1. Progressions

Johann Carl Friedrich **Gauss**
(1777 - 1855)

L'instituteur prit sa grosse voix et annonça une punition générale : « Vous additionnerez tous les nombres de 1 à 100 ! Et je ne veux rien entendre avant que vous ayez fini ! » Il pensait bien avoir la paix pour le reste de la journée. Moins de deux minutes plus tard pourtant, l'un des enfants lève la main et annonce : « 5050 ».
L'instituteur croit à une farce, mais l'élève explique que 100+1 font 101, 99+2 font 101, 98+3 font 101, etc. La somme des nombres de 1 à 100 est donc égale à 50 fois 101, c'est-à-dire 5050.
Cette solution est si spectaculaire qu'elle a parcouru les âges. Elle est le plus souvent associée à Carl Friedrich **Gauss**, que l'on surnommait le « Prince des mathématiciens ». Mais on peut penser qu'il s'agit d'une légende. En effet, un auteur américain, Bryan **Hayes**, a trouvé plus de 100 versions de l'histoire de l'enfant Gauss, et dans huit langues différentes. De surcroît la plus ancienne version ne date que de 1856.

1.1. Les progressions arithmétiques (ou suites arithmétiques)

Définition

On appelle progression arithmétique (P.A.) une suite de nombres tels que chacun est égal au précédent augmenté d'un nombre constant appelé **raison**.

Deux exemples : –5, –1, 3, 7, 11, 15, 19, … (raison = 4)
35, 32, 29, 26, 23, … (raison = –3)

Le calcul d'un terme connaissant son rang (t_n)

Soit t_1 le premier terme et r la raison. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + r \\ t_3 &= t_2 + r = t_1 + 2r \\ t_4 &= t_3 + r = t_1 + 3r \\ &\vdots \\ t_n &= t_{n-1} + r = t_1 + (n-1)\cdot r \end{aligned}$$

Exemple
Soit la suite 4, 10, 16, 22, ...
Quel est le 66$^{\text{ème}}$ terme ?
$t_1 = 4$, $r = 6$, $n = 66$
donc $t_{66} = 4 + 65\cdot 6 = 394$

On a donc :

$$t_n = t_1 + (n-1)\cdot r$$

Il ne faut pas confondre t_n et n ! En effet, n est le rang (ou parfois le nombre d'éléments), t_n est l'élément de rang n.
Pour prendre une image, n est le numéro d'un siège de cinéma et t_n est la personne assise dans ce siège.
n est un nombre entier, mais t_n ne l'est pas forcément.

Le calcul de la somme de n termes (S_n)

Dans l'anecdote qui a sert d'introduction à ce chapitre, nous avons vu que Gauss a trouvé une formule pour calculer la somme des 100 premiers entiers. Essayons de généraliser. On peut écrire :

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$$

ou

$$S_n = t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \ldots + t_3 + t_2 + t_1$$

En additionnant ces deux expressions terme à terme, on obtient :

$$2\,S_n = (t_1 + t_n) + (t_2 + t_{n-1}) + (t_3 + t_{n-2}) + \ldots + (t_{n-1} + t_2) + (t_n + t_1)$$

Exemples

La somme des 100 premiers nombres entiers :

$S_{100}=\frac{100}{2}(2+99\cdot 1)=5050$

La somme des 38 premiers nombres entiers impairs :

$S_{38}=\frac{38}{2}(2+37\cdot 2)=1444$

Il y a n parenthèses formées de la somme de termes valant chacun $t_1 + t_n$, donc :

$$2\,S_n = n\cdot(t_1 + t_n)$$

D'où :

$$S_n=\frac{n}{2}(t_1+t_n)$$

En remplaçant t_n par $t_1 + (n-1)\cdot r$, on obtient :

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2t_1+(n-1)\cdot r\right)$$

Exemple concret

Dans un virage d'un stade, le nombre de siège dépend de la rangée. En effet, il y a moins de sièges proches de la pelouse que de sièges au dernier rang.

