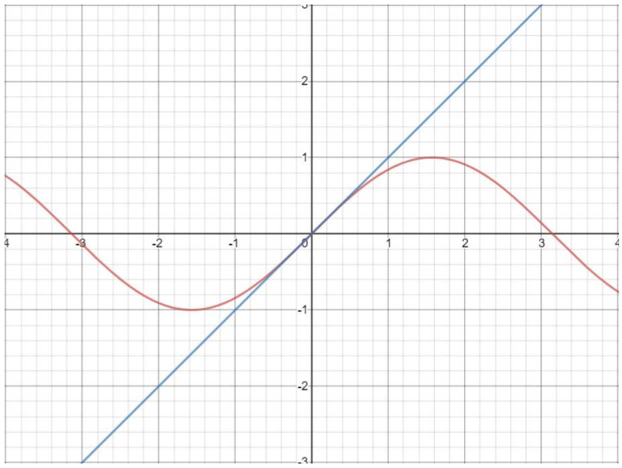
4. Approximation de fonctions

4.1. Un peu d'histoire

L'idée de représenter certaines fonctions comme des sommes de séries entières (voir § 4.3) revient à **Newton**, et la série générale de **Taylor** était connue du mathématicien écossais James **Gregory** en 1668 et du mathématicien suisse Johann **Bernoulli** en 1690. Colin **Maclaurin** rendit les séries éponymes populaires dans son traité d'analyse *Treatise of Fluxions* publié en 1742.

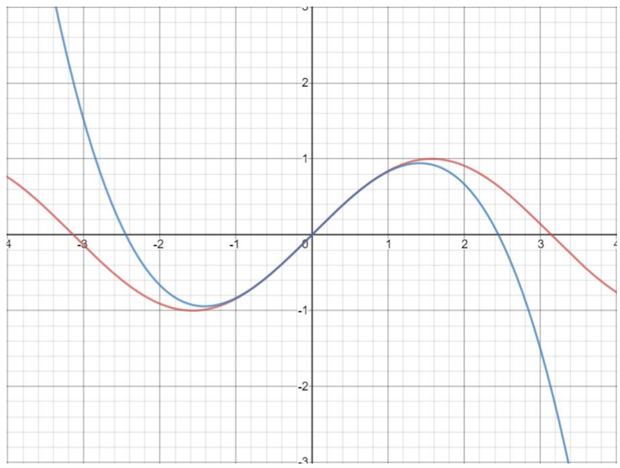
4.2. Un exemple introductif

Souvenez-vous. Lorsque vous avez étudié les limites on avait remarqué que $\sin(x) \approx x$ quand x est « proche de 0 ». On peut le vérifier facilement avec une calculatrice, ou mieux encore en superposant les graphes des deux fonctions :



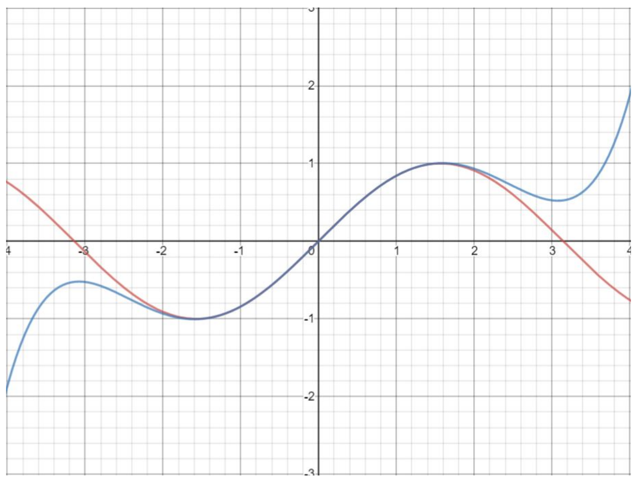
Approximation de $\sin(x)$ en $x = 0$ par le polynôme $f(x) = x$.

On voit bien qu'au voisinage de 0, les courbes sont presque indiscernables et que plus on s'éloigne, plus l'approximation devient mauvaise. On peut trouver un polynôme (on verra comment plus loin), qui épouse mieux les formes de la fonction sinus.



Approximation de $\sin(x)$ en $x = 0$ par le polynôme $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$

Encore mieux :



Approximation de sin(x) en $x = 0$ par le polynôme $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

L'objet de ce chapitre sera d'étudier comment trouver de tels polynômes.

