Algorithme CORDIC

Benjamin.Barras@epfl.ch, Domaine-IT, Responsable Linux

The CORDIC algorithm calculates trigonometric functions in a simple and efficient way.

L'algorithme CORDIC permet de calculer des fonctions trigonométriques de manière simple et efficace.

Introduction

Il est remarquable de savoir que William E. Egbert, ingénieur chez HP (Hewlett-Packard), a publié quatre articles (1977-78) dans le HPJournal [1] concernant les algorithmes *cachés* [2] des calculatrices HP, à savoir:

- Personal Calculator Algorithms I: Square Roots [3],
- Personal Calculator Algorithms II: Trigonometric Functions [4],
- Personal Calculator Algorithms III: Inverse Trigonometric Functions [5],
- Personal Calculator Algorithms IV: Logarithmic Functions [6].

Il est paradoxalement regrettable de constater qu'aujourd'hui il serait quasiment impossible de voir de tels articles publiés étant donné que le savoir est devenu une marchandise qui se négocie, par brevet interposé, par des rapaces et des vautours de toute espèce.

Présentation

Cet article présente en détail le deuxième algorithme, à savoir **le calcul des fonctions trigonométriques**.
Cet algorithme est connu sous le nom de CORDIC *(COordinate Rotation DIgital Computer)* et dont la première publication, par Jack E. Volder, date de 1959 [7].

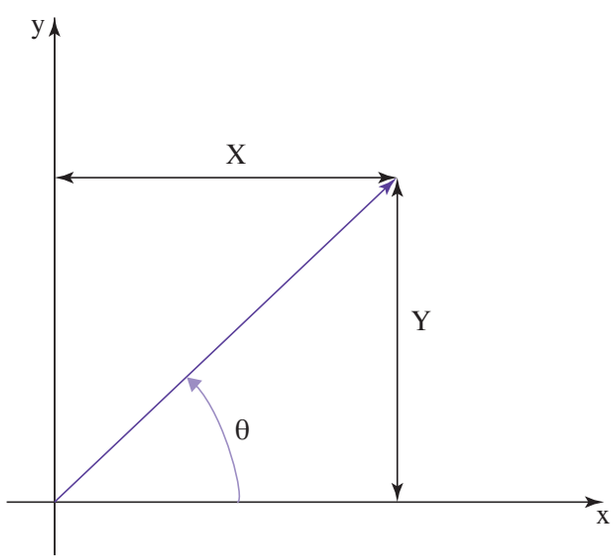
> Il s'agit tout d'abord de casser un mythe !
> Non, les fonctions trigonométriques ne sont pas calculées avec des séries de Taylor.
>
> $$\tan(x)=x+\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{2}{15}\cdot x^5+\frac{17}{315}\cdot x^7+\ldots$$

Il faut bien comprendre qu'à cette époque, les processeurs ne traitaient que de l'addition et dans certains cas de la soustraction. Donc, la multiplication était coûteuse en temps et donc peu efficace. De plus, la mémoire était vraiment très petite et les processeurs ne disposaient que d'un nombre restreint de registres. À titre d'exemple, la mémoire ROM de microprogramme de la HP-35 [8] comportait 768 mots de 10 bits, soit l'équivalent de 960 octets. Ce qui explique que des ingénieurs, très brillants, ont mis au point des algorithmes simples et d'une efficacité redoutable, n'utilisant que l'addition, la soustraction et le décalage *(shift)*.
Dans cet algorithme, on utilise que le **décalage** *(shift)*, l'**addition/soustraction** et surtout des **nombres entiers**. Les nombres à virgule flottante n'étant qu'une vue de l'esprit, car dans une machine ce ne sont que des nombres entiers avec une virgule qui se déplace à gauche ou à droite.
Il faut avoir deux choses à l'esprit avant de commencer:

- les calculatrices HP utilisent le système de numération BCD *(Binary Coded Decimal)*;
- l'algorithme original de HP utilise le radian comme unité de calcul. Dans le premier exemple, on utilisera le degré pour une raison purement pédagogique.

