pour $i = 2, 3, ..., 12$. Dessinez un histogramme.

Exercice 2.10

Deux boules sont tirées d'une urne contenant 6 boules blanches et 5 noires. Quelle est la probabilité qu'une des boules tirées soit blanche et l'autre noire ?

Exercice 2.11

Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voiture déterminé, les possibilités suivantes :

P_0 : il n'y a pas eu de panne ;
P_1 : il y a eu une panne ;
P_2 : il y a eu deux pannes ;
P_3 : il y a eu plus de deux pannes.

Le dépouillement de l'enquête a montré que ces possibilités se sont produites respectivement 233, 310, 156 et 81 fois. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type, de tomber en panne dans l'année qui vient...

a. au moins une fois ?
b. moins de deux fois ?

Exercice 2.12

On tire d'un paquet de 52 cartes deux cartes au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles forment un black jack, ou, autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi ?

Indication : utilisez les combinaisons.

Exercice 2.13*

On admet que les C_5^{52} mains possibles au poker fermé sont équiprobables.
Quelle est la probabilité de recevoir...

a. une quinte royale (10, V, D, R, 1 de la même couleur : ♠, ♥, ♣ ou ♦) ?
b. une quinte flush (5 cartes consécutives de la même couleur, mais pas une quinte royale) ?
c. un carré (p. ex. D ♠, D ♣, D ♦, D ♥, 2 ♠) ?
d. un full, i.e. un brelan + une paire (p. ex. V ♠, V ♣, V ♦, 4 ♦, 4 ♥) ?
e. un flush (p. ex. 2 ♥, 3 ♥, 4 ♥, 9 ♥, V ♥) ?
f. une quinte (p. ex. 2 ♥, 3 ♣, 4 ♣, 5 ♦, 6 ♠) ? On ne comptera pas les quintes royales, ni les quintes flush).
g. un brelan (p. ex. 1 ♠, 1 ♣, 1 ♦, 5 ♦, 8 ♠) ?
h. deux paires (p. ex. 6 ♠, 6 ♣, 9 ♦, 9 ♠, 10 ♦) ?
i. une paire (p. ex. R ♠, R ♣, 7 ♦, 3 ♦, 2 ♠) ?

Exercice 2.14

a. Si n personnes sont présentes dans une pièce, quelle est la probabilité que leurs anniversaires tombent tous sur des jours différents ?

b. Pour quelle valeur de n cette probabilité tombe en dessous de $\frac{1}{2}$?

Pour simplifier, on exclura les gens nés le 29 février.

Indication
Commencez par calculer la probabilité de non-coïncidence pour n = 2, 3 et 4. Donnez ensuite la formule générale.

Exercice 2.15

Trois frères possèdent chacun trois chapeaux identiques, soit, au total, neuf chapeaux identiques, à part les initiales de chaque propriétaire, invisibles de l'extérieur.
Ces neuf chapeaux sont accrochés les uns à côté des autres. Un jour, les trois frères prennent chacun un chapeau au hasard.

Quelle est la probabilité qu'aucun des trois frères n'ait pris un chapeau qui lui appartienne ?

Exercice 2.16

Sur un damier dont chaque case carrée mesure 58 mm de côté, on lance une pièce de 5 centimes (dont le diamètre est de 17 mm). Quelle est la probabilité que la pièce tombe à l'intérieur d'une case, sans en déborder ?

Exercice 2.17

Let's Make A Deal ! était un jeu très populaire diffusé sur une chaîne américaine dans les années septante. À la fin du jeu, Monty Hall vous offrait la possibilité de gagner ce qui se trouvait derrière une porte.

Vous avez trois portes devant vous : derrière une se trouve un prix magnifique (par exemple une voiture) et derrière les deux autres un prix moins intéressant (par exemple une chèvre). Vous choisissez une porte. Pour ménager le suspense, l'animateur, avant de révéler ce qu'il y a derrière votre porte, ouvre une des deux autres portes (derrière laquelle se trouve toujours une chèvre). Il vous pose alors la question : « Parmi les deux portes encore fermées, laquelle choisissez-vous ? »
Vaut-il mieux garder la première porte choisie ou au contraire prendre l'autre porte ?
À moins que cela n'ait aucune importance…

2.4. Axiomes du calcul des probabilités et théorèmes (résumé)

Axiome 2.1 La probabilité d'un événement E est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Axiome 2.2 La probabilité de l'événement certain est égale à 1 :

$$P(\Omega) = 1$$

Axiome 2.3 La probabilité de la réunion de deux événements **incompatibles** est égale à la somme de leur probabilité :

$$\text{si } E \cap F = \varnothing, \text{ alors } P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Théorème 2.1 $$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Théorème 2.2 $$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Théorème 2.3 $$P(\varnothing) = 0$$

Théorème 2.4 $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$ si les événements E_i sont deux à deux incompatibles.

Théorème 2. 5 $P(F \cap \overline{E}) = P(F) - P(F \cap E)$

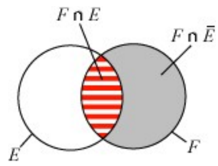
Preuve du théorème 2.5 $F \cap \overline{E}$ et $F \cap E$ sont incompatibles. En effet, $(F \cap \overline{E}) \cap (F \cap E) = \varnothing$ (voir dessin).

Par ailleurs, $(F \cap \overline{E}) \cup (F \cap E) = F$.

Donc, en vertu de l'axiome 2.3 :

$P(F) = P\big((F \cap \overline{E}) \cup (F \cap E)\big) = P(F \cap \overline{E}) + P(F \cap E)$

ce qui prouve le théorème 2.5.



Exercice 2.18

A, B et $A \cup B$ sont trois événements de probabilités 0.4, 0.5 et 0.6, respectivement. Calculez les probabilités des événements suivants :

Formules de **de Morgan** :

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

a. $\overline{A}$	**b.** $\overline{B}$	**c.** $A \cap B$
d. $\overline{A} \cap B$	**e.** $A \cap \overline{B}$	**f.** $\overline{A} \cup B$
g. $A \cup \overline{B}$	**h.** $\overline{A} \cap \overline{B}$	**i.** $\overline{A} \cup \overline{B}$

Vérifiez vos résultats avec $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.5. Probabilité conditionnelle

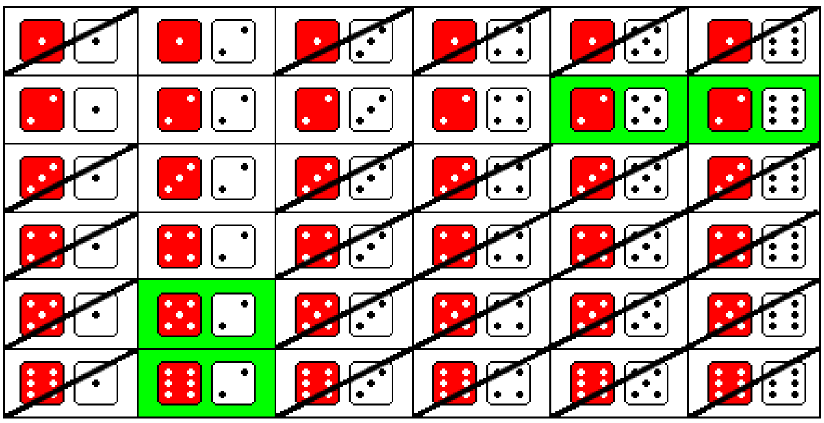
Nous noterons $P(E \mid F)$ cette nouvelle probabilité (probabilité conditionnelle de E, sachant que F s'est produit).

Supposons que nous attendions le résultat d'une épreuve et que nous connaissions la probabilité $P(E)$ de l'événement attendu E. Si, l'épreuve s'étant déroulée, nous recevons une information supplémentaire, par exemple que l'événement F s'est produit, ce renseignement va en général modifier la probabilité de réalisation de l'événement E.

Définition Soient E et F deux événements d'un univers Ω. Si $P(F) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de E par F le nombre noté $P(E \mid F)$ et tel que

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Exemple On lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 6, sachant que l'un des deux dés indique un 2 ?



Résolution sans la définition Remarquons tout d'abord que toutes les 36 paires « habituelles » ne sont pas envisageables. En fait, seules 11 sont possibles. Et sur ces 11 paires, 4 ont une somme supérieure à 6. Donc $p = \frac{4}{11}$.

Résolution avec la définition On pose : E : « la somme des dés est supérieure à 6 »

F : « un des deux dés indique un 2 ».

Donc $E \cap F$: « la somme des dés est supérieure à 6 **et** un des deux dés indique un 2 ».

D'après la figure ci-dessus, on voit que $P(E \cap F)=\frac{4}{36}$ et $P(F)=\frac{11}{36}$.

Remarque
Il est souvent plus facile de résoudre une probabilité conditionnelle sans la formule.

Donc, selon la formule, on obtient bien $P(E|F)=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{4}{11}$.

Exercice 2.19

Un sac contient vingt jetons ; la moitié sont noirs, les autres blancs. Cinq jetons portent en plus une marque spéciale et trois de ceux-là sont noirs.
On tire au hasard un jeton du sac. Quelle est la probabilité que ce jeton...

a. soit noir si l'on sait qu'il porte une marque ?
b. ne porte pas de marque si l'on sait qu'il est blanc ?

Exercice 2.20

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre un 6, sachant que les deux chiffres montrés sont différents ?

Exercice 2.21

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre un 6, sachant que la somme des deux est i ? Calculez le résultat pour toutes les valeurs possibles de i.

Exercice 2.22

Dans une petite ville, la police recherche un ivrogne. Il y a quatre chances sur cinq qu'il se trouve dans un des huit bars de la ville. Deux agents de police visitent sept des huit bars sans le trouver. Quelle est la probabilité qu'ils le trouvent dans le huitième bar ?

Exercice 2.23

On considère trois urnes. L'urne A contient 2 boules blanches et 4 rouges ; l'urne B, 8 blanches et 4 rouges ; l'urne C 1 blanche et 3 rouges. On tire une boule de chacune des urnes.
Quelle est la probabilité que la boule tirée de l'urne A soit blanche, si l'on sait que le tirage a livré 2 boules blanches exactement ?
Indication : utilisez la formule de la probabilité conditionnelle.

Exercice 2.24

On choisit au hasard une famille parmi celles qui ont deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux garçons...

a. si l'on sait que l'un des deux au moins est un garçon ?
b. si l'on sait que l'un des deux enfants s'appelle Ernest ?

Formule de Bayes

Thomas **Bayes**
(1702 - 1761)

La formule de la probabilité conditionnelle peut être écrite sous une autre forme, appelée **formule de Bayes** :

$$P(E|F)=\frac{P(F|E)\cdot P(E)}{P(F|E)\cdot P(E)+P(F|\overline{E})\cdot P(\overline{E})}$$

Le numérateur découle de la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(F|E)=\frac{P(F \cap E)}{P(E)} \Rightarrow P(F \cap E)=P(F|E)\cdot P(E)$$

Le dénominateur s'obtient ainsi :

$$P(F)=P(F \cap E)+P(F \cap \overline{E})=P(F|E)\cdot P(E)+P(F|\overline{E})\cdot P(\overline{E})$$

Exemple
Un élève répond à une question à choix multiple. De deux choses l'une : soit il connaît la réponse, soit il la devine. Soit p la probabilité que l'élève connaisse la réponse et

donc $1-p$ celle qu'il la devine. On admet que l'élève qui devine répondra correctement avec probabilité $1/m$ où m est le nombre de réponses proposées. Quelle est la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question s'il y a répondu correctement ?
Soient E et F respectivement les événements « il connaît vraiment la réponse » et « l'étudiant répond correctement à la question ». Alors

$$P(E|F)=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\left(\frac{1}{m}\right)(1-p)}=\frac{m\cdot p}{1+(m-1)\cdot p}$$

En prenant par exemple $m = 5$ et $p = 0.5$, la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question sachant qu'il a répondu correctement sera ainsi de $\frac{5}{6}$.