4.3. Séries entières

Une **série entière** est une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ où x est une variable et les a_k sont des constantes, appelées les *coefficients* de la série.

Chaque fois qu'une valeur est attribuée à x, la série entière est une série de constantes qui peut être testée quant à sa convergence ou à sa divergence.

Remarquez que f ressemble à un polynôme. La seule différence est que f a un nombre infini de termes.

La somme de la série est une fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dont le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série converge.

Théorème 4.1

Il existe un nombre positif r, appelé **rayon de convergence** de la série, tel que :

- la série entière converge absolument si $|x| < r$,
- la série entière diverge si $|x| > r$.

Dans la plupart des cas, le rayon de convergence peut être déterminé par le test du quotient, mais ce test échoue toujours quand x est l'une des extrémités de l'intervalle de convergence. Il faut donc un autre test pour savoir ce qui se passe aux extrémités.

Marche à suivre

Étape 1 : calculer $A = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ ou $C = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$.

Étape 2 : calculer le rayon de convergence (r) de la série : $r = \frac{1}{A}$ ou $r = \frac{1}{C}$.

Nous savons alors que :
- la série entière converge si $-r < x < r$
- la série entière diverge sinon.

Étape 3 : étudier la convergence de la série entière quand $x = -r$ et $x = r$.

Étape 4 : écrire le résultat final.

Exemple Déterminons le rayon et l'intervalle de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k x^k}{\sqrt{k+1}}$.

Test du quotient Soit $u_k = \frac{(-3)^k x^k}{\sqrt{k+1}}$

Alors $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{(-3)^{k+1} x^{k+1}}{\sqrt{k+2}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{(-3)^k x^k}\right| = 3\sqrt{\frac{k+1}{k+2}}|x| \to 3 \cdot |x|$ si $k \to \infty$.

La série est donc convergente si $3 \cdot |x| < 1$ et divergente pour $3 \cdot |x| > 1$.

Rayon de convergence Elle converge donc pour $|x| < \frac{1}{3}$ et diverge pour $|x| > \frac{1}{3}$. Cela signifie que le rayon de convergence est $r = \frac{1}{3}$.

Maintenant que l'on sait la série converge dans l'intervalle $]-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}[$, on regarde ce qui se passe aux extrémités de l'intervalle.

Si $x = -\frac{1}{3}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k \left(-\frac{1}{3}\right)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, qui est divergente.

D'après le test des séries alternées (théorème 3.2).

Si $x = \frac{1}{3}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$, qui est convergente.

Finalement, la série proposée converge pour $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$.

Exercice 4.1 En appliquant la marche à suivre ci-dessus, étudiez la convergence des séries entières ci-dessous :

a. $\sum_{n\geq 0} \frac{4}{n!} x^n$ **b.** $\sum_{n\geq 0} (2^n + 1) x^n$ **c.** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n} x^n$

d. $\sum_{n\geq 0} \frac{3}{(n+1)^n} x^n$ **e.** $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

Exercice 4.2 Trouvez l'intervalle de convergence des séries entières suivantes.

a. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$ **b.** $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

c. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \frac{x^4}{4\cdot 5} + \ldots$ **d.** $\frac{x}{5} - \frac{x^2}{2\cdot 5^2} + \frac{x^3}{3\cdot 5^3} - \frac{x^4}{4\cdot 5^4} + \ldots$

e. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$ **f.** $\left(\frac{x}{\ln(2)}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ln(3)}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ln(4)}\right)^4 + \ldots$

4.4. Développement des fonctions en séries entières

Si vous vous souvenez des progressions géométriques, vous savez que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{, pour } |x| < 1.$$

On voit que la fonction $\frac{1}{1-x}$ peut s'exprimer sous la forme d'une série entière. Est-ce possible pour toutes les fonctions ? Faisons l'hypothèse que f est une fonction quelconque qui peut être écrite sous la forme d'une série entière :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots \text{ , pour } |x-a| < r.$$

Essayons de déterminer comment doivent être les coefficients c_n en termes de f.

Avant tout, remarquons qu'en posant $x = a$ dans l'équation ci-dessus, tous les termes après le premier sont nuls et il ne reste que $f(a) = c_0$.