Au premier rang du virage, on a placé 15 sièges. On ajoute 2 sièges chaque fois que l'on monte d'un rang (il y a donc 17 sièges au deuxième rang, 19 au troisième, etc.).
Combien y a-t-il de sièges à la 27ème rangée ?

$$t_{27} = t_1 + (27-1)\cdot r = 15 + 26\cdot 2 = 67$$

Si le virage compte 34 rangées, combien y a-t-il de sièges dans le virage ?

$$S_{34}=\frac{34}{2}\left(2t_1+(34-1)\cdot r\right) = 17\cdot(2\cdot 15 + 33\cdot 2)\ ) = 1632$$

Exercice 1.1 Soit une progression arithmétique (P.A.) avec $t_1 = 8$ et $t_3 = 18$. Calculez t_{10}.

Exercice 1.2 Calculez la somme de tous les multiples de cinq compris entre 101 et 1001.

Exercice 1.3 La somme des 19 premiers termes d'une progression arithmétique est nulle et le dernier terme 27.
Déterminez le premier terme et la raison.

Exercice 1.4 Démontrez que dans une progression arithmétique on a toujours les relations :

a. $t_{n+1}=\frac{t_n+t_{n+2}}{2}$ **b.** $\frac{t_{n+3}^2-t_n^2}{t_{n+2}^2-t_{n+1}^2}=3$

Exercice 1.5 Insérez huit termes entre 7 et 61 de manière à obtenir une progression arithmétique.

Exercice 1.6 La somme du 8ème et du 14ème terme d'une P.A. est 50. On sait aussi que $t_3 = 13$.
Définissez cette progression arithmétique en donnant t_1 et r.

Exercice 1.7 Déterminez le triangle rectangle dont les trois côtés sont en P.A. et dont le périmètre vaut 84.

Exercice 1.8 Les quatre angles consécutifs d'un trapèze sont en progression arithmétique. Sachant que le plus petit mesure 75°, quelle est la mesure du plus grand ?

1.2. Les progressions géométriques (ou suites géométriques)

Définition

On appelle progression géométrique (P.G.) une suite de nombres tels que chacun est égal au précédent multiplié par un nombre constant appelé **raison**.

Deux exemples : 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ... (raison = $\frac{1}{3}$)
3, –6, 12, –24, ... (raison = –2)

Le calcul d'un terme connaissant son rang (t_n)

Soit t_1 le premier terme et r la raison. Par définition, on a :

$$t_2 = t_1 \cdot r$$
$$t_3 = t_2 \cdot r = t_1 \cdot r^2$$
$$t_4 = t_3 \cdot r = t_1 \cdot r^3$$
$$\vdots$$
$$t_n = t_{n-1} \cdot r = t_1\, r^{n-1}$$

Donc :

$$t_n = t_1\, r^{n-1}$$

Exemple
Soit la suite 4, 8, 16, 32, ...
Quel est le 19ème terme ?
$t_1 = 4$, $r = 2$, $n = 19$
donc $t_{19} = 4 \cdot 2^{18} = 1'048'576$

Le calcul de la somme de n termes (S_n)

Le calcul de la somme se fait au moyen des deux relations suivantes :

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$$
et $$r \cdot S_n = r \cdot t_1 + r \cdot t_2 + r \cdot t_3 + \ldots + r \cdot t_{n-2} + r \cdot t_{n-1} + r \cdot t_n$$

On peut décaler les termes sans problèmes.

En retranchant terme par terme la première relation de la deuxième, on obtient :

$$r \cdot S_n - S_n = t_n \cdot r - t_1$$

D'où :

$$S_n = \frac{t_n r - t_1}{r-1} = t_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

Exemple
Que vaut la somme des 10 premières puissances de 3 ?
$t_1 = 3$, $r = 3$, $n = 10$
$S_{10} = 3\frac{3^{10}-1}{3-1} = 88572$

Exemple concret (enfin presque)

Un curieux nénuphar situé au milieu d'un bel étang s'y trouve tellement bien qu'il ne cesse de grandir : sa taille double chaque jour. Il grandit tellement qu'après 30 jours, il recouvre entièrement la surface de l'étang !