Exercice 2.25

Une maladie atteint une personne sur mille. Il existe un test pour savoir si une personne est infectée, mais ce test n'est pas parfait : si la personne est infectée, le test sera positif dans 99 % des cas ; mais, dans 2 % des cas, le test sera positif alors que la personne est saine.
Vous venez d'être examiné et le test est positif. Quelle est la probabilité que vous soyez vraiment atteint par cette maladie ?

Exercice 2.26

Un inspecteur est convaincu à 60 % de la culpabilité d'un suspect. À ce stade de l'enquête, on découvre que le coupable est gaucher. Le suspect l'est aussi, comme 14 % de la population. Cela renforce-t-il sensiblement la conviction de l'inspecteur ?
On admet que la probabilité qu'un individu soit gaucher si on sait qu'il est non coupable est aussi de 14 %.

Exercice 2.27

Après avoir fait appel plusieurs fois, Sally Clark a été libérée lorsque des statisticiens de la *Royal Statistical Society* ont démontré que l'argument mathématique était totalement faux, et qu'il est apparu que les médecins avaient caché le fait que Harry montrait des signes d'infection généralisée pouvant expliquer sa mort.

En décembre 1996, un enfant âgé de deux ans et demi meurt alors que sa mère, Sally Clark, était seule dans la maison avec lui. En janvier 1998, son second fils Harry meurt également à l'âge de deux mois, dans des circonstances similaires.
Le verdict de la cour a été le suivant. La fréquence de la mort subite est de 1 enfant sur 8500. En conséquence, il y a une chance sur 73 millions que Sally Clark soit innocente. Elle est donc jugée coupable au-delà du doute raisonnable.
Sachant que le taux de meurtre d'enfants par l'un de leur parent durant leur première année est de 1 sur 90'000, que pensez-vous de ce verdict ?
Pour en savoir plus : *Raisonnez probabilités sans vous faire piéger*,
par Pierre Spagnou, § 4.8 La mort subite
ou https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Affaire_Sally_Clark.pdf

Exercice 2.28

Une personne a été attaquée de nuit dans la rue. Elle prétend que son agresseur est noir. Or, il est établi que, dans de telles circonstances, la victime perçoit correctement la couleur de peau de son agresseur 8 fois sur 10.
De plus, la région est peuplée de 90 % de blancs et de 10 % de noirs, et le taux de criminalité est le même pour les deux communautés.
Quelle est la probabilité que l'agresseur soit effectivement une personne de couleur ?

2.6. Événements indépendants

Occurrence : apparition, réalisation

Deux événements E et F sont indépendants l'un de l'autre si l'occurrence de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de l'autre. Par exemple, le jet d'un dé n'a pas d'influence sur le jet d'un autre (sauf s'ils sont collés, magnétisés, etc.).

De la formule de la probabilité conditionnelle donnée au § 2.5, on sait que $P(E \cap F) = P(E|F)\cdot P(F)$. Si les deux événements E et F sont indépendants, alors $P(E|F) = P(E)$, donc $P(E \cap F) = P(E)\cdot P(F)$.

Définition On dit que deux événements E et F sont **indépendants** si $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont **dépendants**.

Exercice 2.29

On jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « Le même côté sort deux fois. »
B : « Le nombre de côtés face est inférieur à deux. »

Exercice 2.30

On tire au hasard une carte d'un paquet de 52 cartes à jouer ordinaires. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « La carte tirée est un as. »
B : « La carte tirée est un pique. »

Exercice 2.31

Je vais lancer une pièce de monnaie équilibrée pour la quatrième fois. Les trois premières fois j'ai obtenu pile. Quelle est la probabilité que j'obtienne pile encore cette fois ?

Exercice 2.32

Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5.

Questions **a - d** : voir exercice 2.18

Quelle probabilité y a-t-il...

a. que la première salle soit libre ?
b. que les deux salles soient libres ?
c. que l'une des deux salles au moins soit libre ?
d. qu'une seule salle soit libre ?
e. que la seconde salle soit libre si l'on sait que la première est occupée ?

f. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?
A : « La première salle est occupée ».
B : « La seconde salle est occupée ».

Exercice 2.33*

Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.
Julie étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible.
Un couple de caméléons daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

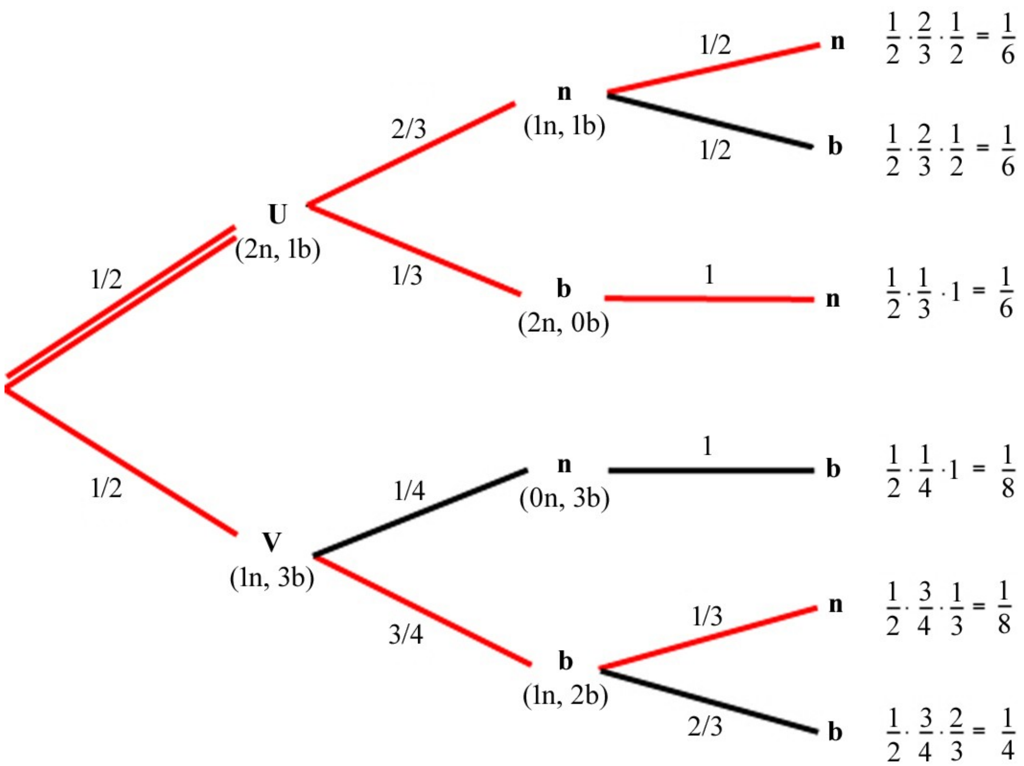
a. Calculez la probabilité qu'ils soient de la même couleur.
b. Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?
c. Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculez la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

2.7. Épreuves successives

Dans de nombreuses applications, une épreuve globale se compose de n épreuves partielles successives.

Exemple On a deux urnes U et V extérieurement identiques. U contient 2 boules noires et 1 blanche, V contient 1 noire et 3 blanches.
On choisit d'abord une des deux urnes au hasard, puis on extrait d'elle successivement 2 boules (sans remettre la première dans l'urne).

L'arbre ci-dessous représente cette suite d'opérations, avec les probabilités associées :



La probabilité d'un chemin est égale au **produit des probabilités** des branches qui forment ce chemin. En effet, d'après la formule de probabilité conditionnelle : $P(E\cap F)=P(E|F)\cdot P(F)$.

On remarquera que dans un arbre deux chemins sont toujours incompatibles. Pour calculer la probabilité d'un événement qui est la réunion de plusieurs chemins, on **additionne** les probabilités de ces chemins (voir théorème 2.4).

Les questions suivantes se résolvent aisément à l'aide de l'arbre :

Ce sont les trois chemins rouges dans le dessin ci-dessus.

a. Quelle probabilité a-t-on de tirer en dernier une boule noire ?

$P((–, –, n) = P((U,n,n) \cup (U,b,n) \cup (V,b,n)) =$

$= P((U,n,n)) + P((U,b,n)) + P((V,b,n)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$

b. Quelle probabilité a-t-on de tirer deux boules de même couleur ?

$P((–,n,n) \cup (–,b,b)) = P((U,n,n) \cup (V,b,b)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

c. Quelle probabilité a-t-on de tirer une boule noire en dernier si l'on sait que la première était blanche ?

Les questions **c** et **d** sont des probabilités conditionnelles.

$$P((–,–,n)|(–,b,–)) = \frac{P((-,b,n))}{P((-,b,-))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = \frac{7}{13}$$

d. Quelle probabilité a-t-on d'avoir choisi l'urne U si la seconde boule tirée est noire ?

$$P((U,–,–)|(–,–,n)) = \frac{P((U,-,n))}{P((-,-,n))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}=\frac{8}{11}$$

Exercice 2.34

Me voici sur une plage isolée d'Hawaï. J'ai l'intention d'y prendre un vrai bain de vagues, c'est-à-dire passer les brisants, nager tranquillement au large puis rentrer en me faisant ramener par une vague. Mais on me le déconseille fortement. Les vagues sont en effet ici colossalement fortes et charrient 2 mètres d'écumes environ. Aussi, 1 bon nageur sur 5 ne réussit pas à franchir les brisants et revient directement sur la plage. Quand on nage tranquillement au large, les requins vous dévorent 1 fois sur 4. Puis la probabilité de se noyer dans l'écume en suivant une vague au retour est de 40 %. Pour finir, 3 personnes sur 20 parmi les rescapés apparents de ce bain s'effondrent terrassés par une crise cardiaque en arrivant sur le sable.

Quelle est donc la probabilité, si je me lance malgré tout en mer...

a. de me noyer ?
b. de revenir vivant à l'hôtel ?
c. de revenir vivant à l'hôtel après avoir passé les brisants ?

Épreuves successives indépendantes

Lorsqu'une épreuve globale est formée d'une succession d'épreuves indépendantes les unes des autres (par exemple lancer un dé plusieurs fois de suite), le problème se simplifie considérablement. En effet, si A, B et C sont trois événements relatifs à trois épreuves successives indépendantes, on aura :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Exemple On lance un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir la suite 2, 5, 3 ?

La réponse est simplement $P((2,5,3)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Exercice 2.35

On lance un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité que ni le 3 ni le 5 n'apparaissent ?

Exercice 2.36

On atteint une cible 3 fois sur 10. Combien de fois, au minimum, faut-il tirer pour avoir plus de 99 chances sur 100 de toucher la cible au moins une fois ?

Exercice 2.37

voir ex 1.23

Vous participez 100 fois par an au tirage du « Swiss Lotto ». Chaque fois, vous cochez 6 numéros sur <u>une</u> grille de 45 numéros. Vous gagnez le gros lot si vous avez coché les 6 numéros tirés au sort.

a. Quelles sont vos chances de gagner le gros lot au moins une fois si vous persévérez à ce rythme pendant cinquante ans ?
b. À ce rythme, combien d'années devriez-vous jouer pour avoir plus d'une chance sur deux de gagner le gros lot au moins une fois ?

Exercice 2.38

Cette politique de « surréservation » (overbooking) est très courante parmi les compagnies d'aviation.

Un guide dispose d'un minicar à 10 places pour faire visiter Paris. Avec le temps, il a remarqué qu'une personne qui a réservé une place annule sa réservation 1 fois sur 5. Il décide donc de toujours louer 11 places.

Quel est le nombre approximatif de jours dans l'année où le guide devra renvoyer un de ses clients par manque de place, en supposant qu'il travaille 250 jours par an ?

