Nombres complexes

1. Introduction

Rafael **Bombelli**

(1526 - 1572)

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

En 1535, en Italie, lors d'un tournoi mathématique, figuraient des problèmes se ramenant à une équation du troisième degré. Niccolo Fontana, dit **Tartaglia** (« Le Bègue ») triompha en utilisant la formule de résolution simplifiée $x^3 + px = q$, découverte en 1526 par **Scipion del Ferro** (del Ferro l'avait confiée à son disciple Fior, qui l'avait utilisée lors d'un duel avec Tartaglia). Tartaglia connaissait déjà une méthode de résolution d'une équation du type $x^3 + ax^2 = b$. **Cardan**, qui participait à ce tournoi, arriva à convaincre Tartaglia de lui dévoiler ses formules, en lui promettant de ne pas les divulguer.

En 1545, Cardan ne tint pas sa promesse et publia, dans son « Ars magna », la méthode générale de résolution des équations du troisième degré. La formule de résolution fut alors appelée *Formule de Cardan*, et cette appellation est encore actuelle !

En 1546, Tartaglia publia à son tour sa théorie du troisième degré, en y ajoutant diverses considérations sur la science des nombres et des curiosités mathématiques.

En 1550, **Bombelli** approfondit la *Formule de Cardan*. Il constata, après d'autres, que dans certains cas, la résolution conduit à des expressions de la $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, … Dans son *Algebra* (publié en 1572), il fut le premier à donner un sens à ces racines de nombres négatifs. Il les traita comme des nombres réels ; il les appela « nombres sophistiques », décida d'opérer sur eux comme si c'étaient des nombres réels et formula des règles de multiplication.

Par la suite, les mathématiciens tentèrent de bâtir une théorie avec ces nombres *imaginaires*. Vers 1750, le Suisse **Euler** introduisit la notation $i = \sqrt{-1}$. Selon Euler (1770) : *« Toutes les expressions comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, … sont des nombres impossibles ou imaginaires, puisqu'ils représentent les racines carrées de quantités négatives ; de ces nombres, nous pouvons seulement affirmer qu'ils ne sont ni zéro, ni supérieurs à zéro, ni inférieurs à lui, ce qui nécessairement les rend imaginaires ou impossibles. »*

Wessel (1798), **Argand** (1806) et finalement **Gauss** (1831-1832) donnèrent une interprétation géométrique des nombres imaginaires.

Gauss introduisit l'expression « nombres complexes » pour désigner ces nombres *imaginaires*, et il montra que tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

En 1835, **Hamilton** (mathématicien irlandais) donna une théorie complète des nombres complexes, théorie encore conservée de nos jours.

Les nombres complexes ont été difficilement acceptés par la communauté mathématique. Introduits peu après les nombres relatifs, eux-mêmes longtemps rejetés, ils ont permis de résoudre des types d'équations dont les recherches de solutions n'étaient même pas envisageables à l'époque.

Un exemple pratique

Soit l'équation du deuxième degré $x^2 + 4x + 9 = 0$.

$\Delta = 16 - 4 \cdot 9 = -20$

Cette équation n'a pas de solutions réelles, car le discriminant est négatif. Pourtant, lorsque l'on demande au logiciel *WolframAlpha* de trouver les racines, il donne comme résultats $x_1 = -2 - i\sqrt{5}$ et $x_2 = -2 + i\sqrt{5}$.

Que se passe-t-il ? Et que signifie le symbole i ?

On désigne par i (comme imaginaire) le nombre tel que $i^2 = -1$.

Vérifions que les nombres trouvés ci-dessus par *WolframAlpha* sont bien les racines de $x^2 + 4x + 9$.