Combien de jours a-t-il mis pour ne recouvrir que la moitié de l'étang ?

Il a fallu 29 jours.
(Si vous avez répondu 15 jours, vous avez confondu progression géométrique et arithmétique...)

Quel pourcentage de l'étang recouvrait-il après 26 jours ?

$t_1 = 1$ (100 % de la surface de l'étang), $r = \frac{1}{2}$, on cherche t_5.

$t_5 = t_1\, r^{5-1} = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.0625 = 6.25$ %

Exercice 1.9 Soit une progression géométrique (P.G.) avec $t_1 = 8$ et $t_3 = 18$. Calculez t_{10}.

Exercice 1.10 Déterminez quatre nombres formant une P.G. de raison $\frac{3}{2}$ et de somme 52.

Exercice 1.11 Les côtés d'un triangle rectangle sont en progression géométrique. Déterminez la raison de la progression.

Exercice 1.12 Trouvez trois nombres positifs en P.G. connaissant leur somme (qui vaut 248) et la différence des extrêmes $t_3 - t_1$ (qui vaut 192).

Exercice 1.13 Lorsque vous placez un capital C à la banque, au taux d'intérêt annuel i, votre capital est accru chaque année des intérêts de l'année. Il s'élève donc :

au bout d'un an à $C_1 = C(1+i)$
au bout de deux ans à $C_2 = C_1(1+i) = C(1+i)^2$
etc.
au bout de n années, $C_n = C(1+i)^n$

C'est la formule des intérêts composés.

a. Si vous placez 2500 fr. le 1er janvier 1999 à un taux d'intérêt de 3 %, quel sera votre capital le 1er janvier 2063 ?
b. Un 1er janvier, vous constatez que votre capital se monte à 5234.45 fr. En quelle année êtes-vous ?

Exercice 1.14 Trois nombres différents en progression géométrique forment une progression arithmétique si on permute les deux premiers. Sachant que les raisons sont les mêmes, déterminez ces trois nombres.

Exercice 1.15 Calculez la somme $S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + ...$

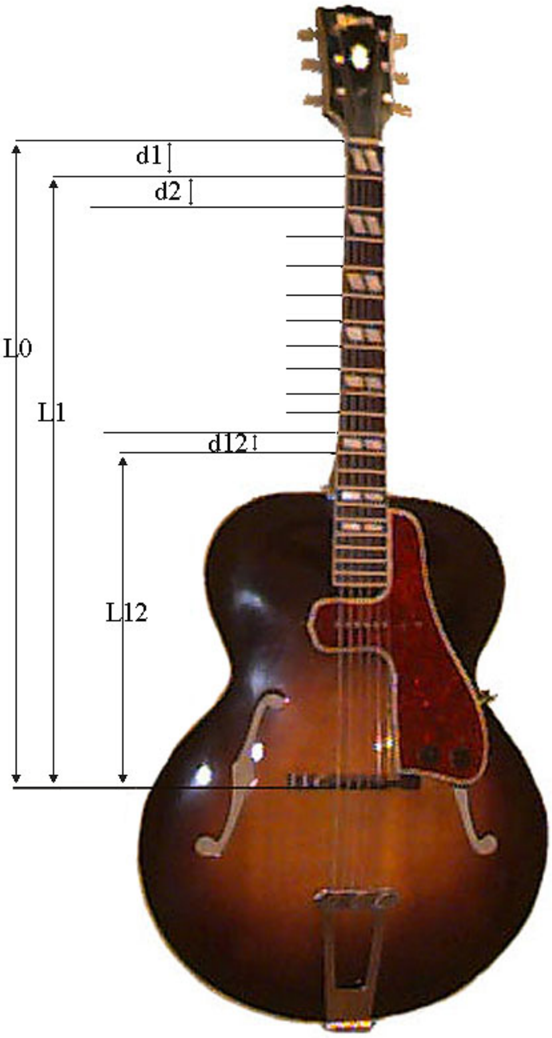
Indication : calculez d'abord $9\cdot S_n$ puis extrayez une P.G.