Exercice 2.39

Problème du Chevalier de Méré (posé à Blaise **Pascal** en 1654).
Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 2.40

Quand je plante une capucine, elle fleurit 1 fois sur 4.
Combien de capucines (au minimum) dois-je planter pour avoir plus de 3 chances sur 4 d'en voir au moins une fleurir ?

Exercice 2.41

Koh-Lanta
Le totem maudit
mai 2022

Sur Koh-Lanta, deux ambassadeurs (Louana et Colin) se concertent pour éliminer un de leurs camarades ou bien participer à un tirage au sort qui se déroulera ainsi :

- Louana a dans son sac une boule noire (perdante) et une boule blanche ;
- victime d'une malédiction, Colin a dans son sac à lui 2 boules noires et une boule blanche ;
- chaque ambassadeur tire une boule dans son sac ;
- si chacun tire une boule de la même couleur, on recommence le tirage.

a. Quelle est la probabilité que Colin soit éliminé ? Et Louana ?
b. Quelle est la probabilité qu'il faille moins de 5 tirages au sort pour éliminer un des deux ambassadeurs ?

Exercice 2.42

On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 36 cartes. Le jeu ayant été brassé convenablement, quelle probabilité a-t-on de tirer...

a. dans l'ordre : as ♠, as ♣, as ♦, as ♥ ?
b. les quatre as ?
c. les quatre as sachant que les deux premières cartes tirées étaient des as ?
d. exactement un as ?
e. au moins un as ?
f. un as au moins sachant que la première carte tirée n'était pas un as ?

Exercice 2.43

Deux urnes U et V contiennent respectivement :
U : 3 boules rouges, 2 boules bleues
V : 1 boule rouge, 1 boule bleue

On enlève une boule de U puis l'on met les boules restantes dans V. On tire alors une boule de V. Calculez la probabilité...

a. que cette boule soit rouge
b. que cette boule soit rouge si l'on sait que la première boule tirée était rouge
c. que la première boule tirée ait été rouge si au second tirage on a une boule rouge.

Exercice 2.44

Un tricheur professionnel garde dans sa poche 2 pièces, l'une normale et l'autre ayant ses deux faces identiques, disons deux fois pile. Il en prend une au hasard et la lance ; elle montre pile.

a. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la pièce normale ?
b. Il jette la pièce une seconde fois et elle montre à nouveau pile. Même question.

Exercice 2.45

Combien faut-il rencontrer de personnes pour avoir plus d'une chance sur deux de trouver quelqu'un qui est né le même jour que soi (par exemple le 3 juillet, peu importe l'année) ?

Attention ! Cet exercice ressemble beaucoup au 2.14, mais le résultat est, comme vous le verrez, très différent.

2.8. La loi binomiale

Schéma

Une urne contient N boules, dont R sont rouges. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve n fois de suite.
La probabilité de tirer k boules rouges est égale à :

p est la probabilité de tirer une boule rouge lors d'un tirage (succès).
p ne varie pas au cours du temps.
$1 - p$ est la probabilité d'échec.
k est le nombre de succès.
$n - k$ est le nombre d'échecs.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k} \;=\; C_k^n\, p^k (1-p)^{n-k}\ , \quad \text{avec} \quad p=\frac{R}{N}$$

Cette loi s'utilise lorsqu'il n'y a que **deux issues possibles** à l'épreuve : **succès** (boule rouge) ou **échec** (boule pas rouge) et que l'on s'intéresse au nombre de succès possibles (k) sur un total de n épreuves.

Exemple On lance un dé équilibré 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir respectivement 1, 2, 3, 4 fois « 6 » ?

$$P(1 \text{ fois « 6 »}) = C_1^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{19} \approx 0.104$$

$$P(2 \text{ fois « 6 »}) = C_2^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \approx 0.198$$

$$P(3 \text{ fois « 6 »}) = C_3^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 0.238$$

$$P(4 \text{ fois « 6 »}) = C_4^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \approx 0.202$$

Exercice 2.46

On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

Quand $p = 1/2$, les calculs se simplifient beaucoup, car $p = 1-p$.

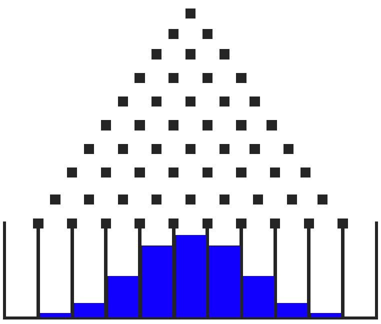
a. 8 fois face ?
b. 9 fois face ?
c. 10 fois face ?
d. plus de 7 fois et moins de 13 fois face ?
e. moins de 4 fois face ?

Exercice 2.47

On admet qu'un trait physique (telle la couleur des yeux ou le fait d'être gaucher) est déterminé par une paire de gènes. On désignera par *d* le gène de la paire qui est dominant, et par *r* celui qui est récessif. Une personne portant *dd* sera ainsi à dominance pure, une autre portant *rr* sera à caractère récessif pur, alors que *rd* entraînera une dominance hybride. Les dominances pures et hybrides ne se distinguent pas extérieurement. Un enfant recevra un gène de chacun de ses parents.
Si, pour un trait particulier, les deux parents sont hybrides et s'ils ont 4 enfants, quelle est la probabilité que 3 de ceux-ci manifestent extérieurement le trait dominant ?

Exercice 2.48*

La planche de Galton



Des billes tombent verticalement sur un assemblage de clous placés en quinconce sur des lignes horizontales et équidistants de leurs voisins immédiats (voir dessin ci-contre). Le diamètre des billes est égal à la distance entre les clous. Chaque fois qu'une bille tape un clou, elle a la même probabilité ($p = 0.5$) de continuer sa chute à gauche ou à droite.
En bas du crible se trouvent des compartiments dans lesquels tombent les billes. Si nous réalisons l'expérience un grand nombre de fois, les billes viennent s'accumuler dans les compartiments et forment ainsi un histogramme. La hauteur d'un bâton de l'histogramme est proportionnelle au nombre de billes s'y trouvant.

a. Déterminez l'histogramme théorique du crible de Galton ci-dessus. On laisse tomber 1024 billes (cela simplifie les calculs).
b. Même question si la probabilité que la bille tombe à droite d'un clou est $p = 0.25$. Dessinez la répartition obtenue et comparez-la avec l'histogramme du point **a.**

Exercice 2.49

Dans une école, il y a 10 % de gauchers. Calculez la probabilité d'avoir au moins 4 gauchers dans une classe de 20 élèves.

Exercice 2.50

Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90 % des cas. On lui soumet 20 échantillons d'écriture.
On accepte son affirmation s'il réussit à identifier au moins 15 fois le sexe correct. Dans le cas contraire, on rejette son affirmation. Quelle est la probabilité...

a. que l'on accepte son affirmation alors qu'il répond au hasard ?
b. que l'on rejette son affirmation alors qu'elle est fondée ?

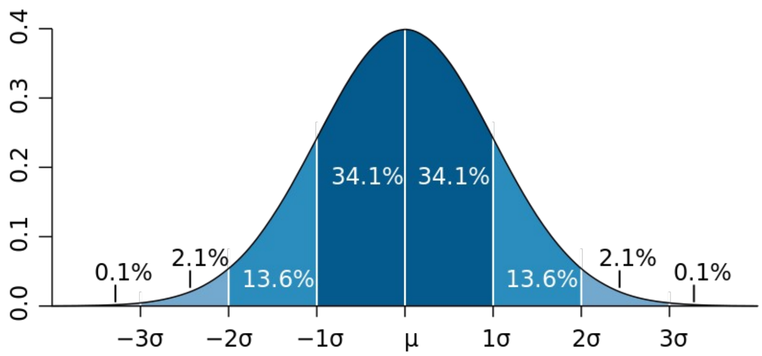
Exercice 2.51

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On y tire au hasard 3 boules une par une, d'abord en les remettant chaque fois dans l'urne (méthode 1), puis sans les y remettre (méthode 2). Avec quelle méthode a-t-on le plus de chances de tirer ainsi une boule blanche et 2 boules noires (l'ordre d'apparition n'a pas d'importance) ?

Affaire Castaneda contre Partida

Attendu de la Cour Suprême des États-Unis (affaire Castaneda contre Partida)

Un accusé d'origine mexicaine, condamné pour cambriolage et tentative de viol dans un comté du sud du Texas attaqua le jugement sous le motif que la désignation des jurés dans l'État du Texas était discriminatoire pour les Américains d'origine mexicaine. Son argument était que ceux-ci n'étaient pas suffisamment représentés dans les jurys populaires.
« Si les jurés étaient tirés au hasard dans l'ensemble de la population, le nombre d'américains mexicains dans l'échantillon pourrait être modélisé par une distribution binomiale... Étant donné que 79.1 % de la population est mexico-américaine, le nombre attendu d'américains mexicains parmi les 870 personnes convoquées en tant que grands jurés pendant la période de 11 ans est approximativement 688. Le nombre observé est 339. Bien sûr, dans n'importe quel tirage considéré, une certaine fluctuation par rapport au nombre attendu est prévisible. Le point essentiel cependant, est que le modèle statistique montre que les résultats d'un tirage au sort tombent vraisemblablement dans le voisinage de la valeur attendue...



La mesure des fluctuations prévues par rapport à la valeur attendue est l'écart-type, défini pour la **distribution binomiale** comme la racine carrée de la taille de l'échantillon (ici 870) multiplié par la probabilité de sélectionner un américain mexicain (ici 0.791) et par la probabilité de sélectionner un non américain mexicain (ici 0.209)... Ainsi, dans ce cas, l'écart-type est approximativement de 12. En règle générale, pour de si grands échantillons, si la différence entre la valeur attendue et le nombre observé est plus grande que deux ou trois écarts-types, alors l'hypothèse que le tirage du jury était fait au hasard serait suspecte à un spécialiste des sciences humaines. Les données sur 11 années reflètent ici une différence d'environ 29 écarts-types. Un calcul détaillé révèle qu'un éloignement aussi important de la valeur attendue se produirait avec moins d'une chance sur 10^{140} ».

Source : *Prove It with Figures (Statistics for Social Science and Behavorial Sciences)*, par Hans Zeisel et David Kaye, Springer (2006).

2.9. La loi multinomiale

Il s'agit d'un tirage avec remise dans une urne.
Une urne contient des boules de k couleurs différentes r_k. On note p_j la proportion des boules de couleur r_j. On effectue n tirages avec remise.

Considérons une expérience aléatoire avec k résultats possibles, disons les résultats r_1, r_2, …, r_k.

La probabilité du résultat r_j sera notée p_j. On a donc $0 \le p_j \le 1$ et $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.

Maintenant, considérons n répétitions indépendantes de cette expérience aléatoire. La probabilité d'obtenir n_1 fois le résultat r_1, n_2 fois le résultat r_2, …, et n_k fois le résultat r_k est donné par la formule :

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}\, p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$$

avec $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.

Exercice 2.52

Une urne contient 10 boules rouges, 15 bleues, 3 jaunes et 8 vertes. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve dix fois de suite.
Quelle est la probabilité d'avoir noté 3 boules rouges, 4 bleues, 1 jaune et 2 vertes ?

Exercice 2.53

On lance un dé équilibré 24 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

a. 5 six et 5 cinq ?
b. 9 six et 12 nombres impairs ?
c. les 6 chiffres 4 fois ?

Exercice 2.54

On « alourdit » un dé pour que le 6 apparaisse 30 % du temps, pour que le 1 apparaisse 10 % du temps, et pour que chacune des autres faces apparaisse 15 % du temps. On jette le dé six fois. Calculez la probabilité que...

a. chaque face apparaisse une fois ;
b. les faces 4, 5 et 6 apparaissent chacune deux fois.