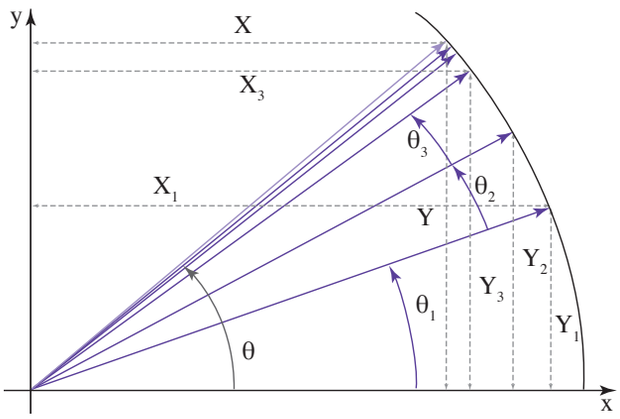
L'idée de l'algorithme

On se donne un angle θ et on veut connaître sa tangente $\tan(\theta)=\frac{Y}{X}$.



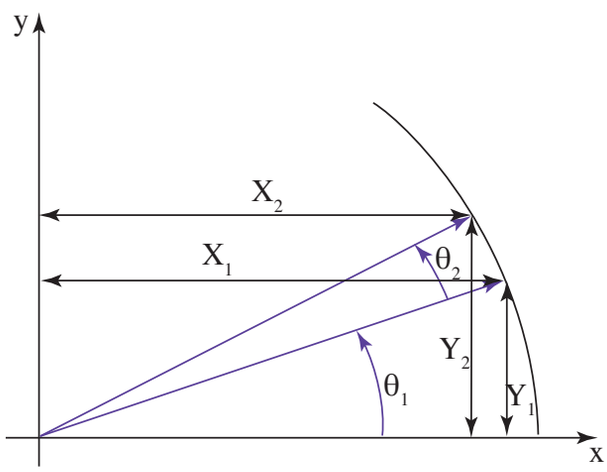
Pour cela, on prend un vecteur de départ connu, par exemple un vecteur unité, et on le fait tourner d'un angle θ_i précis et connu qui devient toujours plus petit lorsque l'on s'approche de notre angle de départ. On calcule au fur et à mesure le rapport $\frac{Y_i}{X_i}$ à chaque rotation.

[1] HP Journal: www.hpl.hp.com/hpjournal/journal.html
[2] www.jacques-laporte.org/LeSecretDesAlgorithmes.htm
[3] HPJ-1977-05.pdf
[4] HPJ-1977-06.pdf
[5] HPJ-1977-11.pdf
[6] HPJ-1978-04.pdf
[7] VOLDER, Jack E., *The CORDIC Trigonometric Computing Technique*. IRE Transactions on Electronic Computers, septembre 1959
[8] ROULET, François. *La saga HP-35*. FI 7/07. flashinformatique.epfl.ch/spip.php?article1366



Démonstration

Nous avons par définition: $\tan(\theta_1)=\frac{Y_1}{X_1}$ et $\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{Y_2}{X_2}$



On commence par les équations de rotation suivantes:

$$X_2=\cos(\theta_2)\cdot X_1-\sin(\theta_2)\cdot Y_1$$
$$Y_2=\cos(\theta_2)\cdot Y_1+\sin(\theta_2)\cdot X_1$$

Première astuce

On va faire apparaître la tangente, pour cela on va diviser l'équation précédente de chaque côté par $\cos(\theta_2)$, ce qui nous donne:

$$\frac{X_2}{\cos(\theta_2)}=X_1-\tan(\theta_2)\cdot Y_1=X_2'$$
$$\frac{Y_2}{\cos(\theta_2)}=Y_1+\tan(\theta_2)\cdot X_1=Y_2'$$

Pourquoi astuce ?

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{Y_2}{X_2}=\frac{Y_2'}{X_2'}$$

Les rapports restent identiques !

Calculons ensuite

$$\frac{X_3}{\cos(\theta_3)}=X_2-\tan(\theta_3)\cdot Y_2=\cos(\theta_2)\cdot\left(X_2'-\tan(\theta_3)\cdot Y_2'\right)=\cos(\theta_2)\cdot X_3'$$

$$\frac{Y_3}{\cos(\theta_3)}=Y_2+\tan(\theta_3)\cdot X_2=\cos(\theta_2)\cdot\left(Y_2'+\tan(\theta_3)\cdot X_2'\right)=\cos(\theta_2)\cdot Y_3'$$

où l'on pose

$$X_2'-\tan(\theta_3)\cdot Y_2'=X_3'=\frac{X_3}{\cos(\theta_2)\cdot\cos(\theta_3)}$$
$$Y_2'+\tan(\theta_3)\cdot X_2'=Y_3'=\frac{Y_3}{\cos(\theta_2)\cdot\cos(\theta_3)}$$

