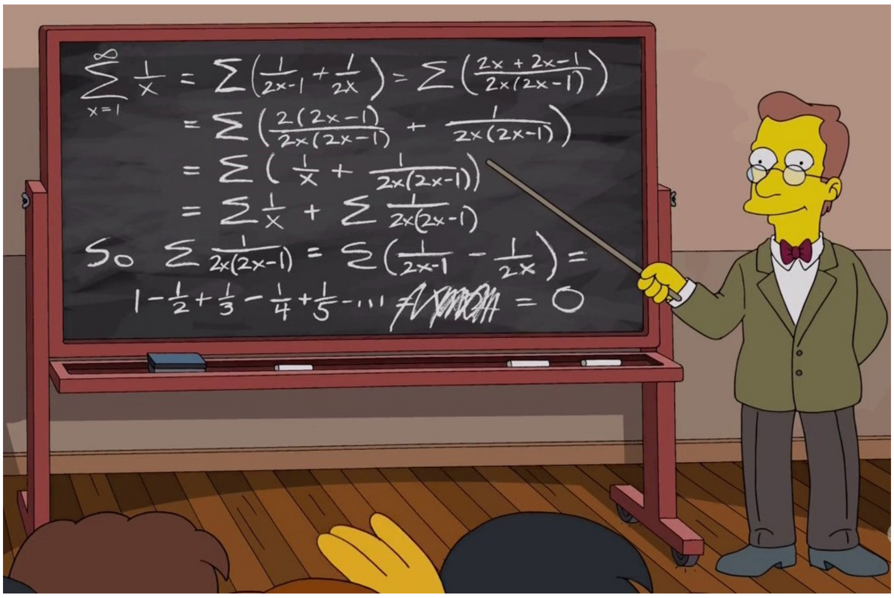
3. Séries



3.1. Définition

Définition

1 ou 0 ?
Il n'y a pas de convention claire qui dit si l'indice du premier terme est 0 ou 1. On écrira l'un ou l'autre suivant les circonstances.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
À cette suite, nous associons une nouvelle suite (s_n) formée des sommes suivantes :
$s_0 = u_0$
$s_1 = u_0 + u_1$
$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$
$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
La suite (s_n) est appelée **série** numérique de terme général u_k.
Le terme s_n est la n-ième **somme partielle** de la série (comprenant les n+1 premiers termes de la suite).

Exercice 3.1

Écrivez la troisième somme partielle (s_3) des séries suivantes :

a. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$ **b.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k+1}{k^2+2k+2}$ **c.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1}}{k!}$

Exercice 3.2

Donnez une expression du terme général des séries suivantes :

a. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots$ **b.** $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\dots$

c. $\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{7}{10}+\frac{10}{14}+\dots$ **d.** $\frac{4}{10}+\frac{9}{17}+\frac{16}{26}+\frac{25}{37}+\frac{36}{50}+\dots$

e. $\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dots$

3.2. Convergence des séries

Si la suite (s_n) converge, on dit que la série de terme général u_k **converge** et, dans ce cas, la limite de la suite (s_n) s'appelle **somme** de la série et on la note : $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
Une série qui ne converge pas **diverge**.

Calculer la somme exacte d'une série est, en général, une tâche difficile. Voilà pourquoi nous allons nous intéresser à des tests qui permettent de savoir si une série est convergente ou divergente, sans en calculer explicitement la somme.

Théorème 3.1 (critère de divergence)

Si $\lim_{k\to\infty}|u_k|\neq 0$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

Par contraposée, si la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est convergente, alors $\lim_{k\to\infty}|u_k|=0$.

La réciproque n'est en général pas vraie.

Si $\lim_{k\to\infty}|u_k|=0$, **on ne peut pas conclure** que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

Série harmonique

On cherche une série qui est inférieure à la série harmonique et qui diverge. Cela implique que la série harmonique diverge aussi.

La première démonstration de la divergence de la série harmonique est due à Nicole **Oresme**, parue dans *Questiones super geometriam Euclidis* (1360).

Montrons que la **série harmonique** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\dots$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\underbrace{(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})}_{2\ \text{termes}}+\underbrace{(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})}_{4\ \text{termes}}+\underbrace{(\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16})}_{8\ \text{termes}}+\underbrace{(\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{32})}_{16\ \text{termes}}+\dots$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$$

On voit tout de suite que cette dernière série diverge. Comme la série harmonique est supérieure, elle diverge aussi.