2.10. Exercices récapitulatifs

Exercice 2.55

Quatre amis pêcheurs ont mélangé leurs bottes avant d'aller se coucher. René se lève toujours le premier et prend deux bottes au hasard dans l'obscurité pour ne pas réveiller ses camarades, puis il sort de la chambre.

1. **(a)** Calculez la probabilité des événements suivants :

A : Ces deux bottes sont les siennes.
B : Il a pris une botte gauche et une botte droite.
C : Il a pris deux bottes droites.
D : Une botte appartient à René et l'autre pas.
E : Ces deux bottes appartiennent à des pêcheurs différents.

(b) Sachant que René a pris une botte gauche et une botte droite, quelle est la probabilité que ces bottes soient les siennes ?

2. Chaque jour, c'est la même histoire : les bottes sont mélangées et René prend deux bottes au hasard dans l'obscurité.

2.1. Cela va durer 10 jours. Calculez la probabilité des événements suivants :

F : René prendra au moins une fois ses deux bottes.
G : René prendra exactement 3 fois ses deux bottes.
H : René prendra 1 fois ses deux bottes, 4 fois une seule de ses bottes et 5 fois aucune de ses bottes.

2.2. Combien de jours devraient durer la partie de pêche pour que René soit sûr à plus de 95 % de prendre au moins une fois ses deux bottes ?

3. Suite aux remontrances de ses amis, René procède désormais autrement : il prend d'abord quatre bottes, puis sort de la chambre. Dans le couloir, à la lumière, il regarde ce qu'il a pris, puis il chausse la ou les bottes qui lui appartiennent. S'il n'a pas ses deux bottes aux pieds, il retourne dans la chambre et prend encore deux bottes parmi les quatre restantes dans l'obscurité, puis il retourne dans le couloir à la lumière.
Quelle est la probabilité qu'après son petit manège il ait trouvé ses deux bottes ?

Exercice 2.56

Lors d'un test d'adresse, on dispose de 3 carreaux pour tirer à l'arbalète sur une cible. On réussit le test (et on arrête de tirer) dès qu'un carreau a atteint le centre de la cible ou que deux carreaux ont touché la cible. On estime la probabilité de toucher le centre de la cible à 0.25, alors que la probabilité d'atteindre la cible ailleurs qu'au centre est estimée à 0.5 (la probabilité de rater la cible est donc estimée à 0.25).

a. Quelle est la probabilité de réussir le test ?

b. Sachant qu'on a réussi le test, quelle est la probabilité qu'un seul carreau ait touché la cible ?

c. Trois personnes pour lesquelles on estime les probabilités comme ci-dessus se présentent au test. Quelle est la probabilité...

   1. qu'aucune d'entre elles ne le réussisse ?
   2. qu'au moins l'une d'entre elles ne le réussisse pas ?

Exercice 2.57

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Rappel :
1 n'est <u>pas</u> un nombre premier

Variante plus difficile
Refaites l'exercice en supposant que les quatre cases centrales sont atteintes avec une probabilité de 1/10 et celles du bord avec une probabilité de 1/20.

On lance des fléchettes les yeux bandés sur la cible ci-contre. On suppose qu'on atteint chaque case de la cible avec la même probabilité et qu'on ne rate jamais la cible.

1. On lance une fléchette :

1.1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
A : toucher une case grise ;
B : toucher une case grise ayant un numéro inférieur ou égal à 6 ;
C : toucher une case grise ou un numéro inférieur ou égal à 6 ;
D : toucher une case grise sachant qu'un nombre premier y est inscrit.

1.2. Soit l'événement E : « toucher un numéro impair ». Les événements A et E sont-ils indépendants ? Justifiez.

2. On lance trois fléchettes :

2.1. Si la somme des trois nombres touchés est 8, quelle est la probabilité d'avoir touché trois fois une case blanche ?

2.2. La première fléchette touche une case grise, la deuxième un nombre impair, la troisième un nombre premier. Quelle est la probabilité d'avoir touché trois fois le même nombre ?

3. On lance dix fléchettes. Quelle est la probabilité qu'on ait touché exactement cinq nombres impairs ?

4. Combien de fléchettes devra-t-on lancer pour être sûr à plus de 95 % d'avoir touché au moins une fois le numéro 3 ?

5. Après avoir lancé une fléchette, on peindra en rouge la case touchée. On va lancer trois fléchettes. Quelle est la probabilité de peindre exactement deux cases en rouge ?

2.11. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les axiomes ❏ ok
Connaître les théorèmes ❏ ok
Reconnaître et calculer les probabilités conditionnelles ❏ ok
Reconnaître deux événements indépendants ❏ ok
Savoir faire un arbre pour résoudre un problème d'épreuves successives ❏ ok
Maîtriser la loi binomiale ❏ ok
Maîtriser la loi multinomiale ❏ ok

3. Variables aléatoires

3.1. Un peu d'histoire

Blaise **Pascal**
(1623 - 1662)

Les origines de la notion d'**espérance mathématique** remontent au *problème des parties* de **Pascal** : « Deux joueurs *A* et *B* jouent une partie en plusieurs coups ; à chaque coup, chaque joueur a la même probabilité de gagner. Le premier qui a gagné trois coups ramasse l'enjeu qui est de 64 pistoles, chaque joueur ayant misé 32 pistoles au début du jeu. Soudain, les joueurs aperçoivent la police et doivent interrompre le jeu avant la fin de la partie. Comment faut-il partager l'enjeu ? »
Supposons que le joueur *A* ait gagné deux coups et le joueur *B* un coup au moment où la police arrive. Pour partager l'enjeu, on raisonnera ainsi : si le coup suivant était joué, *A* pourrait le gagner et empocherait donc les 64 pistoles. Il pourrait aussi le perdre : *A* et *B* auraient alors gagné deux coups chacun et il serait légitime de partager l'enjeu de manière égale. *A* peut donc espérer avec des chances égales gagner 64 pistoles ou 32. Donc, 32 pistoles lui sont assurées et ce sont les 32 pistoles restantes qui sont le véritable enjeu du coup suivant. Il est légitime de les partager également entre *A* et *B*. Donc finalement *A* va toucher 32 + 16 = 48 pistoles et *B* 16 pistoles.

Exercice 3.1

À l'aide d'un arbre d'épreuves successives, calculez la probabilité de gain des deux joueurs de l'introduction historique et vérifiez que la répartition de Pascal (3/4, 1/4) est juste.

3.2. Variables aléatoires discrètes

On désigne une variable aléatoire par une lettre majuscule.
Les valeurs qu'elle prend sont écrites en minuscules (x_1, x_2, etc.)

Il arrive souvent qu'à propos d'une épreuve, on soit amené à attribuer des valeurs numériques à ses issues.

D'un point de vue formel, une **variable aléatoire** est une **fonction** $X: \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est l'univers des résultats. Si l'ensemble des valeurs de cette fonction est fini ou dénombrable, on dit que cette variable aléatoire est **discrète**.

Exemple

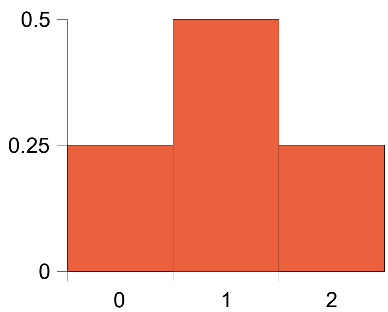
Prenons tout de suite un exemple : on lance deux pièces de monnaie et on compte le nombre de côtés pile, nombre que l'on désignera par la variable aléatoire *X*. Trois résultats sont possibles : 0, 1 ou 2. À chacun de ces trois résultats possibles, on **associe une probabilité** :

On remarque que la somme de des probabilités est égale à 1.

$P\{X=0\} = P\{(\text{F, F})\} = 1/4$
$P\{X=1\} = P\{(\text{F, P}), (\text{P, F})\} = 1/2$
$P\{X=2\} = P\{(\text{P, P})\} = 1/4$

On obtient ce qu'on appelle une **loi de probabilité** ou **distribution**, que l'on peut représenter sous la forme d'un diagramme en bâtons :

On remarque que si la largeur d'un rectangle vaut 1, la somme des aires des rectangles est égale à 1.



Espérance

C'est en fait une moyenne pondérée !

L'espérance est aussi notée μ.

L'**espérance d'une variable aléatoire** est l'un des concepts les plus importants en théorie des probabilités. Pour une variable aléatoire discrète X, on définit l'espérance de X, notée $E[X]$, par l'expression :

$$E[X]=\sum_i p_i x_i$$

où la variable aléatoire discrète X peut prendre les valeurs x_1, x_2, x_3, ... avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, ...

Pour y voir plus clair, reprenons l'exemple des deux pièces de monnaie. L'espérance de la variable aléatoire X est $E[X]=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2=1$.

Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance μ, prenant les valeurs x_1, x_2, x_3, ..., avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, ... On appelle **variance** de X le nombre $V(X)$ défini par :

$$V(X)=E[(X-\mu)^2]=\sum_i (x_i-\mu)^2 p_i$$

Johann Samuel **König**, mathématicien allemand, 1712-1757. Sa formule facilite les calculs.

On utilise souvent la formule de **König** : $V(X)=\sum_i p_i x_i^2-\mu^2=E[X^2]-(E[X])^2$

On appelle **écart-type** de X le nombre σ défini par $\sigma=\sqrt{V(X)}$.

En reprenant une dernière fois l'exemple des deux pièces de monnaie, la variance de la variable aléatoire X est (avec la formule de König) : $V(X)=\underbrace{\frac{1}{4}\cdot 0^2+\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{4}\cdot 2^2}_{E[X^2]}-1^2=\frac{1}{2}$

Exercice 3.2

On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles.
a. Dessinez le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X.
b. Calculez $E[X]$.
c. Calculez $V(X)$.

Exercice 3.3

On jette deux dés équilibrés. On désigne par X le plus grand des deux chiffres montrés.
a. Dessinez le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X.
b. Calculez $E[X]$.
c. Calculez $V(X)$.

Exercice 3.4

Un dé est pipé de sorte que la probabilité d'apparition d'une face est proportionnelle à ce nombre. Soit X la variable aléatoire attachée au nombre de points qui apparaissent lorsqu'on lance ce dé.
a. Dessinez le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X.
b. Calculez $E[X]$.
c. Calculez $V(X)$.

3.3. Espérance de gain

Un lascar nous propose le jeu suivant : « Je lance deux pièces en l'air. Si on voit deux piles, je vous donne 3 francs, dans les autres cas, vous me donnez un franc. »
Ce jeu est-il équitable ?
Pour le savoir, on va calculer notre **espérance de gain**. Les deux côtés pile apparaîtront 1 fois sur 4. Nous gagnerons donc en moyenne 3 francs une fois sur quatre, et nous perdrons 1 franc trois fois sur quatre.

Notre espérance de gain est l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y, Y étant une fonction de la variable aléatoire X. On a :

$$E[Y]=E[g(X)]=\sum_{\mathrm{i}} p_i g(x_i)=\sum_{\mathrm{i}} p_i y_i$$

C'est plus simple qu'il n'y paraît. Les y_i sont :

$y_1 = g(x_1) = g[X=0] = -1$
$y_2 = g(x_2) = g[X=1] = -1$
$y_3 = g(x_3) = g[X=2] = 3$

Les probabilités respectives étant les mêmes que dans l'exemple du § 3.2, l'espérance de gain est :

$$E[Y]=\underbrace{\frac{1}{4}}_{p_1}\cdot\underbrace{(-1)}_{y_1}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{p_2}\cdot\underbrace{(-1)}_{y_2}+\underbrace{\frac{1}{4}}_{p_3}\cdot\underbrace{3}_{y_3}=0$$

Le jeu est équitable. Si notre lascar nous avait proposé plus de 3 francs, le jeu nous aurait favorisés, car notre espérance de gain aurait été positive. Inversement, s'il nous avait proposé moins de 3 francs, le jeu nous aurait été défavorable, car notre espérance aurait été négative.