Ce qui nous donne, de manière générale, l'équation de récurrence suivante:

$$X_i'=X_{i-1}'-\tan(\theta_i)\cdot Y_{i-1}'$$
$$Y_i'=Y_{i-1}'+\tan(\theta_i)\cdot X_{i-1}'$$

avec $X_i'=\frac{X_i}{\cos(\theta_i)\cdot\cos(\theta_{i-1})\cdot\ldots\cdot\cos(\theta_2)}$

et $Y_i'=\frac{Y_i}{\cos(\theta_i)\cdot\cos(\theta_{i-1})\cdot\ldots\cdot\cos(\theta_2)}$

et toujours $\tan(\theta)\cong\tan(\theta_i+\theta_{i-1}+\ldots+\theta_1)=\frac{Y_i}{X_i}=\frac{Y_i'}{X_i'}$

Deuxième astuce

On va choisir θ_i de manière à ce que $\tan(\theta_i)$ soit une puissance de 10: $\tan(\theta_i)=10^{-j}$.

Nos équations deviennent alors:

$$X_i'=X_{(i-1)}'-10^{(-j)}\cdot Y_{(i-1)}'$$
$$Y_i'=Y_{(i-1)}'+10^{(-j)}\cdot X_{(i-1)}'$$

On a remplacé une multiplication par un simple décalage *(shift)*, il ne nous reste plus que l'addition et la soustraction.

Nous devons donc construire une table avec les valeurs de θ_i, ce qui nous donne:

j	$\tan(\theta_i)=10^{-j}$	θ_i
0	1	45°
1	0.1	5.710593137499°
2	0.01	0.572938697683°
3	0.001	0.057295760414°
4	0.0001	0.005729577932°
5	0.00001	0.000572957795°

Un esprit aiguisé ne manquera pas de remarquer qu'il faut calculer les angles ci-dessus et si possible, sans machine à calculer si l'on veut être cohérent.

Il existe plusieurs méthodes qui sont toutes longues et fastidieuses, et que nos ancêtres, qui ont calculé les tables de trigonométrie [9], ont abondamment utilisées, voire inventées.

[9] Construction des tables trigonométriques: en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_tables

Exemple

Le nombre de décimales est volontairement plus grand que celui d'une calculatrice afin, justement, de faire mieux que ces dernières à l'aide uniquement d'un crayon et d'une feuille de papier.

Remarque: tous les angles sont en degrés.

$\theta=18$
$X_0=1$
$Y_0=0$
$j = 0$
$\tan(\theta_i)=1;\ \theta_i=45$
$0+45>18 \Rightarrow$ STOP

j = 1

$\tan(\theta_i)=0.1;\ \theta_i=5.710593137499$

$0+5.710593137499=5.710593137499<18$
$X_1'=X_0-0.1\cdot Y_0=1-0.1\cdot 0=1.0$
$Y_1'=Y_0+0.1\cdot X_0=0+0.1\cdot 1=0.1$

$5.710593137499+5.710593137499=11.421186274999<18$
$X_2'=X_1'-0.1\cdot Y_1'=1.0-0.1\cdot 0.1=0.99$
$Y_2'=Y_1'+0.1\cdot X_1'=0.1-0.1\cdot 1.0=0.20$

$11.421186274999+5.710593137499=17.131779412498<18$
$X_3'=X_2'-0.1\cdot Y_2'=0.99-0.1\cdot 0.20=0.970$
$Y_3'=Y_2'+0.1\cdot X_2'=0.20+0.1\cdot 0.99=0.299$

$17.131779412498+5.710593137499>18 \Rightarrow$ STOP

j = 2

$\tan(\theta_i)=0.01;\ \theta_i=0.572938697683$

$17.131779412498+0.572938697683=17.704718110182<18$
$X_4'=X_3'-0.01\cdot Y_3'=0.970-0.01\cdot 0.299=0.96701$
$Y_4'=Y_3'+0.01\cdot X_3'=0.299+0.01\cdot 0.970=0.30870$

$17.704718110182+0.572938697683>18 \Rightarrow$ STOP

j = 3

$\tan(\theta_i)=0.001;\ \theta_i=0.057295760414$

$17.704718110182+0.057295760414=17.762013870596<18$
$X_5'=X_4'-0.001\cdot Y_4'=0.96701-0.001\cdot 0.30870=0.96670130$
$Y_5'=Y_4'+0.001\cdot X_4'=0.30870+0.001\cdot 0.96701=0.30966701$