Dérivons la série ci-dessus terme à terme :

Brook **Taylor**
(1685 - 1731)

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots \text{ , pour } |x-a| < r.$$

Posons $x = a$: $f'(a) = c_1$ et dérivons une deuxième fois :

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + 4\cdot 5(x-a)^3 + \dots \text{ , pour } |x-a| < r.$$

Posons $x = a$: $f''(a) = 2c_2$ et dérivons une troisième fois :

$$f^{(3)}(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5(x-a)^2 + 4\cdot 5\cdot 6(x-a)^3 + \dots \text{ , pour } |x-a| < r.$$

Posons $x = a$: $f^{(3)}(a) = 2\cdot 3c_3$

La régularité est claire : si nous continuons à dériver et à faire la substitution $x = a$, nous obtiendrons :

$$f^{(k)}(a) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot k\cdot c_k = k!\cdot c_k$$

d'où nous tirons $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Colin **Maclaurin**
(1698 - 1746)

Ce développement nous permet de tirer la conclusion suivante :

Si f admet une représentation en série entière en a, c'est-à-dire si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \ |x-a| < r,$$

alors ses coefficients sont donnés par la formule $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Nous obtenons **la série de Taylor de la fonction *f* en *a*** :

On parle aussi de **développement illimité** de Taylor, par opposition au développement limité que est un polynôme de degré fini.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Dans le cas particulier où $a = 0$ (un cas qui se présente extrêmement souvent), on parle de **série de Maclaurin**.

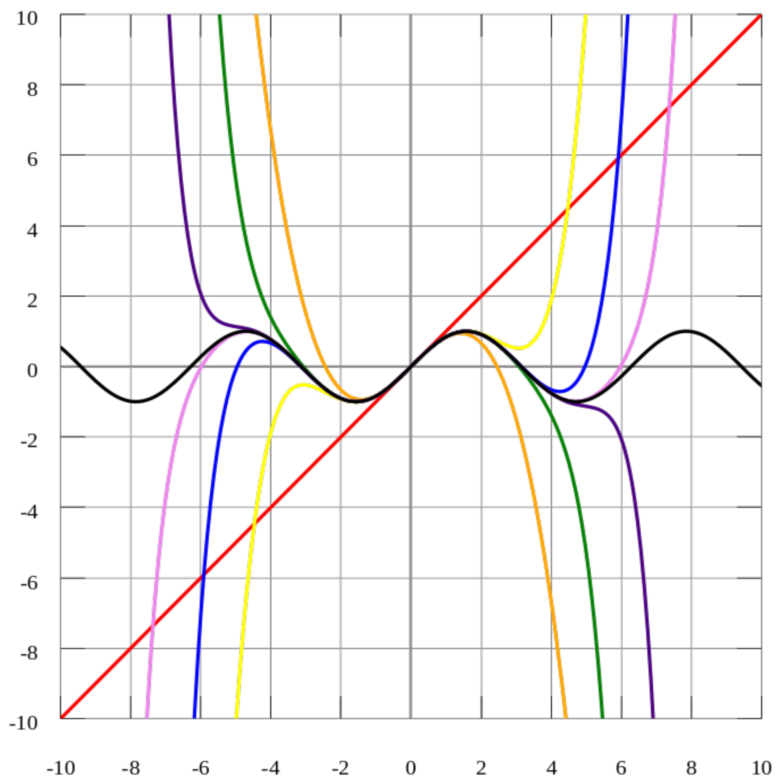
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Exercice 4.3 Déterminez la série de Maclaurin des fonctions suivantes ainsi que le rayon de convergence.

a. $\sin(x)$ **b.** e^x **c.** $\ln(1+x)$

Exercice 4.4 Écrivez les réponses de l'exercice 4.3 en utilisant le symbole Σ.

L'image ci-dessous montre la courbe de $f(x) = \sin(x)$ (en noir) et les approximations par les polynômes de Maclaurin selon le degré **1**, **3**, **5**, **7**, **9**, **11** et **13**.



On voit que plus on s'éloigne de 0, plus la qualité de l'approximation se détériore.

Autrement dit, si on appelle *reste de la série* la valeur $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, on constate que le reste augmente quand x s'éloigne de 0.

Plus le degré du polynôme de Taylor augmente, plus sa courbe se rapproche de la courbe de la fonction f.