Exercice 3.5

Un sac contient 5 jetons numérotés 1, 1, 2, 2, 3. On vous propose le jeu suivant :
Vous tirez un jeton au hasard et vous recevez alors une somme d'argent (positive ou négative !) égale au carré du nombre tiré, diminué de 4 francs.
Cette proposition est-elle avantageuse ?

Exercice 3.6

On vous propose un jeu qui se joue en lançant 3 dés. Pour jouer, il faut verser 1 franc. Pour 3 six je reçois 36 francs ; pour 2 six, 7 francs et pour 1 six, 1 franc.
Est-ce équitable ?

Exercice 3.7

On vous propose le jeu qui se joue en lançant 2 dés. Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1 franc. Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien. Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1 franc. Enfin, si les dés présentent le même chiffre pair, on gagne une somme égale au total des points des deux dés. Est-ce équitable ?

Exercice 3.8

Bob et Bobette jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Bob marque 1 point ; quand la somme est 6 ou le produit 4, Bobette marque 1 point. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 3.9

Calculez l'espérance de gain d'un billet de « Tribolo », dont le prix est de 2 francs. Pour info, 400'000 billets ont été imprimés. Les gains sont répartis ainsi :

74'000	x	2.–	=	148'000.–
31'800	x	4.–	=	127'200.–
2'100	x	10.–	=	21'000.–
1'250	x	20.–	=	25'000.–
700	x	50.–	=	35'000.–
100	x	100.–	=	10'000.–
60	x	500.–	=	30'000.–
8	x	1'000.–	=	8'000.–
1	x	10'000.–	=	10'000.–
110'019	**x**		**=**	**414'200.–**

Exercice 3.10

Avec 5 numéros gagnants et plus, les gains dépendent du nombre de gagnants et de la cagnotte. On a donné ci-contre des dotations réalistes.

Swiss Lotto

Jouer une grille coûte 1 franc. On doit cocher 6 numéros sur 45.

Le tirage au sort comprend 6 numéros. Un numéro complémentaire est encore tiré mais celui-ci n'entre en ligne de compte que si 5 des 6 premiers numéros tirés sont exacts.

Si on a 3 numéros cochés exacts, on gagne 6 francs.

Si on a 4 numéros cochés exacts, on gagne 50 francs.

Si on a 5 numéros cochés exacts, on gagne 4'000 francs.

Si on a 5 numéros cochés exacts plus le numéro complémentaire, on gagne 100'000 francs.

Si on a 6 numéros cochés exacts, on gagne 2 millions de francs.

Calculez l'espérance de gain au *Swiss Lotto* en ne remplissant qu'une seule grille (n'oubliez pas de soustraire le prix de la grille).

Exercice 3.11*

Indication

Vous devez maximiser votre espérance de gain… en priant pour qu'elle soit positive !

Demandez à un de vos amis de jouer avec vous au jeu suivant : asseyez-vous autour d'une table. Chacun des deux joueurs doit initialement cacher ses mains sous la table, puis, brusquement, montrer l'une des deux.

Si chacun a montré la main droite, votre partenaire vous donne 3 francs. Qu'il vous en donne 2 si chacun a montré la main gauche. Si, par contre, vous montrez la main droite et lui la gauche, donnez-lui 1 franc ; et si enfin, vous montrez la main gauche alors qu'il montre la droite, donnez-lui 4 francs.

Si vous jouez de nombreuses fois à ce jeu avec astuce (mais sans tricher), vous pouvez être sûr de gagner de l'argent.

Comment procéder ?

3.4. Loi de Poisson

Siméon Denis **Poisson**
(1781 - 1840)

Il introduisit cette distribution dans *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* (1837).

Une variable aléatoire discrète X pouvant prendre pour valeur 0, 1, 2, ... est dite **de Poisson avec paramètre λ** s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$p_k = Pr(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Dans la loi de Poisson $E[X] = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Le domaine d'application de la loi de Poisson a été longtemps limité à celui des événements rares comme les suicides d'enfants, les arrivées de bateaux dans un port ou les accidents dus aux coups de pied de cheval dans les armées (étude de Ladislaus Bortkiewicz).

Depuis quelques décennies, son champ d'application s'est considérablement élargi. Actuellement, on l'utilise beaucoup dans les télécommunications (pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné), le contrôle de qualité statistique, la description de certains phénomènes liés à la désintégration des noyaux radioactifs, la biologie, la météorologie, la finance pour modéliser la probabilité de défaut d'un crédit, ...

Exercice 3.12

Démontrez que la loi de poisson est bien une loi de probabilité.

Montrez pour cela que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ et que $p_k \geq 0$, pour tout k.

Exercice 3.13*

Démontrez que, dans la loi de Poisson, $E[X] = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Les variables aléatoires de Poisson peuvent être utilisées pour approcher des variables aléatoires binomiales de paramètre (n, p) pour autant que n soit grand et p assez petit pour que np soit d'ordre de grandeur moyen (environ 5).

Pour s'en convaincre, admettons que X soit une variable aléatoire binomiale de paramètre (n, p) et posons $\lambda = np$.

$$\Pr(X=k) = \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{C_k^n} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

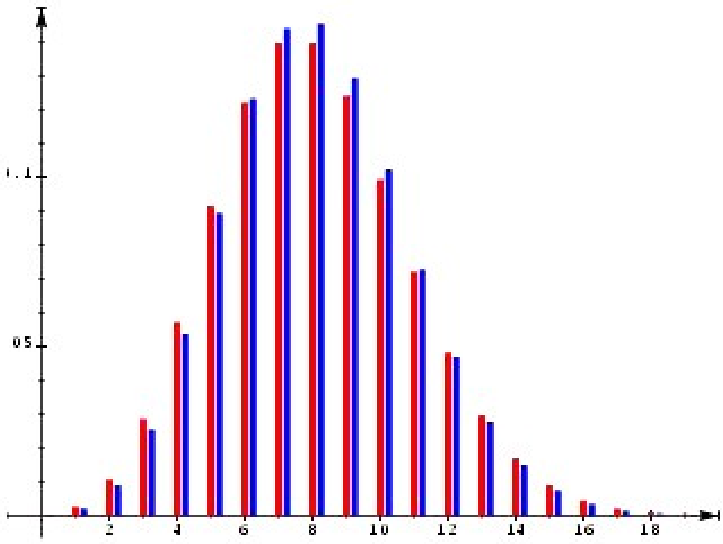
$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

Maintenant, pour n grand et λ modéré, on a :

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\approx 1 \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1$$

Donc, pour n grand et λ modéré : $p_k = \Pr(X=k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

En bleu, la loi binomiale (n = 100, p = 0.08) et en rouge la loi de Poisson de paramètre λ = 8.



Exemple

Un certain vaccin provoque chez un individu sur 800 environ une réaction dangereuse. Quelle probabilité y a-t-il, en vaccinant 3000 personnes, qu'il y ait

a. trois réactions dangereuses ?

b. plus de deux réactions dangereuses ?

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre total de réactions dangereuses. On a une distribution binomiale avec $p=\frac{1}{800}$; n = 3000 ; λ = 3.75.

a. $\Pr(X=3)=\frac{3000!}{3!2997!}\left(\frac{1}{800}\right)^3\left(\frac{799}{800}\right)^{2997} \approx \frac{3.75^3 e^{-3.75}}{3!} = 0.2067$

Loi binomiale *Loi de Poisson*

On voit que le calcul est grandement facilité par le recours à la loi de Poisson.

Les valeurs exactes données par la loi binomiale sont :

a. 0.20678

b. 0.7231

b. $\Pr(X>2)=1-\Pr(X\leqslant 2)=1-(\Pr(X=0)+\Pr(X=1)+\Pr(X=2))$

$$\approx 1-\left(\frac{3.75^0 e^{-3.75}}{0!}+\frac{3.75^1 e^{-3.75}}{1!}+\frac{3.75^2 e^{-3.75}}{2!}\right)=0.7229$$

Exercice π

Admettons que le nombre de fautes de frappe par page suive une loi de Poisson de moyenne 0.75. On ouvre un livre à une page au hasard.
Calculez la probabilité qu'il y ait au moins une faute de frappe sur cette page.

Processus de Poisson

D'une manière générale, lorsqu'un phénomène permet de supposer que

- un seul événement arrive à la fois,
- le nombre d'événements se produisant pendant un intervalle de durée t ne dépend que de la durée de cette période,
- les événements sont indépendants,

on dit que ce phénomène suit un **processus de Poisson**.
Si le nombre d'événements par unité de temps est égal à λ, on démontre que la probabilité d'obtenir k événements pendant un temps t est :

$$\Pr(X=k) \approx e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Exemple

Le nombre de tremblements de terre par semaine sur la côte ouest américaine suit une loi de Poisson de moyenne 2.
Quelle est la probabilité qu'il y ait 6 secousses pendant le prochain mois ?

On a λ = 2, et t = 4 (semaines). $\Pr(X=6) \approx e^{-(2\cdot 4)} \frac{(2\cdot 4)^6}{6!} = 0.122$.

Exercice 3.15

Le nombre moyen de chiens abandonnés chaque semaine au bord d'une route cantonale au mois de juillet est 2.5.

a. Calculez la probabilité qu'aucun chien ne soit abandonné entre le 7 et le 14 juillet.

b. Quelle est la probabilité que plus de 5 chiens soient abandonnés entre le 14 et le 21 juillet ?

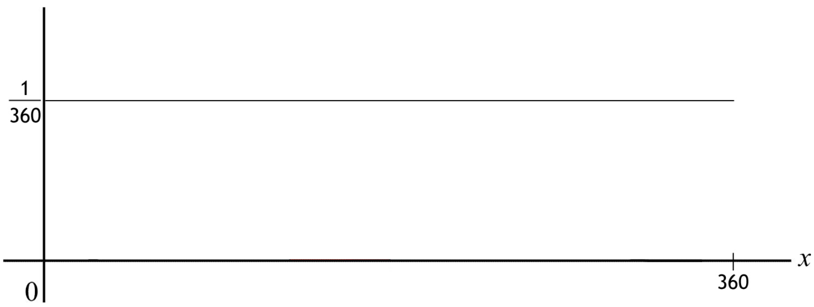
Exercice 3.16

En moyenne, 5 clients par heure entrent dans un magasin. La vendeuse ferme boutique pendant 5 minutes.
Quelle est la probabilité que plus d'un client trouve porte close ?

3.5. Variables aléatoires continues

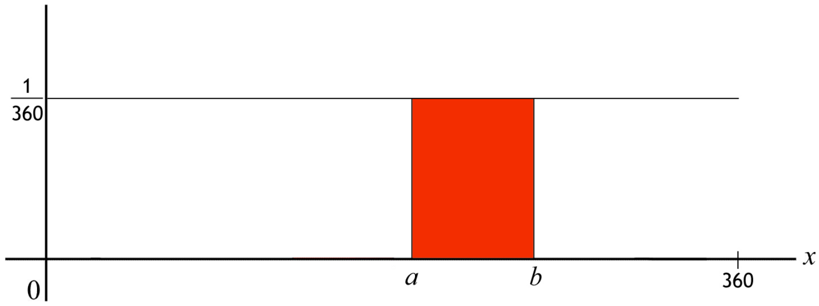
Imaginons une expérience où toutes les issues ont une probabilité 0. Un exemple simple est une girouette parfaite que l'on fait tourner à la main : à l'arrêt, elle peut indiquer n'importe quelle direction, et donc n'importe quel angle *réel* entre 0 et 360°. Il y a un nombre infini de valeurs possibles.
Certaines probabilités sont faciles à trouver, par exemple la probabilité d'indiquer un angle X compris entre 0 et 90° : $\Pr(0° \le X \le 90°) = 1/4$.
Mais qu'en est-il pour calculer la probabilité $\Pr(X = 90°)$? Comme il y a un nombre infini de valeurs possibles, la probabilité d'indiquer précisément 90° est nulle (!).
Par analogie avec les variables aléatoires discrètes, on peut représenter cette situation comme l'aire sous une courbe. Pour la girouette, cette courbe ressemble à ceci :

Remarquez que l'aire sous la courbe vaut 1.