Exercice 1.16 Emplacement des frettes d'une guitare

Mesurez les longueurs L0, L1, L2,..., L12 définies par les différentes frettes du manche. Mesurez en cm avec un chiffre après la virgule.

L0 =
L1/L0= d1 =
L1 =
L2/L1= d2 =
L2 =
L3/L2= d3 =
L3 =
L4/L3= d4 =
L4 =
L5/L4= d5 =
L5 =
L6/L5= d6 =
L6 =
L7/L6= d7 =
L7 =
L8/L7= d8 =
L8 =
L9/L8= d9 =
L9 =
L10/L9= d10 =
L10 =
L11/L10= d11 =
L11 =
L12/L11= d12 =
L12 =

L12/L0 =



Claude **Ptolémée**
(env. 85 - env. 165)

Référence
Calculs bien tempérés, par Ian Stewart, revue POUR LA SCIENCE N^0 151, mai 1990, pp. 108-114

a. Calculez les quotients $\frac{L1}{L0}$, $\frac{L2}{L1}$, $\frac{L3}{L2}$, ..., $\frac{L12}{L11}$ ainsi que $\frac{L12}{L0}$.
Que remarquez-vous ?

b. Les propriétés des cordes vibrantes et la définition de la gamme dite tempérée sont telles que :
- si une corde de longueur L émet un certain son (mi par exemple), la même corde de longueur L/2 émet le son situé à l'octave au-dessus ;
- les notes (mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si, do, do#, ré, ré#, mi) s'obtiennent avec des longueurs de corde L0, ..., L12, longueurs qui forment une progression géométrique.

Calculez la raison de la suite et comparez-la avec les quotients du point **a.**

c. Claude **Ptolémée** est surtout connu pour son système cosmologique, mais il fut aussi l'auteur d'un traité des *Harmoniques*, où il présente le système pythagoricien, selon lequel les notes doivent être représentées par des rapports de nombres entiers. Les principaux rapports sont la quarte, associé au rapport 3/4, et la quinte, associée au rapport 2/3. Retrouvez-vous ces rapports dans le système tempéré ?

d. Montrez que les distances d1, d2, d3, ... qui séparent deux frettes consécutives du manche forment également une suite géométrique de même raison.

1.3. Progressions géométriques illimitées

Exemple

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=?$

$S_{\infty}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

Somme des termes d'une P.G. illimitée (S_{∞})

Si $|r|<1$, alors $S_{\infty}=\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{t_1}{1-r}$. Autrement, la somme tend vers l'infini.

En effet, si $|r|<1$, alors $r^{\infty}\to 0$.

Exercice 1.17

Dans un carré de 10 cm de côté, on inscrit un cercle. Puis dans ce cercle on inscrit un carré, puis dans le nouveau carré un cercle, etc. On construit ainsi une infinité de carrés. Quelle est la somme des aires des carrés ?

Exercice 1.18

Un nommé **Sissa**, l'inventeur du jeu d'échecs, présenta son jeu au Sultan. Enthousiasmé, ce dernier lui proposa de choisir sa récompense. Sissa, d'après la légende, répondit : « Que tes serviteurs mettent un grain de blé sur la première case, deux sur la seconde, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains de blé jusqu'à la soixante-quatrième case. »

a. Combien de grains de blé aurait-il fallu pour récompenser Sissa selon ses désirs ?

La Suisse s'étend sur une superficie de 41'288 km²

b. En supposant qu'un grain de blé occupe un volume de 1 mm³, quelle serait l'épaisseur de la couche de blé qui recouvrirait une surface équivalente à celle de la Suisse ?

Exercice 1.19

Une balle de caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 2 mètres. Après chaque rebond, elle remonte aux sept dixièmes de la hauteur atteinte après le précédent rebond.

a. Après le 7ème rebond, quelle sera sa hauteur à l'apogée de sa trajectoire ?

b. Quelle longueur de chemin aura-t-elle parcourue quand elle se sera immobilisée sur le sol ?