En effet,
$5 \cdot i^2 = 5 \cdot (-1) = -5$

Si $x_1 = -2 - i\sqrt{5}$, $(-2 - i\sqrt{5})^2 + 4(-2 - i\sqrt{5}) + 9 = 4 + 4\sqrt{5}i + 5i^2 - 8 - 4\sqrt{5}i + 9 = 4 - 5 - 8 + 9 = 0$

Si $x_2 = -2 + i\sqrt{5}$, $(-2 + i\sqrt{5})^2 + 4(-2 + i\sqrt{5}) + 9 = 4 - 4\sqrt{5}i + 5i^2 - 8 + 4\sqrt{5}i + 9 = 4 - 5 - 8 + 9 = 0$

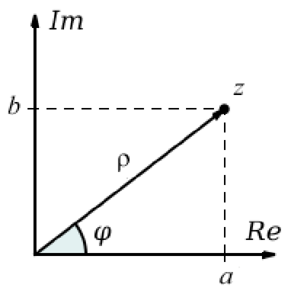
Les deux solutions sont bien correctes.

2. Définitions des nombres complexes

On appelle **nombres complexes** les expressions de la forme $z = a + bi$, avec $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est désigné par $\mathbb{C}$.
On appelle a la **partie réelle** et b la **partie imaginaire** du nombre complexe z. On les note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.
On dit que les deux nombres complexes $z = a + bi$ et $\bar{z} = a - bi$ sont **conjugués** s'ils ne diffèrent que par le signe de leur partie imaginaire.
Deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ sont égaux si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.
Un nombre complexe est égal à zéro si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

Représentation géométrique des nombres complexes

Tout nombre complexe $z = a + bi$ peut être représenté sur le plan par un point $P(a, b)$, et réciproquement, tout point P du plan peut être considéré comme l'image géométrique du nombre complexe $z = a + bi$.
On représente souvent le nombre complexe $z = a + bi$ par le vecteur $\overrightarrow{OP}$. L'angle que forme ce vecteur avec l'axe horizontal est appelé l'argument de z. La longueur du vecteur $\rho = |z|$ est appelée le module.
Un nombre complexe peut également être écrit sous la forme trigonométrique $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.



Le plan sur lequel on représente les nombres complexes est appelé plan complexe. Tout point de l'axe horizontal correspond à un nombre réel (quand $b = 0$). Tout point de l'axe vertical correspond à un nombre purement imaginaire puisque $a = 0$. C'est pourquoi on appelle l'axe horizontal l'axe réel (Re) et l'axe vertical l'axe imaginaire (Im).

3. Opérations sur les nombres complexes

Soient $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$

Addition

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Soustraction

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

Multiplication

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i$$

En effet, $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2$.
En regroupant les termes et en se rappelant que $i^2 = -1$, on trouve la formule proposée.

Multiplication avec le conjugué

Le produit d'un nombre complexe avec son conjugué est un nombre réel :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

En effet, on cherche un nombre complexe tel que $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + y i$.
On a donc bien $a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + y i)$, que l'on peut également écrire $a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x) i$.

x et y sont déterminés par le système d'équations : $\begin{cases} a_1 = a_2 x - b_2 y \\ b_1 = b_2 x + a_2 y \end{cases}$

En résolvant ce système, on trouve la formule proposée.
Si on ne se rappelle plus la formule, on peut la retrouver en amplifiant la fraction par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Inverse

À vérifier en exercice !

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Exercice 1

Soit $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = i - 3$

Calculez **a.** $z_1 + z_2$ **b.** $z_1 \bar{z}_2$ **c.** $z_1 \bar{z}_1$ **d.** $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$

Exercice 2

Soit $z_1 = 4 - \frac{2}{3} i$, $z_2 = -3 - \frac{4}{5} i$, $z_3 = -\frac{2}{5} + \frac{7}{3} i$.

Calculez **a.** $z_2 - z_3$ **b.** $z_1 z_2$ **c.** $z_1 z_3 + z_2 z_3$ **d.** $\frac{z_1}{z_2}$

Exercice 3

Soit : $z_1 = 7 - 5i$ $z_2 = 2 + i$ $z_3 = -5 + 2i$
$z_4 = -10 - 3i$ $z_5 = 8$ $z_6 = 8i$

Calculez

a. $z_1 - z_3 - z_5$ **b.** $z_1 z_3 z_4$ **c.** $z_3^2 + z_4^2$ **d.** $i \cdot z_4 - z_3 z_6$ **e.** Im (z_4)

f. Re $(z_1^2 z_3)$ **g.** Im $(2z_2 - 3z_3)$ **h.** $\frac{z_1}{z_6}$ **i.** $\frac{z_1}{z_2}$ **j.** $z_4 \bar{z}_4$

Exercice 4

a. Calculez i^2, i^3, i^4, i^5, … Représentez ces valeurs sur le plan complexe. Donnez la formule générale pour i^n.

b. Soit $z = 3 + 4i$. Calculez zi, zi^2, zi^3, zi^4. Représentez ces valeurs sur le plan complexe. Que constatez-vous géométriquement ?