La probabilité que la girouette indique un angle compris entre a et b est précisément l'aire orange sous la courbe, entre a et b.

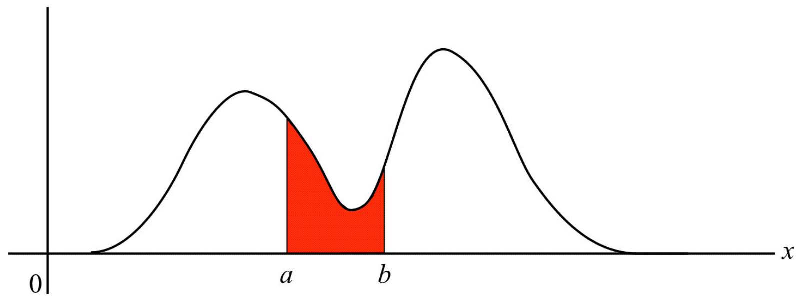
Ici, l'aire orange, qui est la probabilité, vaut
$$p=\frac{b-a}{360}$$



La courbe $y = f(x)$ est appelée **densité de probabilité** de la variable aléatoire continue X. Chaque variable aléatoire continue a sa propre fonction de densité. La probabilité $\Pr(a \leq X \leq b)$ est l'aire sous la courbe entre a et b.

Autrement dit, le calcul de cette probabilité revient au calcul d'une intégrale :

$$\Pr(a \leqslant X \leqslant b)=\int_a^b f(x)\,dx$$



Propriétés de *f (x)*

La courbe de densité $f(x)$ doit avoir certaines propriétés pour être compatible avec les axiomes des probabilités :

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

Moyenne et variance

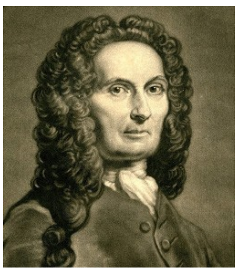
V. A. continues	à comparer avec	**V. A. discrètes**
$\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$		$\mu=\sum_{\text{tout } x} x\,p(x)$
$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$		$\sigma^2=\sum_{\text{tout } x} (x-\mu)^2 p(x)$

Fonction de répartition *F*(*x*)

On appelle **fonction de répartition** l'aire sous la courbe de densité de probabilité entre $-\infty$ et x.

$$F(x)=\Pr(X \leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

3.6. La loi normale de Gauss-Laplace



Abraham **de Moivre**
(1667-1754)

La **loi normale** (ou **loi gaussienne**, ou **loi de Gauss-Laplace**) est une des principales distributions de probabilité. Elle a été introduite par le mathématicien Abraham **de Moivre** en 1733 et utilisée par lui afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre n très grand. Cette loi a été mise en évidence par Gauss au 19ème siècle et permet de modéliser de nombreuses études biométriques.

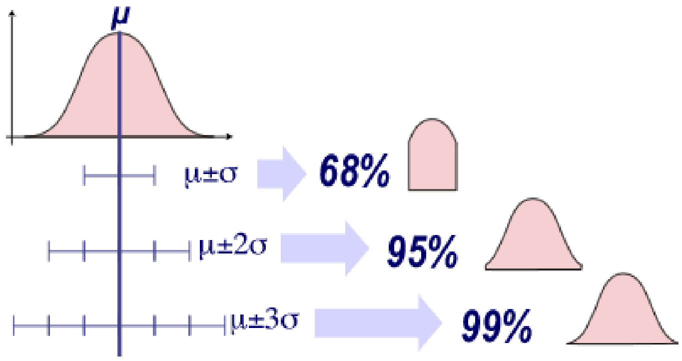
Le théorème de Moivre-Laplace affirme la convergence d'une loi binomiale vers une loi de Gauss quand le nombre d'épreuves augmente.

Une variable aléatoire X est dite **normale**, avec paramètres (μ ; σ) si la densité de probabilité de X est donnée par

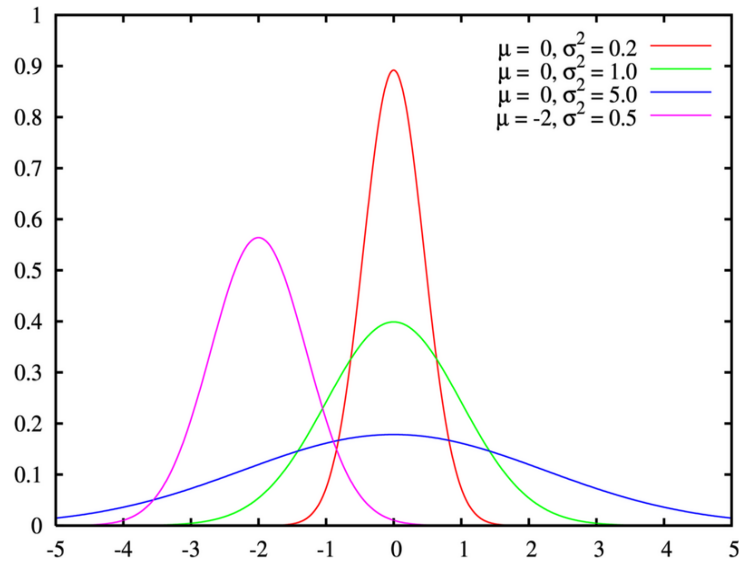
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Le graphe de cette densité est une courbe en **forme de cloche** avec un axe de symétrie vertical en μ.

On recalculera ces pourcentages à l'exercice 3.21



On voit ci-dessous l'influence de la moyenne μ et de la variance σ^2 sur la forme de la courbe.



Loi centrée réduite

C'est la courbe verte sur le graphe ci-dessus.

Une variable normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, c'est-à-dire de moyenne 0 et d'écart-type 1, est dite **standard** ou **centrée réduite**.

On note habituellement la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite par le symbole Φ :

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Cette fonction de répartition $\Phi(x)$ n'ayant pas de forme analytique, on se réfère à une table numérique où elle est tabulée pour différentes valeurs de x.

Exercice 3.17 Esquissez la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

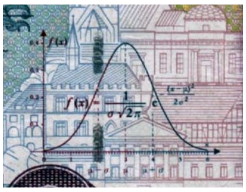
Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	**0.05**	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	**0.9505**	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

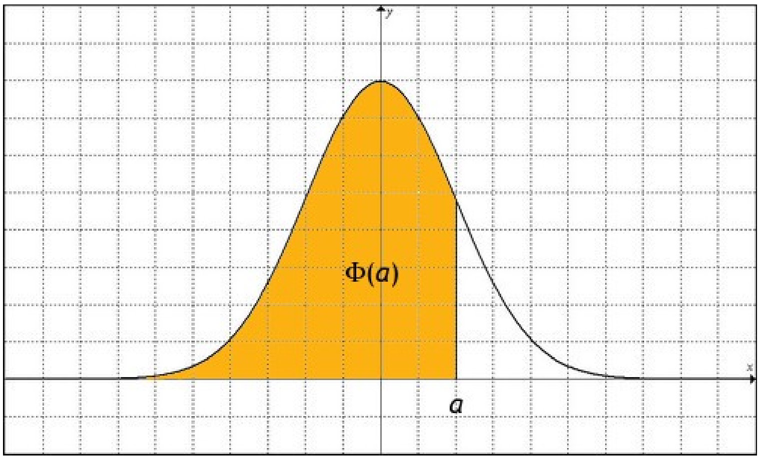
La table ci-dessus contient les valeurs de $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

On lit les décimales dans les lignes, et les centièmes dans les colonnes. Par exemple, la valeur de $\Phi(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05 ; on trouve $\Phi(1.65) = 0.9505$, à 10^{-4} près.

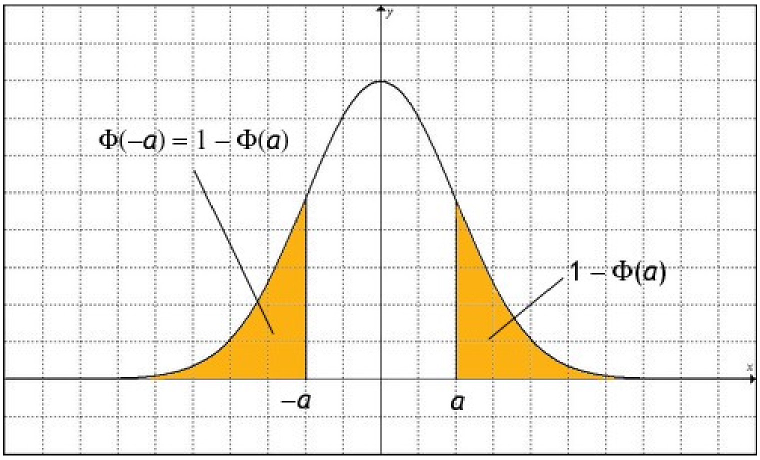
Si on a plus de chiffres après la virgule, la réponse n'est pas dans la table, mais peut se trouver par interpolation. Par exemple, la valeur $\Phi(1.652)$ se trouve entre $\Phi(1.65) = 0.9505$ et $\Phi(1.66) = 0.9515$. Par la règle de trois, on trouve la valeur $\Phi(1.652) = 0.9507$.



Le tableau donne la valeur de l'aire sous la courbe entre $-\infty$ et a.
Ainsi, $\Pr(X \leq a) = \Phi(a)$.

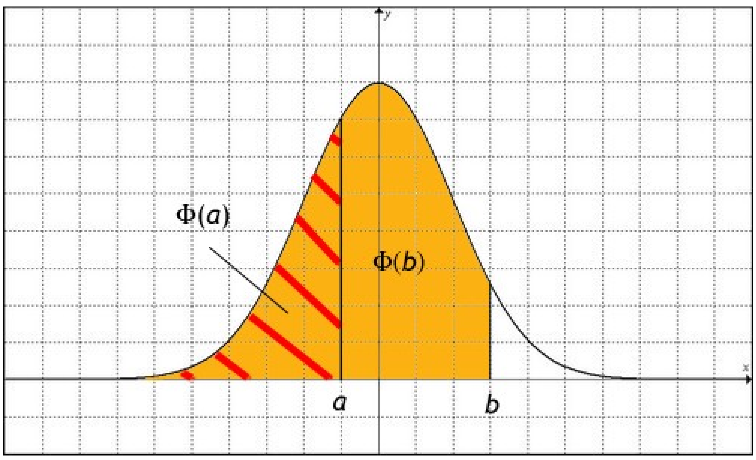


Le tableau ne comprend pas les valeurs de a négatives, mais, vu que la courbe de Gauss est symétrique, on utilise la relation $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ pour les valeurs négatives de a (il faut se souvenir que l'aire sous la courbe entre $-\infty$ et $+\infty$ vaut 1).



Pour déterminer la probabilité de se situer entre a et b, on utilise la formule :

$$\Pr(a < X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$



Exercice 3.18 On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Calculez

a. $\Pr(0 \le X \le 1.42)$ **b.** $\Pr(-1.37 \le X \le 2.01)$
c. $\Pr(X \ge 1.13)$ **d.** $\Pr(-0.5 \le X \le 0.5)$
e. $\Pr(-1 \le X \le 1)$

Exercice 3.19 Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. Trouvez t pour que

a. $\Pr(0 \le X \le t) \approx 0.4236$ **b.** $\Pr(X \le t) \approx 0.7967$
c. $\Pr(X \le t) \approx 0.0655$ **d.** $\Pr(t \le X \le 2) \approx 0.1$

Propriétés

Si une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, la variable aléatoire centrée réduite $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$$\Pr(a < X \leqslant b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < X^* \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

En effet, si on effectue la substitution $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, les bornes d'intégration deviennent $\frac{a-\mu}{\sigma}$ et $\frac{b-\mu}{\sigma}$. On a d'autre part $dt = \frac{1}{\sigma}dx$.