Exercice 1.20

Un segment M_1M_2 a une longueur de 12 cm. Soit M_3 le milieu de M_1M_2, M_4 le milieu de M_2M_3, M_5 le milieu de M_3M_4, et ainsi de suite. Calculez la longueur du segment M_1M_n quand $n\to\infty$.

Exercice 1.21

Soit $S_n=1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^4}+\frac{7}{2^6}+\frac{9}{2^8}+\ldots$

Indication : calculez $S_n-\frac{1}{4}S_n$ et déduisez S_n quand $n\to\infty$.

1.4. Fractales

Benoît **Mandelbrot**
(1924 - 2010)

Une *fractale* est un objet mathématique, telles une courbe ou une surface, dont la structure est invariante par changement d'échelle.

Le terme « fractale » est un néologisme créé par Benoît **Mandelbrot** en 1974 à partir de la racine latine *fractus*, qui signifie « brisé », « irrégulier ». De nombreux phénomènes naturels – comme le tracé des lignes de côtes, les nuages, les montagnes ou l'aspect du chou romanesco – possèdent des formes fractales approximatives.

Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- il a des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes ;
- il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;
- il est exactement ou statistiquement autosimilaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties ;
- sa « dimension de Hausdorff » est strictement supérieure à sa dimension topologique.

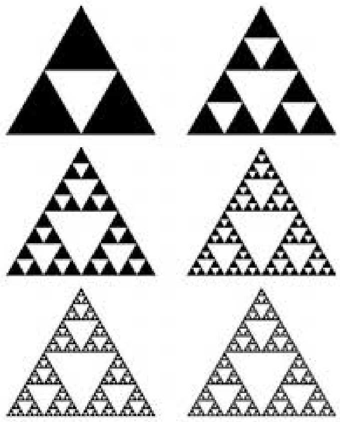
Nous n'allons pas entrer dans les détails de la dimension de Hausdorff ici. De façon imagée, les fractales se caractérisent par une sorte de dimension non entière. Vous trouverez dans la marge des exercices suivants la dimension de Hausdorff des objets étudiés.

Exercice 1.22

Waclaw **Sierpinski**
(1882 - 1969)

Le triangle de Sierpinski a une dimension de $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \cong 1.858$.

La figure ci-contre montre les 6 premières étapes de la construction du « triangle de Sierpinski » (1915). On le construit en dessinant un triangle équilatéral noir. À l'étape 1, on le divise en quatre triangles équilatéraux comme montré sur la figure ci-contre, puis le triangle central est enlevé. À l'étape suivante, on recommence le même processus avec chacun des triangles noirs. En poursuivant ce processus à l'infini, on obtient le triangle de Sierpinski.



a. Déterminez une suite géométrique a_k qui donne le nombre de triangles enlevés lors de la k-ième étape.

b. Calculez le nombre de triangles enlevés de la pièce lors de la 15$^{\text{ème}}$ étape.

c. Calculez le nombre total de triangles enlevés de la pièce après 15 étapes.

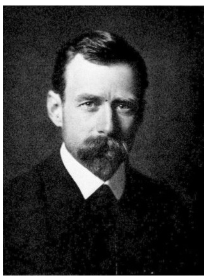
d. En supposant que le triangle de départ ait une surface de 1 unité, calculez une suite b_k qui donne la surface des pièces enlevées lors de la k-ième étape. Montrez que cette suite est une suite géométrique.

e. Déterminez la surface enlevée lors de la septième étape.

f. Déterminez la surface totale enlevée de la pièce après la septième étape.

g. Déterminez quelle proportion de l'aire du triangle de départ est encore noire lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini.