4. Forme trigonométrique

Comment exprimer $z = a + bi$ sous la forme $z=\rho(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$?
On a les relations suivantes pour trouver le module et l'argument :

$$\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{(d'après le théorème de Pythagore)}$$

$$\varphi=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Attention! φ est déterminé à π près : $\varphi=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a > 0$,

$\varphi=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi$ si $a < 0$.

Si les nombres complexes sont exprimés sous leur forme trigonométrique, certaines opérations sont plus simples à mémoriser.

Multiplication

$$z_1 z_2=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe dont le module est égal au produit des modules des facteurs et dont l'argument est égal à la somme des arguments des facteurs.

En effet, $z_1 z_2=\rho_1(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))\cdot\rho_2(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)) =$

$\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+i^2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) =$

$\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2))+i(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) =$

$\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Rappels sur les relations trigonométriques :

$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$

Division

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Le quotient de deux nombres complexes est un nombre complexe dont le module est égal au quotient des modules des facteurs ; l'argument est égal à la différence des arguments respectifs du dividende et du diviseur.

Soit $\frac{\rho_1(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))}{\rho_2(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2))}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

Pour vérifier cette égalité, multiplions la partie droite de l'égalité par le dénominateur de la partie gauche. Cela revient à multiplier deux nombres complexes.

$\rho_2(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2))\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) =$ (selon la formule de multiplication)

$\rho_2\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_2+(\varphi_1-\varphi_2))+i\sin(\varphi_2+(\varphi_1-\varphi_2)))=\rho_1(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))$

On a bien retrouvé le numérateur de la partie gauche.

Inverse

À vérifier en exercice !

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho}(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi))$$

Cette formule découle de celle de la division, avec $\rho_1=1$ et $\varphi_1=0$.

Élévation à une puissance

$$z^n=[\rho(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))]^n=\rho^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$$

Abraham de Moivre, né **Abraham Moivre** (1667-1754) est un mathématicien français.

Cette formule découle de celle de la multiplication. Elle est appelée formule de Moivre. Elle montre que quand on élève un nombre complexe à une puissance entière positive, le module de ce nombre est élevé à cette puissance et l'argument est multiplié par l'exposant de cette puissance.

Exercice 5

Écrivez sous la forme $z = a + bi$ les nombres complexes dont le module et l'argument sont les suivants :

a. $\rho=2, \varphi=\pi$ **b.** $\rho=\sqrt{2}, \varphi=\frac{\pi}{6}$ **c.** $\rho=\frac{1}{2}, \varphi=\frac{5\pi}{4}$

Exercice 6

Donnez le module et l'argument des nombres complexes ci-dessous.
Conseil : faites un petit schéma afin de donner le bon argument.

a. i **b.** $3 - 4i$ **c.** $-5i - 2$

d. $\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^{30}$ **e.** $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}}\right)^{17}$

Extraction des racines

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe le nombre complexe qui, élevé à la puissance n, donne le nombre figurant sous la racine.
Ainsi, nous avons que $\sqrt[n]{\rho(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))}=r(\cos(\psi)+i\sin(\psi))$
si $r^n(\cos(n\psi)+i\sin(n\psi))=\rho(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$.

Puisque, pour deux nombres complexes égaux, leurs modules sont égaux et la différence de leurs arguments est un multiple de 2π, nous pouvons écrire :

$$r^n=\rho \quad \text{et} \quad n\psi=\varphi+2k\pi\ .$$

Et nous trouvons :

$$r=\sqrt[n]{\rho} \quad \text{et} \quad \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

où k est un entier arbitraire et $\sqrt[n]{\rho}$ la racine arithmétique (c'est-à-dire un nombre réel positif) du nombre positif ρ . Par conséquent :

$$\sqrt[n]{\rho(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \text{ avec } k = 0, \ldots, n-1.$$

Il y a n racines $n^{\text{ièmes}}$ différentes situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{\rho}$ et formant un polygone régulier.