D'où $\Pr(a < X \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$

1. $\Pr(a < X \leqslant b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < X^* \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

2. $\Pr(X^* \leqslant -x) = \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

3. $\Pr(-x \le X^* \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$

Exercice 3.20 On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(5\,;\,5)$. Calculez

a. $\Pr(0 \le X \le 1)$ **b.** $\Pr(-1 \le X \le 2)$
c. $\Pr(X \ge 7)$ **d.** $\Pr(3 \le X \le 7)$

Exercice 3.21 On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$. Calculez la probabilité que X soit compris

a. entre $\mu-\sigma$ et $\mu+\sigma$
b. entre $\mu-2\sigma$ et $\mu+2\sigma$
c. entre $\mu-3\sigma$ et $\mu+3\sigma$

Exercice 3.22 La taille des conscrits suit une loi normale de moyenne 173 cm et d'écart-type 8 cm. Quelle est la probabilité qu'un conscrit pris au hasard mesure entre 160 cm et 175 cm ?

Exercice 3.23 La température en Suisse au mois de mai suit une loi normale de moyenne 20°C et d'écart-type 3°C. Calculez la probabilité que la température un jour donné de mai soit comprise entre 21°C et 26°C.

Exercice 3.24 Les résultats d'un examen (exprimés en points) suivent une loi normale $\mathcal{N}(76\,;\,15)$. Calculez le nombre minimal de points à exiger pour faire réussir au moins 90 % des candidats.

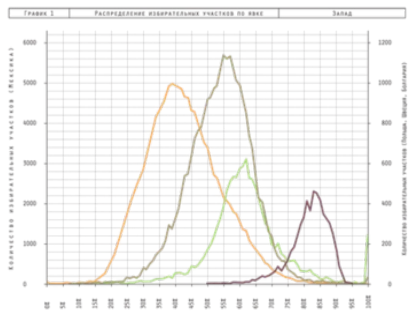
Exercice 3.25 Une machine permet de remplir automatiquement des paquets de farine. La masse M désirée est réglable. En réalité, la masse de farine effectivement versée est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne M et d'écart-type égal à 3 % de M.
Sur quelle valeur de M faut-il régler la machine pour que 95 % des paquets contiennent au moins 1 kg ?

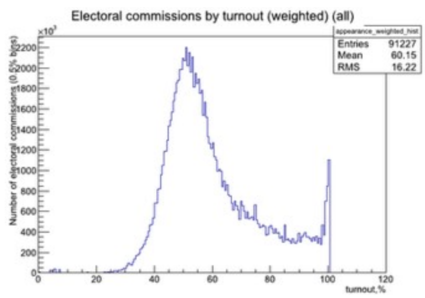
Exercice 3.26

Des élections législatives ont eu lieu en Russie le 4 décembre 2011, remportées largement et sans surprise par le parti de Vladimir Poutine. Le 10 décembre, des dizaines de milliers de manifestants se sont réunis dans le centre de Moscou pour dénoncer les résultats. Parmi les banderoles, des symboles mathématiques ! Sur celle ci-dessous, on peut lire « Pour la loi normale ! ».

Parmi les autres slogans : « Nous croyons Gauss, nous ne croyons pas Churov ! » (Vladimir Churov est le président de la commission électorale centrale). « On ne peut pas tromper Gauss ».

Pour chaque élection, on peut tracer une courbe avec en abscisse un pourcentage de participation et en ordonnée le nombre de bureaux de vote qui ont enregistré ce pourcentage. Sur le graphique de gauche ci-dessous, on a tracé les quatre courbes (de gauche à droite) pour les élections législatives au Mexique en 2009, au deuxième tour des élections présidentielles polonaises en 2010, aux élections législatives bulgares en 2009 et suédoises en 2010. On y observe des courbes en cloche de Gauss. Voici à droite la courbe correspondant aux élections législatives de 2011 en Russie.





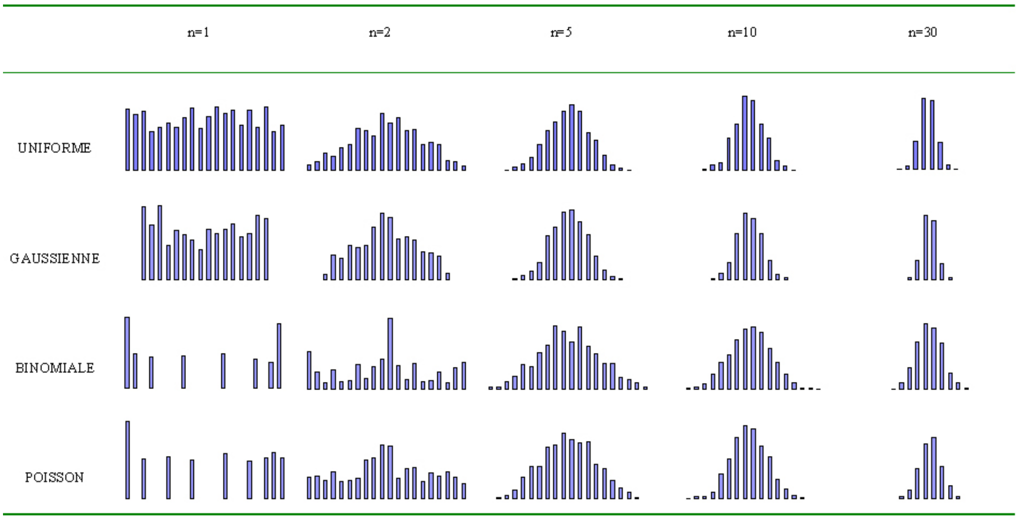
Comment peut-on expliquer cette anomalie ?

Théorème central limite

On note $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ la somme de n variables aléatoires indépendantes de même moyenne μ et de même écart-type σ.

La variable aléatoire centré réduite $T^* = \dfrac{T - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ si $n \to \infty$.

Voici ci-après une illustration du théorème central limite pour les quatre lois que nous connaissons : uniforme, gaussienne, binomiale, Poisson.



Exercice 3.27

On lance 10 dés équilibrés. Utilisez le théorème central limite pour évaluer la probabilité que la somme des dix résultats soit comprise entre 30 et 40 (bornes comprises).

Alexandre Mikhailovitch **Liapounov** (1857-1918)

Le théorème central limite, un des piliers de la théorie des probabilités, fournit une méthode simple pour calculer des probabilités liées à une somme de variables aléatoires. Il explique également le fait remarquable que beaucoup de phénomènes naturels suivent une distribution ayant la forme d'une courbe en cloche, c'est-à-dire une distribution normale.

En 1733, Abraham **de Moivre**, mathématicien anglais, le démontra dans le cas des variables de Bernoulli avec $p = 0.5$. **Laplace** l'étendit à un p quelconque en 1812. Il fallut ensuite attendre jusqu'en 1902 pour que le mathématicien russe Alexandre **Liapounov** le démontre rigoureusement dans tous les cas.

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

n : nombre d'épreuves

p : probabilité de succès

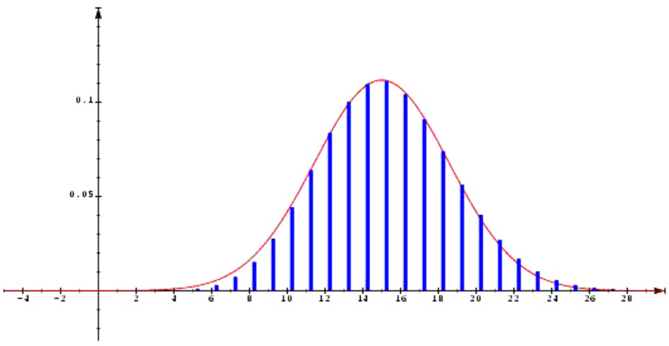
Pour le cas de la loi binomiale, on peut énoncer le théorème suivant.

Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ avec n grand (dans la pratique, on exige $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$), on peut estimer $\Pr(a \leq X \leq b)$ avec la loi normale $\mathcal{N}(\ np\ ;\ \sqrt{np(1-p)}\ )$.

$$\Pr(a \leqslant X \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

En bleu, la loi binomiale $\mathcal{B}(100, 0.15)$ et en rouge la loi normale $\mathcal{N}(15, 3.57071)$.

Note : $\sqrt{100 \cdot 0.15 \cdot 0.85} = 3.57071$



Exercice 3.28 On lance 100 fois une pièce de monnaie. Estimez la probabilité d'observer...

a. moins de 60 fois pile.
b. moins de 36 fois pile.
c. un nombre de fois pile strictement compris entre 35 et 60.

Exercice 3.29 On lance 90 fois un dé. Estimez la probabilité d'observer...

a. moins de 10 fois un six.
b. un nombre de six strictement compris entre 20 et 50.

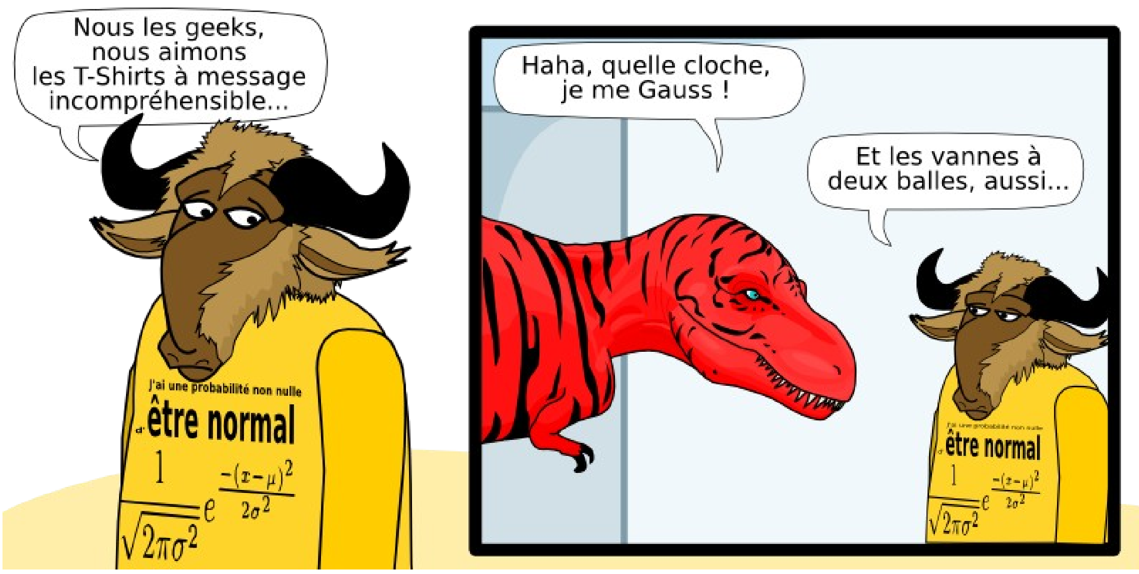
Exercice 3.30 On considère 10'000 chiffres (de 0 à 9) pris au hasard. Calculez la probabilité que le chiffre 3 apparaisse plus de 850 fois.

Exercice 3.31 Au jass, après chaque donne, on a neuf cartes en main. Il y a quatre couleurs (pique, cœur, trèfle et carreau) et neuf cartes par couleur (6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). Quelle est la probabilité...

a. d'avoir quatre valets lors d'une donne ?
b. d'avoir cinq fois les quatre valets en recevant 935 donnes ? Donnez le résultat exact et les approximations avec la loi de Poisson et la loi normale.