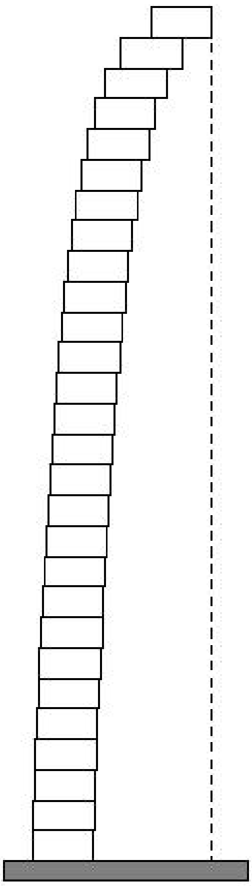
Pourtant $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\to 0$ …

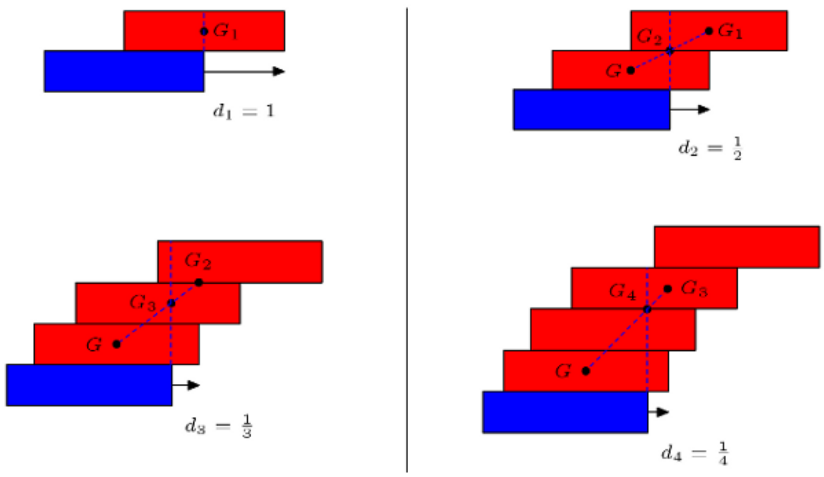
Cela montre bien que $\lim_{k\to\infty}|u_k|=0$ ne permet pas de conclure que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge.

Empilement de dominos

En architecture, un porte-à-faux est une construction qui est supportée par une partie qui est elle-même au-dessus du vide. Avec des pièces de domino on peut faire, par exemple, une structure de type porte-à-faux comme ci-contre.

L'empilement est stable tant que chaque domino est traversé par la verticale du centre de gravité de l'ensemble des dominos qui sont au-dessus de lui.





Pour trouver le plus grand surplomb possible, l'astuce consiste à construire la tour... en commençant par le haut ! Choisissons comme unité la longueur d'un demi-domino :

- avec 2 dominos, il est clair que le surplomb maximal vaut 1 ;
- avec 3 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 ;
- avec 4 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 + 1/3 ;
- avec 5 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4.

Le surplomb maximal que l'on peut réaliser avec une boîte de 28 dominos vaut donc 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4+ ... + 1/27 soit approximativement 3.92 (un peu moins que la longueur de 2 dominos).
Théoriquement, si l'on dispose d'un nombre suffisant de dominos, on peut réaliser un empilement permettant un surplomb aussi grand qu'on le veut, puisque la série harmonique tend vers l'infini. Lentement, mais sûrement ! Ainsi, avec dix boîtes, on pourrait obtenir un surplomb de 6.2 (un peu plus de trois longueurs de domino). Pour réaliser un surplomb de dix dominos, il faudrait utiliser 272'400'600 dominos...

Exercice 3.3

Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculez sa somme.

Aide : remarquez que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Exercice 3.4

Démontrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

Série alternée

Une **série alternée** est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

Exemple $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots$

Théorème 3.2

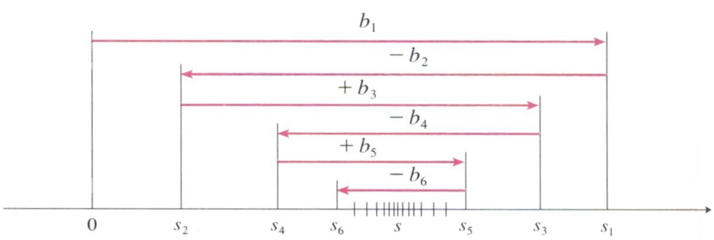
Soit la somme d'une suite alternée $s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$, avec $b_k > 0$

Si la série alternée satisfait

a. $0 < b_{k+1} < b_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

b. $\lim_{k \to \infty} b_k = 0$

alors la série est convergente.



La première somme partielle $s_1 = b_1$ est positive. La deuxième $s_2 = b_1 - b_2$ est encore positive, car $b_2 < b_1$. La somme suivante $s_2 = b_1 - b_2 + b_3$ se trouve à droite de s_2, mais à gauche de s_1. Les sommes partielles oscillent vers l'avant et vers l'arrière, et, puisque la distance entre elles tend vers zéro, elles finissent par converger.