Exercice 7

Résolvez $z^5 = -32$.
Représentez les cinq solutions dans le plan complexe.

Exercice 8

Calculez toutes les solutions (réelles et complexes) :

a. $\sqrt{15+8i}$ **b.** $\sqrt[3]{8}$ **c.** $\sqrt[4]{1+i}$

Représentez ces solutions dans le plan complexe.

Exercice 9 Résolvez dans $\mathbb{C}$:

a. $(z-2)^2 = 289$ **b.** $(z-3)^2 = -64$

c. $z^2 + (2-4i)z + 1 - 4i = 0$ **d.** $z^4 + 2(2i-1)z^2 - (3-4i) = 0$

Exercice 10 Résolvez dans $\mathbb{C}$ le système :

$$\begin{cases} 3z_1 + 2z_2 = 7 + i \\ 5z_1 - 3z_2 = -1 + 8i \end{cases}$$

Exercice 11 Trouvez les solutions de l'équation $z + |z| = -4 + 10i$.

Rappel : $|z|$ est le module de z. Ne pas confondre avec la valeur absolue.

Exercice 12* Soient $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1$ deux nombres complexes qui sont les premiers termes d'une progression géométrique.

a. Déterminez les trois termes suivants z_3, z_4 et z_5.

b. Représentez ces points dans le plan complexe.

c. Déterminez la longueur de la ligne polygonale joignant z_1 à z_2, z_2 à z_3, …, z_{n-1} à z_n, quand n tend vers l'infini.

Exercice 13* Déterminez les racines du polynôme $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Dessinez-les dans le plan complexe.

Indication : cherchez une progression géométrique.

---

5. Formule d'Euler

$$\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = e^{i\varphi}$$

On peut démontrer cette formule en utilisant les *développements de Maclaurin* (voir chapitre 4 « Approximation de fonctions » dans le cahier « Suites et séries »).

De la formule d'Euler, il suit que l'on peut aussi écrire un nombre complexe sous la forme :

$$\rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \rho e^{i\varphi}$$

Exercice 14 Donnez sous la forme cartésienne $a + bi$:

a. $\ln(\cos(x) + i\sin(x))$ **b.** e^{3-2i} **c.** $\ln(i-1)$

d. $\log_4(i-1)$ **e.** $\ln(-1)$ **f.** $(\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{4}}$

Pour **f**, ne donnez qu'une solution (il y en a quatre en tout).

Exercice 15 Soit $z = 2 - i$. Calculez le module et l'argument de :

a. e^{-2iz} **b.** $\ln(2z)$ **c.** $\ln(3+iz)$

6. Théorème fondamental de l'algèbre

Que pouvons-nous dire sur les racines d'un polynôme quelconque ?
Tant que l'on ne travaille qu'avec des nombres réels, la situation est assez compliquée (0, 1 ou 2 racines pour les polynômes de degré 2, les polynômes de degré 3 ont toujours une racine réelle, etc.)
L'introduction des nombres complexes simplifie radicalement les choses.

Théorème 1 (théorème fondamental de l'algèbre)

Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ n nombres **complexes** (ou réels), $n \geq 1$, $a_n \neq 0$.
Soit le polynôme :

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

Alors il existe n solutions réelles ou complexes à l'équation : $P_n(z) = 0$.

Corollaire 1

Dans $\mathbb{C}$, si $P_n(z)$ est un polynôme de degré n, on peut le décomposer en un produit de n polynômes de degré 1 :

$$P_n(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$$

où $z_1, z_2, \ldots z_n$ sont les n solutions de l'équation $P_n(z) = 0$.

Théorème 2

Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ sont n nombres **réels**, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$.
Soit le polynôme :

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

Si z_1 est une solution complexe de l'équation $P_n(z) = 0$, alors son conjugué l'est aussi : $P_n(z_1)=0 \Leftrightarrow P_n(\bar{z}_1)=0$.
Donc, dans $\mathbb{C}$, les zéros complexes d'un polynôme $P_n(z)$ à coefficients réels sont deux à deux conjugués.