3.7 Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître la définition d'une variable aléatoire discrète ❑ ok
Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète ❑ ok
Connaître la définition d'une loi de probabilité ❑ ok
Savoir calculer et interpréter l'espérance de gain ❑ ok
Connaître et savoir appliquer la loi de Poisson et le processus de Poisson ❑ ok
Savoir approcher la loi binomiale avec la loi de Poisson ❑ ok
Connaître la définition d'une variable aléatoire continue ❑ ok
Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire continue ❑ ok
Connaître et savoir appliquer la loi normale ❑ ok
Savoir approcher la loi binomiale avec la loi normale ❑ ok



Solutions des exercices

Chapitre 1

1.1. $\frac{n(n-1)}{2}$

1.2. $\frac{n(n-3)}{2}$

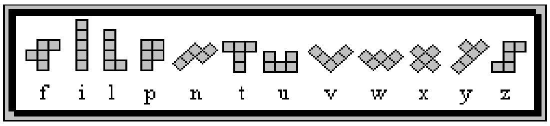
1.3. Il devrait y avoir 64 tuiles, mais le jeu réel n'en a que 56.

1.4. **a.** 5 étages **b.** 18 étages

1.5. 1) **a.** 34'560'000 mots **b.** 10'368'000 mots
2) **a.** 13'953'600 mots **b.** 2'462'400 mots

1.6. oui

1.7. 12 pentaminos :



1.8. **a.** 4 9 1 6 8 3 2 5 7
b. (1)(2 5 6 4)(3 8)(7 9)
c. 12 fois
d. 4 fois

1.10. 677 habitants

1.11. 256 couleurs

1.12. **a.** 40320 **b.** 1152 **c.** 2880 **d.** 384

1.13. **a.** $4.79 \cdot 10^8$ **b.** $3.99 \cdot 10^7$

1.14. 64

1.15. **a.** 24 **b.** 83'160 **c.** 39'916'800

1.16. **a.** 2184 **b.** 792 **c.** 468 **d.** 1188

1.17. **a.** 120 **b.** 120

1.18. 36

1.19. **a.** 462 **b.** 210 **c.** 378

1.20. On peut construire en tout 76 pièces différentes. Une variante nommée **Triominos Excel** contient effectivement les 76 pièces.

1.21. **a.** 286 **b.** 165 **c.** 110 **d.** 80
e. 276

1.22. **a.** 1377 **b.** 27

1.23. **a.** 8'145'060 **b.** 182'780

1.24. utiliser le principe des tiroirs

1.25. **a.** 48'620 **b.** 11'440 **c.** 201'376
d. 7'596'960 **e.** 15'911

1.26. **a.** Cent mille milliards de poèmes
b. env. 190'128'527 années

1.27. **a.** $n = 9$ **b.** $n = 9$ **c.** $n = 5$

1.28. 8008

1.29. **a.** Il y a 108 manières de traverser.
b. La plus rapide dure 15 minutes.

1.30. **a.** 456'976'000
b. 277'977'744
c. 272'732'994

1.31. **a.** $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$
b. 147'420 $r^{12}s^{24}$

Chapitre 2

2.1. Ω = {pp, pf, fp, ff}

2.2. Ω = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}

2.3. Ω = {123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432}

2.4. 0.277775

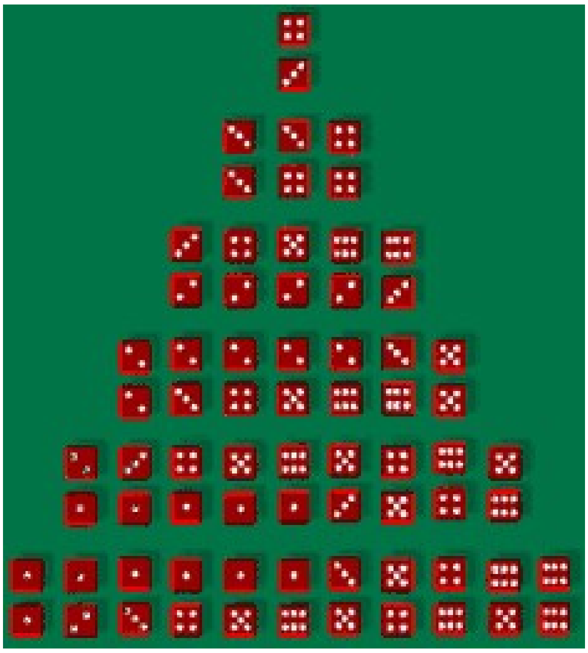
2.5. **a.** 1/18 **b.** 1/36 **c.** 1/6 **d.** 5/36

2.6. 1/4

2.7. **b.** 0 **c.** 1/2 **d.** 5/8

2.8. 0.3

2.9.



2.10. 6/11

2.11. **a.** 0.701 **b.** 0.696

2.12. 32/663

2.13. **a.** $1.54 \cdot 10^{-6}$ **b.** $1.39 \cdot 10^{-5}$ **c.** 0.00024
d. 0.00144 **e.** 0.00197 **f.** 0.00392
g. 0.0211 **h.** 0.0475 **i.** 0.4226

2.14. 23

2.15. 9/28

2.16. 1681/3364 = 0.4997

2.17. On double ses chances en changeant de porte ! On a alors 2 chances sur 3 de gagner.

2.18. **a.** 0.6 **b.** 0.5 **c.** 0.3
d. 0.2 **e.** 0.1 **f.** 0.9
g. 0.8 **h.** 0.4 **i.** 0.7

2.19. **a.** 3/5 **b.** 4/5

2.20. 1/3

2.21. si $i < 7$, $p = 0$ si $i = 7$, $p = 1/3$ si $i = 8$, $p = 2/5$
si $i = 9$, $p = 1/2$ si $i = 10$, $p = 2/3$
si $i = 11$, $p = 1$ si $i = 12$, $p = 1$

2.22. 1/3

2.23. 7/11

2.24. **a.** 1/3 **b.** 1/2

2.25. 0.0472 (étonnant non ?)

2.26. oui (formule de Bayes)

2.27. Utilisons la formule de Bayes. Avec les chiffres donnés, et en supposant que les événements soient indépendants (ce qui n'est pas le cas), on arrive à une probabilité de culpabilité de 1 %. En étant plus prudent on peut estimer cette probabilité à moins de 10 %.

2.28. 4/13

2.29. non

2.30. oui

2.31. 1/2

2.32. **a.** 0.3 **b.** 0.1 **c.** 0.5
d. 0.4 **e.** 2/7 **f.** non

2.33. **a.** 14/25 **b.** non **c.** 8/33

2.34. **a.** 0.24 **b.** 0.506 **c.** 0.3825

2.35. 8/27

2.36. 13 fois

2.37. **a.** env. 0.000614 **b.** 56446 ans

2.38. environ 22 jours

2.39. au moins un 6 en 4 lancers

2.40. 5

2.41. **a.** Colin éliminé : 1/3, Louana éliminée : 1/6, match nul : 1/2
b. 15/16

2.42. **a.** $7.07 \cdot 10^{-7}$ **b.** $1.7 \cdot 10^{-5}$ **c.** $1.78 \cdot 10^{-3}$
d. 0.3368 **e.** 0.3895 **f.** 0.3132

2.43. **a.** 17/30 **b.** 1/2 **c.** 9/17

2.44. **a.** 1/3 **b.** 1/5

2.45. 253

2.46. **a.** 0.1201 **b.** 0.1601 **c.** 0.1761
d. 0.7368 **e.** 0.001288

2.47. $\frac{27}{64}$

2.49. 0.1329

2.50. **a.** 0.0207 **b.** 0.0113

2.51. avec la méthode 2 (0.375 contre $0.41\overline{6}$)

2.52. 0.0335

2.53. **a.** 0.028 **b.** 0.0005 **c.** 0.00068

2.54. **a.** 0.0109 **b.** 0.0041

2.55. **1. (a)** $P(A)=\frac{1}{28}$ $P(B)=\frac{4}{7}$ $P(C)=\frac{3}{14}$
$P(D)=\frac{3}{7}$ $P(E)=\frac{6}{7}$

(b) $\frac{1}{16}$

2.1. $P(F)=0.305$
$P(G)=0.0042$
$P(H)=0.067$

2.2. 83 jours

3. $\frac{15}{28}$

2.56. **a.** $\frac{57}{64}$ **b.** $\frac{7}{19}$
c. 1. 0.0013 **2.** 0.2935

2.57. **1.1.** $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(B)=\frac{3}{16}$
$P(C)=\frac{11}{16}$ $P(D)=\frac{1}{3}$

1.2. oui, car $P(A)\cdot P(E)=P(A\cap E)=\frac{1}{4}$

2.1. $\frac{1}{7}$

2.2. $\frac{1}{192}$

3. $\frac{63}{256}$

4. 47 fléchettes

5. $\frac{45}{256}$

Chapitre 3

3.2. **b.** 1.5 **c.** 0.75

3.3. **b.** $4.47\overline{2}$ **c.** 1.9714

3.4. **b.** $4.\overline{3}$ **c.** $2.\overline{2}$

3.5. Non, on perdra en moyenne 20 cts par partie

3.6. Oui

3.7. Non, on perdra en moyenne 17 cts par partie

3.8. Oui

3.9. – 96.45 centimes (on a soustrait les 2 frs du billet)

3.10. – 36.5 centimes

3.11.
L'astuce consiste à lever la main gauche avec une probabilité de 2/5, et vous gagnerez en moyenne 0.2 fr par partie.
En effet, si l'adversaire lève la main gauche, votre espérance de gain sera de $\frac{2}{5}\cdot 2+\frac{3}{5}\cdot(-1)=0.2$. S'il lève la main droite, elle sera de $\frac{2}{5}\cdot(-4)+\frac{3}{5}\cdot 3=0.2$.

3.12. $\sum_{k=0}^{\infty} p_k=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k\,!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=1$

3.13. $E[X]=\sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)\,!}=$

$\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j\,!}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda$ (on a posé $j=k-1$)

$$E[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+1)\lambda^j\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{j\,!}$$ (on a posé $j=k-1$)

$$=\lambda\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j\lambda^j\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{j\,!}}_{E[X]=\lambda}+\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{j!}}_{1}\right)=\lambda(\lambda+1)$$

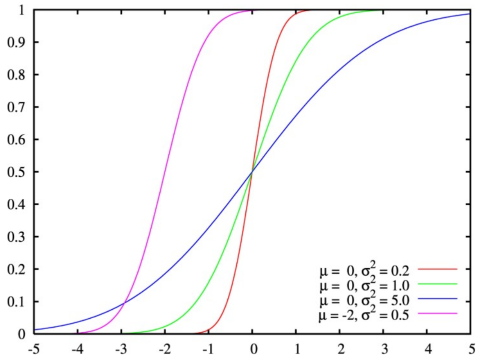
$$V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda(\lambda+1)-\lambda^2=\lambda$$

3.14. 0.5276

3.15. **a.** 0.08208 **b.** 0.04202

3.16. 0.06608

3.17.



3.18. **a.** 0.4222 **b.** 0.8924
c. 0.1292 **d.** 0.3829
e. 0.68268

3.19. **a.** 1.43 **b.** 0.83
c. −1.51 **d.** 1.16

3.20. **a.** 0.0532 **b.** 0.1592
c. 0.3446 **d.** 0.3108

3.21. **a.** 0.68268 **b.** 0.9545 **c.** 0.9973

3.22. 0.5466

3.23. 0.3479

3.24. 56

3.25. 1.0521

3.26. Bourrage d'urnes !

3.27. environ 0.65

3.28. **a.** 0.9713 **b.** 0.0019 **c.** 0.9694

3.29. **a.** 0.06 **b.** 0. 06

3.30. $\Phi(4.98) \approx 1$

3.31. **a.** 0.002139
b. loi binomiale : 0.036012
loi de Poisson : 0.036089
loi normale : 0.0317