$17.762013870596+0.057295760414=17.819309631011<18$
$X_6'=X_5'-0.001\cdot Y_5'=0.96670130-0.001\cdot 0.30966701=0.96639163299$
$Y_6'=Y_5'+0.001\cdot X_5'=0.30966701+0.001\cdot 0.96670130=0.31063371130$

$17.819309631011+0.057295760414=17.876605391425<18$
$X_7'=X_6'-0.001\cdot Y_6'=0.96639163299-0.001\cdot 0.31063371130=0.96608099927870$
$Y_7'=Y_6'+0.001\cdot X_6'=0.31063371130+0.001\cdot 0.96639163299=0.31160010293299$

$17.876605391425+0.057295760414=17.933901151840<18$
$X_8'=X_7'-0.001\cdot Y_7'=0.96608099927870-0.001\cdot 0.31160010293299=0.96576939917576701$
$Y_8'=Y_7'+0.001\cdot X_7'=0.31160010293299+0.001\cdot 0.96608099927870=0.31256618393226870$

$17.933901151840+0.057295760414=17.991196912254<18$
$X_9'=X_8'-0.001\cdot Y_8'=0.96576939917576701-0.001\cdot 0.31256618393226870=0.96545683299183474130$
$Y_9'=Y_8'+0.001\cdot X_8'=0.31256618393226870+0.001\cdot 0.96576939917576701=0.31353195333144446701$

$17.991196912254+0.057295760414>18 \Rightarrow$ STOP
…

j = 17

$\tan(\theta_i)$=0.00000000000000001; θ_i=0.00000000000000572957795130823
…
17.999999999999999359893381975846+0.00000000000000572957795130823
=17999999999999999932851177106669<18

$X_{80}'=X_{79}'-0.00000000000000001 \cdot Y_{79}'$
=0.965408654718813480084209861507−0.00000000000000001·0.313680286831855612515132822077
=0.965408654718813476947406993189

$Y_{80}'=Y_{79}'+0.00000000000000001 \cdot X_{79}'$
=0.313680286831855612515132822077+0.00000000000000001·0.965408654718813480084209861507
=0.313680286831855622169219369265

On vérifie à l'aide de la commande **bc** (bc - An arbitrary precision calculator language) de la fondation **GNU** (gnu.org):

```
# 25 décimales et une division
echo 'scale=25;0.313680286831855622169219369265/0.965408654718813476947406993189' | bc
0.3249196962329063248601754
# 18 décimales, a(1) = arctg(1) = pi/4, theta = (18/45) * pi/4
# tg(theta) = sin(theta)/cos(theta)
echo 'scale=25;s(18/45*a(1))/c(18/45*a(1))' | bc -l
0.3249196962329063261558713
```

HP-15C: tan(18) = 0.324919696

Remarques

Nous avons vu et appliqué l'algorithme CORDIC.

- L'algorithme CORDIC original (Volder) permet de dépasser l'angle initial, mais change de sens de rotation lorsqu'il dépasse l'angle initial.

Maintenant, on va voir comment les ingénieurs de HP ont fait:

- ils ne dépassent jamais l'angle initial (comme l'exemple ci-dessus);
- ils utilisent le radian à la place du degré;
- ils utilisent l'approximation suivante: $\tan(x) \cong x$ pour x petit.

Méthode HP

Remarque: tous les angles sont en radian, et
18°=0.314159265358979323 [rad].

θ=0.314159265358979323=
+0·0.78539816339744830
+3·0.09966865249116202
+1·0.00999966668666523
+5·0.00099999966666686
+1·0.00009999999966666
+5·0.00000999999999966
+0.00000364286582877

On vérifie que tan(0.00000364286582877)=0.00000364286582878611418, où 0.00000364286582877 représente le reste de l'addition. On utilisera ce reste comme valeur de départ pour Y_0.