Exercice 3.5

La série harmonique alternée $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ converge-t-elle ?

Exercice 3.6

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3k}{4k-1}$ converge-t-elle ?

Exercice 3.7

La série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{k^3+1}$ converge-t-elle ?

Convergence absolue

Une série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est dite **absolument convergente** lorsque la série des valeurs absolues $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ est convergente.

Théorème 3.3

Si une série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

La réciproque n'est pas vraie. En effet, la série harmonique alternée converge, mais pas la série harmonique.

Démonstration Une des propriétés de la valeur absolue est $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité du triangle).

On peut la généraliser pour obtenir : $\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$.

Comme la série est absolument convergente, $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = s \in \mathbb{R}$, la suite $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est réelle et comprise entre $-s$ et s. Elle est donc convergente.

Test de comparaison

L'emploi du **test de comparaison** est subordonné à la connaissance d'un certain nombre de séries $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ qui servent de repère.

Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ soient des séries à termes positifs.

a. Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est convergente et $u_k \leq v_k$, $\forall\, k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

b. Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est divergente et $u_k \geq v_k$, $\forall\, k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

Séries de Riemann

$1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots$ converge si $a > 1$ et diverge si $a \leq 1$.

Exercice 3.8

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2}$ converge-t-elle ?

Quelques séries connues

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots=2 \qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\ldots=1$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(k-1)(k+1)}+\ldots=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-1)(4k+1)}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6} \qquad 1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{k^4}+\ldots=\frac{\pi^2}{90}$$

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8} \qquad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots=e$$

Séries alternées

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\ln(2) \qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4}$$

Exemple 1 Soit $v_k = \frac{1}{2^{k-1}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots = 2$ et $u_k = \frac{1}{k!}$.

$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \geqslant \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k-1 \text{ fois}} \cdot 1$ et donc $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

Il s'ensuit que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$ converge et vaut moins que 2.

Exemple 2 Soit $v_k = \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ qui diverge et $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

$\sqrt{k} \leqslant k$ et donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Il s'ensuit que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ diverge.

Exercice 3.9

Dites si les séries suivantes convergent ou non :

a. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{n+1}{2n+1} + \ldots$

b. $\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$

c. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} + \ldots$

d. $\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \ldots + \frac{1}{11n} + \ldots$

e. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$

f. $\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} + \ldots$

g. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)^2} + \ldots$

Exercice 3.10

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$ est-elle convergente ?

Théorème 3.4

Jean Le Rond **D'Alembert**
(1717 - 1783)

Critère du quotient (ou **critère de D'Alembert**)

Soit $c = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right|$.

a. Si $c < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente et donc la série converge.

b. Si $c > 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

c. Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Démonstration La démonstration du test du quotient repose sur la comparaison de la série donnée avec une progression géométrique. Il n'est pas étonnant qu'interviennent des progressions géométriques parce qu'elles sont caractérisées par le fait que le rapport q des termes consécutifs est constant et elles sont convergentes lorsque $|q| < 1$. Ici, le rapport des termes consécutifs n'est pas constant mais il tend vers c, et donc, pour k grand, ce rapport est presque constant et la série converge lorsque $c < 1$.

Exemple 1 Soit la série harmonique : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. $\quad c = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| = 1$

Il y a donc doute.

Exemple 2 Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. $c = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k+1} \right| = 0$

La série est donc convergente.

Exercice 3.11

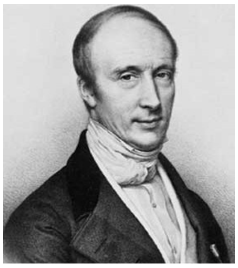
Utilisez le critère du quotient pour déterminer si les séries suivantes convergent.

a. $\frac{1!}{10} + \frac{2!}{100} + \ldots + \frac{n!}{10^n} + \ldots$ **b.** $\frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \ldots + \frac{n+2}{2^n} + \ldots$

c. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{2^n} + \ldots$ **d.** $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)} + \ldots$

e. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$

Théorème 3.5



Augustin Louis **Cauchy**
(1789 - 1857)

Critère de la racine (ou **critère de Cauchy**).

Soit $c = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|}$.

a. Si $c < 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ est absolument convergente et donc la série converge.

b. Si $c > 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge.

c. Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Exercice 3.12

Utilisez le critère de la racine pour dire si les séries suivantes convergent.

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ **b.** $\frac{1}{180} + \frac{1}{120} + \frac{1}{80} + \ldots + \frac{3^n}{180\cdot 2^n} + \ldots$

c. $\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n + \ldots$

Théorème 3.6

Test de l'intégrale

Soit f une fonction continue, positive et jamais croissante dans l'intervalle $[p\,;\infty[$ et soit $u_k = f(k)$.