Corollaire 2

Tout polynôme à coefficients réels peut se décomposer de manière unique en un produit de polynômes de degré 1 et de degré 2 *irréductibles* (dont le discriminant est négatif).

Exercice 16

Dans $\mathbb{C}$, calculez et dessinez les racines des polynômes ci-dessous :

a. $x^2 - 4x + 5$
b. $2x^3 - 5x - 6$, sachant que 2 est une racine
c. $4x^4 - 4x^2 + 3$

Exercice 17*

Déterminez le nombre réel k pour que les solutions de l'équation $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$ soient alignées verticalement dans le plan complexe.
Calculez k et les solutions de l'équation.

7. Fonctions complexes

Une fonction complexe f est une fonction qui associe à un nombre complexe z (faisant partie d'un domaine D) un nombre complexe $f(z)$.

Contrairement aux fonctions réelles, on ne peut pas dessiner de graphes pour les fonctions complexes. Il faudrait en effet utiliser une représentation graphique en quatre dimensions ! Pour décrire graphiquement une fonction complexe, on dessine deux plans complexes, l'un représentant le domaine de départ (D) et l'autre représentant l'ensemble d'arrivée.

Point fixe Soit f une fonction complexe. On dit que z_0 est un **point fixe** de f si $f(z_0) = z_0$.

Exercice 18

On considère la fonction f : $z \to f(z) = -2i\bar{z}+1+i$.

a. Décrivez f.

b. Décrivez l'image par f du sous-ensemble de $\mathbb{C}$ caractérisé par la condition

1) $|z|=1$

2) $\frac{1}{2} < \text{Im}(z) < 2$.

Exercice 19

Dans $\mathbb{C}$, on donne la fonction g telle que $g(z) = i\,z + 8$ et l'ensemble E des nombres complexes z tel que le module de $z - 7i$ vaut 5. En d'autres termes :

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z - 7i| = 5\}$$

a. Calculez le point fixe de la fonction g.

b. Représentez graphiquement l'ensemble des nombres $z = a + bi$ de l'ensemble E.

c. Interprétez géométriquement la fonction g, puis dessinez l'image F de E par la fonction g ($F = g(E)$).

Exercice 20

Soit f : $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = -i - \frac{2}{z}$.

a. Déterminez les nombres complexes z qui satisfont l'équation : $f(z) = z$.

b. Déterminez, puis représentez graphiquement (unité 1 cm) l'image par la fonction f de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c. Déterminez, puis représentez graphiquement (unité 1 cm) l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

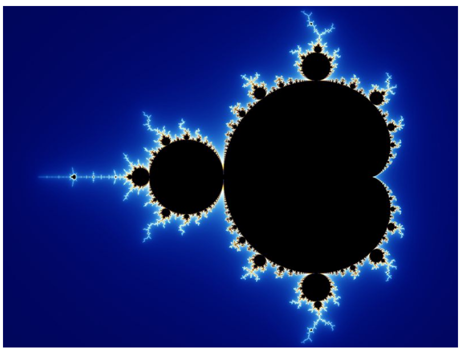
d. Soit E l'ensemble des nombres complexes de la forme $z = \cos(t) + i{\cdot}\sin(t)$ avec $t \in [0\,;2\pi]$. Déterminez la nature géométrique de E. Calculez, puis représentez graphiquement les images par f des nombres z correspondant aux valeurs $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ et $t = \frac{3\pi}{2}$.

Prouvez que l'image de E par f est un cercle dont vous donnerez le centre et le rayon.

---

8. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les trois représentations d'un nombre complexe (algébrique, trigonométrique et formule d'Euler)	❑ ok
Calculer avec les nombres complexes dans les trois représentations	❑ ok
Représenter un nombre complexe dans le plan complexe	❑ ok
Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$	❑ ok
Connaître le théorème fondamental de l'algèbre	❑ ok
Maîtriser des fonctions complexes simples	❑ ok



L'ensemble de Mandelbrot est une fractale qui est définie comme l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquels la suite récurrente définie par $z_{n+1} = z_n^2 + c$ et la condition $z_0 = 0$ *ne tend pas* vers l'infini (en module).