θ=0.314159265358979323
X_0=1
Y_0=0.00000364286582877

j = 0 (0 boucle)

$\tan(\theta_i)$=1; θ_i=0.78539816339744830

j = 1 (3 boucles)

$\tan(\theta_i)$=0.1; θ_i=0.09966865249116202

0.09966865249116202<0.314159265358979323
$X_1'=X_0-0.1 \cdot Y_0=1-0.1 \cdot 0.00000364286582877=0.99999963571341713$
$Y_1'=Y_0+0.1 \cdot X_0=0.00000364286582877+0.1 \cdot 1=0.10000364286582877$
$X_2'=X_1'-0.1 \cdot Y_1'$
$Y_2'=Y_1'+0.1 \cdot X_1'$
$X_3'=X_2'-0.1 \cdot Y_2'$
$Y_3'=Y_2'+0.1 \cdot X_2'$

j = 2 (1 boucle)

$\tan(\theta_i)$=0.01; θ_i=0.00999966668666523
$X_4'=X_3'-0.01 \cdot Y_3'$
$Y_4'=Y_3'+0.01 \cdot X_3'$

j = 3 (5 boucles)

$\tan(\theta_i)$=0.001; θ_i=0.00099999966666686
$X_5'=X_4'-0.001 \cdot Y_4'$
$Y_5'=Y_4'+0.001 \cdot X_4'$
…
$X_9'=X_8'-0.001 \cdot Y_8'$
$Y_9'=Y_8'+0.001 \cdot X_8'$

j = 4 (1 boucle)

$\tan(\theta_i)$=0.0001; θ_i=0.00009999999966666
$X_{10}'=X_9'-0.0001 \cdot Y_9'$
$Y_{10}'=Y_9'+0.0001 \cdot X_9'$

j = 5 (5 boucles)

$\tan(\theta_i)$=0.00001; θ_i=0.00009999966666686
$X_{11}'=X_{10}'-0.00001 \cdot Y_{10}'$
$Y_{11}'=Y_{10}'+0.00001 \cdot X_{10}'$
…
$X_{15}'=X_{14}'-0.00001 \cdot Y_{14}'$=0.96540865472374197
$Y_{15}'=Y_{14}'+0.00001 \cdot X_{14}'$=0.31368028683345698

On vérifie:

```
# 18 décimales et une division
echo 'scale=18;0.31368028683345698/0.96540865472374197' | bc
0.324919696232906317
# 18 décimales, a(1) = arctg(1) = pi/4, θ = (18/45) * pi/4
# tg(theta) = sin(theta)/cos(theta)
echo 'scale=18;s(18/45*a(1))/c(18/45*a(1))' | bc -l
0.324919696232906325
```

16 décimales exactes pour 15 itérations: REMARQUABLE!

```
HP-15C: tan(18) = 0.324919696
```

Le nombre de 9 et de 6 apparaissant dans les constantes ci-dessus n'aura pas échappé à un oeil exercé.
Raison pour laquelle, Dave Cochran concepteur de la HP-35 a choisi, afin d'économiser de la place mémoire, de ne mettre qu'une constante en mémoire et de calculer les autres à l'aide d'une boucle et de chiffres donnant la position et le nombre de 9 (ou de 6).

Fonctions trigonométriques

À l'aide du calcul de $\tan(\theta)$, on déduit les fonctions trigonométriques $\sin$ & $\cos$ à l'aide des équations suivantes:

$$\sin(\theta)=\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan(\theta)^2}}$$

$$\cos(\theta)=\frac{\cot(\theta)}{\sqrt{1+\cot(\theta)^2}}$$

avec $\tan(\theta)=\frac{Y}{X}$ et $\cot(\theta)=\frac{X}{Y}$

On inverse simplement X et Y, puis on utilise la même équation et donc le même algorithme de calcul.

Il reste encore à savoir calculer une racine carrée, ce qui est justement le sujet du premier article de William E. Egbert.

Bonus

On peut aussi utiliser les nombres complexes pour effectuer des rotations, on a vu que l'on a tourné:

- 0 fois pour j = 0
- 3 fois pour j = 1
- 1 fois pour j = 2
- 5 fois pour j = 3
- 1 fois pour j = 4
- 5 fois pour j = 5

Ce qui nous donne:

$$X+i\cdot Y\cong(1+i\cdot 0)\cdot[(1+i\cdot 0.1)^3\cdot(1+i\cdot 0.01)\cdot(1+i\cdot 0.001)^5\cdot(1+i\cdot 0.0001)\cdot(1+i\cdot 0.0001)^5]$$
$$X+i\cdot Y\cong 0.965409797+i\cdot 0.313676769$$
$$\tan(18)=0.324919\cong\frac{Y}{X}=\frac{0.313676769}{0.965409797}=0.324915$$

On retrouve facilement l'algorithme ci-dessus ! ■

la fameuse HP-35