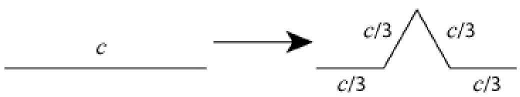
Exercice 1.23



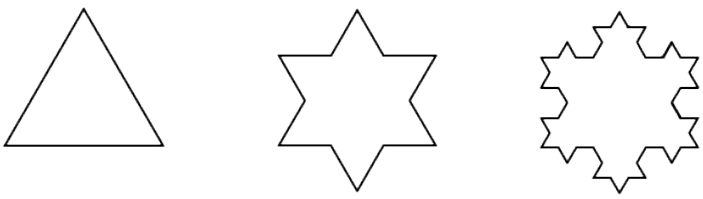
Niels Fabian Helge **von Koch**
(1870 - 1924)

Le flocon de von Koch a une dimension de $\frac{\ln(4)}{\ln(3)} \cong 1.262$.

Le « flocon de neige » de von Koch est une figure fractale qui se construit de manière itérative. En partant d'un triangle équilatéral, on remplace chaque côté par :



Voici les figures obtenues après 0, 1 et 2 itérations du processus :



Quand le nombre d'itérations tend vers l'infini :

a. que vaut le périmètre du flocon si le côté du triangle équilatéral initial a une longueur c ?

b. que vaut l'aire du flocon ?

Exercice 1.24

La construction d'une « éponge de Menger » peut être décrite de la manière suivante :

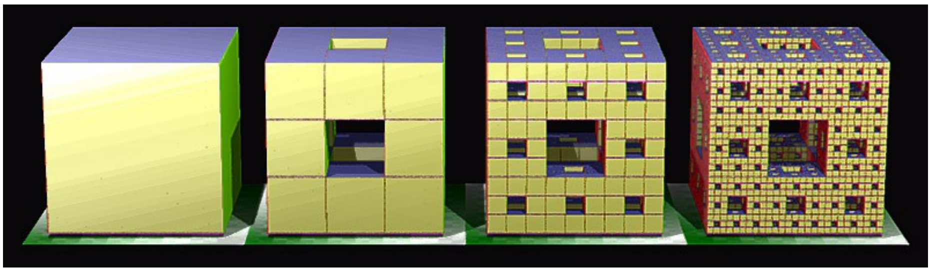
1. débuter par un cube,
2. réduire le cube au tiers et en faire 20 copies,
3. placer ces copies de telle façon qu'elles forment un nouveau cube de la même taille que l'original, sans les parties centrales,
4. répéter le processus à partir de l'étape 2 pour chacun des 20 cubes ainsi créés.

Karl **Menger**
(1902 - 1985)

L'éponge de Menger a une dimension de $\frac{\ln(20)}{\ln(3)} \cong 2.727$.

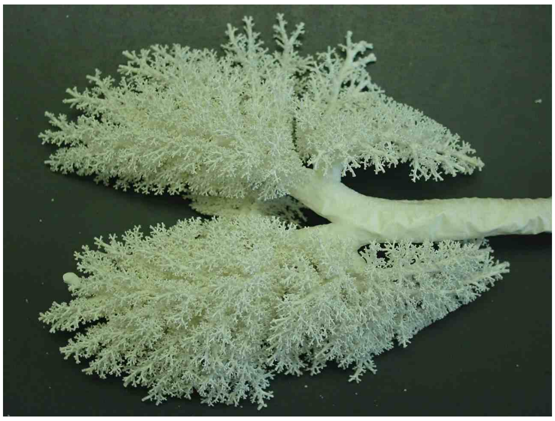
Le solide obtenu à la limite, après un nombre infini d'itérations, est l'éponge de Menger.

À chaque itération, on multiplie le nombre de cubes par 20, ce qui fait que le solide créé à l'itération n contient 20^n cubes.



Quand le nombre d'itérations tend vers l'infini :

a. que vaut l'aire de l'éponge de Menger si le côté du cube initial a une longueur c ?
b. que vaut le volume de l'éponge de Menger ?



La structure des poumons se rapproche d'une éponge de Menger.

1.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les formules pour les progressions arithmétiques ❏ ok
Connaître les formules pour les progressions géométriques ❏ ok
À la lecture d'un problème, savoir de quel type de progression il s'agit ❏ ok