Solutions des exercices

1. **a.** $-1+4i$ **b.** $-3-11i$ **c.** 13
d. $-\frac{9}{10}+\frac{7}{10}i$

2. **a.** $-\frac{13}{5}-\frac{47}{15}i$ **b.** $-\frac{188}{15}-\frac{6}{5}i$
c. $\frac{136}{45}+\frac{73}{25}i$ **d.** $-\frac{860}{723}+\frac{130}{241}i$

3. **a.** $4-7i$ **b.** $367-315i$ **c.** $112+40i$
d. $19+30i$ **e.** -3 **f.** 20
g. -4 **h.** $-\frac{5}{8}-\frac{7}{8}i$ **i.** $\frac{9}{5}-\frac{17}{5}i$
j. 109

4. **a.** $-1, -i, 1, i, \ldots$
b. $-4+3i, -3-4i, 4-3i, 3+4i$

5. **a.** -2 **b.** $1.225+0.707i$
c. $-0.353-0.353i$

6. **a.** $\rho=1, \varphi=\frac{\pi}{2}$ **b.** $\rho=5, \varphi\approx-0.927$
c. $\rho=\sqrt{29}, \varphi\approx 4.332$ **d.** $\rho=1, \varphi\approx-2.686$
e. $\rho=1, \varphi=\frac{3\pi}{2}$

7. $2\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\right)$,
avec $k = 0, 1, 2, 3, 4$

8. **a.** $4+i$, $-4-i$
b. 2, $-1\pm i\sqrt{3}$
c. $1.069+0.213i$, $-0.213+1.069i$,
$-1.069-0.213i$, $0.213-1.069i$

9. **a.** $z_1 = 19$, $z_2 = -15$ **b.** $z_1 = 3+8i$, $z_2 = 3-8i$
c. $z_1 = -1$, $z_2 = -1+4i$ **d.** i ; $-i$; $2-i$; $-2+i$

10. $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-i$

11. pas de solution

12*. **a.** $z_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_4=\frac{1}{2}i$, $z_5=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$
c. $2+\sqrt{2}$

13*. $x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$, avec $k = 1, \ldots, 5$

14. **a.** ix **b.** $-8.358-18.264i$
c. $\frac{\ln(2)}{2}+\frac{3\pi}{4}i$ **d.** $\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{8\ln(2)}i$
e. πi **f.** $1.179-0.155i$

15. **a.** $\rho\approx 0.135, \varphi\approx 2.28$
b. $\rho\approx 1.568, \varphi\approx -0.3$
c. $\rho\approx 1.568, \varphi\approx 0.3$

16. **a.** $2+i$ et $2-i$
b. $2 ; -1-\frac{i}{\sqrt{2}} ; -1+\frac{i}{\sqrt{2}}$
c. $-0.82645+0.4278\,i$; $0.82645-0.4278\,i$;
$-0.82645-0.4278\,i$; $0.82645+0.4278\,i$

17*. $k = 31$

18.a. symétrie par rapport à l'axe réel, suivie d'une rotation de 90° autour de 0, d'une homothétie de facteur -2 et enfin d'une translation de $1+i$.

b. **1)** L'ensemble de départ est le cercle de rayon 1 centré à l'origine. Son image est le cercle de rayon 2 centré en $1+i$.
2) L'ensemble de départ est la bande horizontale comprise entre $i/2$ et $2i$. Son image est une bande verticale comprise entre -3 et 0.

19. **a.** point fixe : $z = 4+4i$
b. cercle de rayon 5 centré en (0 ; 7)
c.
g : rotation de +90° suivie d'une translation de vecteur $\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$.
$g(E)$: cercle de rayon 5 centré en (1 ; 0)

20. **a.** $z_1 = -2i$, $z_2 = i$
b. droite $y = -1$ sans le point (0 ; -1)
c. cercle de rayon 1, centré en (0 ; 1), sans le point (0 ; 0)
d. E : cercle de rayon 1 centré à l'origine
$f(1) = -2-i$, $f(i) = i$, $f(-1) = 2-i$, $f(-i) = -3i$
$f(E)$: cercle de centre (0 ; -1) et de rayon 2