Théorème 4.2

Inégalité de Taylor

Soit $T_n(x)$ le développement limité de Taylor de degré n et $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ le reste de la série.
Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour $|x - a| < r$, alors le reste $R_n(x)$ de la série de Taylor satisfait l'inégalité :

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \quad \text{pour } |x-a| < r$$

Démonstration Posons pour commencer $n = 1$. On suppose $f''(x) \leq M$.

On trouve alors $\int_a^x f''(t)\,dt \leq \int_a^x M\,dt$

Donc $f'(x) - f'(a) \leq M(x - a)$, d'où $f'(x) \leq f'(a) + M(x - a)$

De là : $\int_a^x f'(t)\,dt \leq \int_a^x (f'(a) + M(t-a))\,dt$

$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leq M\frac{(x-a)^2}{2}$$

Mais $R_1(x) = f(x) - T_1(x)$
$= f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$
$= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

Donc : $R_1(x) \leq \frac{M}{2}(x-a)^2$

La même démarche menée à partir de $f''(x) \geq -M$ conduit à :

$$R_1(x) \geq -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

Finalement : $|R_1(x)| \leq \frac{M}{2}|x-a|^2$.

Ceci démontre l'inégalité de Taylor dans le cas $n = 1$. Le résultat pour n quelconque est obtenu de la même façon en intégrant $n + 1$ fois.

Q. E. D.

Exercice 4.5

Donnez le développement de Taylor d'ordre n au voisinage de a des fonctions ci-dessous.
Donnez aussi une estimation de l'erreur maximale commise lorsque cette approximation est donnée dans l'intervalle I.

a. $f(x) = \ln(2x + 5)$, avec $n = 5$, $a = 0$ et $I = [-2 ; 2]$

b. $f(x)=\frac{1}{x^2}+4$, avec $n = 4$, $a = -2$ et $I = [-3 ; -1]$

desmos

Utilisez un traceur de courbes pour visualiser la qualité des approximations.

Exercice 4.6

Soit la fonction $f(x) = \ln(x)$. Calculez les polynômes de degrés 1, 2, 3, 4 et 5 qui approchent au mieux cette fonction autour de $a = 1$.
Utilisez un traceur de courbes pour visualiser les résultats.

Exercice 4.7

Donnez, en utilisant le symbole Σ, les séries de Taylor des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\frac{1}{4x}$ en $a = 5$

b. $f(x)=\cos(2x)$ en $a = \frac{\pi}{4}$

Exercice 4.8

Estimez la valeur du nombre e grâce aux séries.

Exercice 4.9

Pour cet exercice, il est pratique de savoir que si on a une série alternée convergente (voir théorème 3.2), alors $|R_n| < b_{n+1}$.

Approchez ln(1.1), grâce à une série de Maclaurin, avec cinq chiffres significatifs.

Exercice 4.10

Calculez π avec trois décimales exactes, en utilisant un développement limité de $f(x) = \arcsin(x)$ et l'égalité $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Exercice 4.11

Les séries de Taylor et Maclaurin sont également utiles pour calculer des limites non triviales.
Sachant que $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, calculez $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 4.12 Démontrez par l'absurde que e est irrationnel, sachant que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots .$$

Procédez par encadrement.

4.5. Démonstration de la formule d'Euler

Nous avons vu cette formule dans le cours consacré aux nombres complexes.

Leonhard **Euler** (1701-1783)

Nous allons démontrer grâce à la formule de Taylor l'égalité $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, connue sous le nom de *formule d'Euler*.

Le développement en série de la fonction *exp* de la variable réelle x peut s'écrire :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

et s'étend à tout nombre complexe x : le développement en série de Taylor reste absolument convergent et définit l'exponentielle complexe.

En particulier pour $x = i\,\phi$ avec ϕ réel :

$$e^{i\phi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^n \phi^n}{n!}$$

Cette série, séparée en deux, devient, en utilisant que $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$:

$$e^{i\phi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

On voit ainsi apparaître les développements en série de Taylor des fonctions cosinus et sinus :

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(\phi) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ce qui, en remplaçant dans l'expression précédente de $e^{i\phi}$, donne bien :

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi).$$

Q. E. D.

En posant $\phi = \pi$, on obtient ce que beaucoup considèrent comme la plus belle formule des mathématiques :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Extraordinaire équation qui met en relation les constantes les plus importantes des mathématiques : e, π, 1 et 0.

4.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Développer une fonction en une série entière ❑ ok
Calculer le rayon de convergence d'une série entière ❑ ok