La série $\sum_{k=p}^{\infty} u_k$ converge ou diverge, selon que $\int_p^{+\infty} f(x)dx$ existe ou non.

De plus : $\int_p^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{k=p}^{\infty} u_k \le u_p + \int_p^{+\infty} f(x)dx$

Exemple 1 Soit la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

La fonction est donc $f(x) = \frac{1}{x}$ et $p = 1$.

$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} (\ln(t)) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \infty$. La série est donc divergente.

Exemple 2 Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

La fonction est donc $f(x)=\frac{1}{x^2}$ et $p = 1$.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right)=1 \ .$$

La série est donc convergente et comprise entre 1 et 2.

Exercice 3.13

Démontrez le critère de comparaison avec une intégrale.

Indication :
Approchez l'aire sous la courbe par des rectangles de largeur 1.

Exercice π

Utilisez le test de l'intégrale pour déterminer si ces séries convergent.

a. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\ldots$

b. $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\ldots$

c. $\sin(\pi)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{9}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$

d. $1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}+\ldots$

Exercice 3.15

Les séries suivantes, dont on donne le terme général u_k, $k \in \mathbb{N}^*$, convergent-elles ? À vous de trouver le bon critère pour répondre à la question.

a. $u_k=\frac{1}{(k+1)^2-1}$

b. $u_k=\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

c. $u_k=\frac{k^2}{2k^2+1}$

d. $u_k=\left(\frac{3k}{3k+1}\right)^k$

e. $u_k=\left(\frac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{k}{2}}$

f. $u_k=\frac{k^3}{e^k}$

g. $u_k=\frac{k!}{2^k+1}$

h. $u_k=\frac{1}{\ln(k)}$

i. $u_k=\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

j. $u_k=\frac{k!}{10^k}$

k. $u_k=\frac{k+1}{k\sqrt{3k-2}}$

l. $u_k=\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$

m. $u_k=\frac{2^{k-1}}{k^k}$

n. $u_k=\sqrt[k+1]{10}$

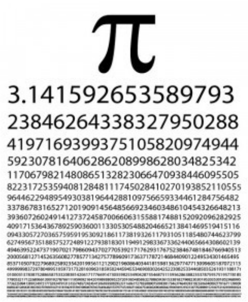
o. $u_k=\frac{1}{10k+1}$

p. $u_k=\frac{(k+1)!}{3^{k+2}+7}$

q. $u_k=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

r. $u_k=\frac{\ln(k)}{k^3}$

3.3. Une application : le calcul de π



Jusqu'en 1400 environ, la précision des approximations de π n'excédait pas les 10 décimales. Les progrès en matière de calcul intégral et de séries vont permettre d'améliorer cette précision.

Les séries permettent d'approcher π avec d'autant plus de précision qu'on utilise de termes de la série pour le calcul. Vers 1400, **Madhava de Sangamagrama** trouve ce qui constitue, en langage moderne, le développement de la fonction arc tangente (redécouvert par James **Gregory** et Gottfried Wilhelm **Leibniz** au 17e siècle) :

Formule de Madhava-Leibniz-Grégory

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots$$

Cette formule est moyennement efficace à calculer les décimales de π (cinq décimales seulement pour 500'000 fractions).

Formule de Nilakantha

$$\pi = 3 + \frac{4}{2\cdot3\cdot4} - \frac{4}{4\cdot5\cdot6} + \frac{4}{6\cdot7\cdot8} - \frac{4}{8\cdot9\cdot10} + \ldots$$

Cette formule due au mathématicien hindou Kelallur **Nilakantha** Somayaji (1444–1544) donne 11 décimales pour 10'000 fractions.

Srinivasa Aiyangar **Ramanujan**
(1887 - 1920)

Au début du 20e siècle, le mathématicien indien Srinivasa **Ramanujan** a trouvé de nombreuses nouvelles formules faisant intervenir π ; certaines d'entre elles sont remarquables par leur élégance et leur profondeur mathématique. L'une de ces formules est la série suivante :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

La formule ci-dessous, possédant un lien étroit avec celle énoncée ci-dessus, a été découverte par David et Gregory **Chudnovsky** en 1987 :

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

Cette formule donne 14 nouvelles décimales de π à chaque terme. Vers la fin des années 1980, les frères **Chudnovsky** l'ont utilisée pour battre plusieurs records de décimales de π calculées. Elle demeure la formule la plus utilisée pour calculer π sur des ordinateurs personnels.
Le 8 octobre 2014, le nouveau record est 13'300 milliards de décimales. Pour effectuer ce calcul, 208 jours ont été nécessaires avec un ordinateur muni d'un double processeurs 2.6 Ghz Xeon E5-4650L, 192Gb DDR3 de mémoire vive accompagnés de 24 disques durs de 4 To et 30 disques durs de 3 To soit 192 To. Il faut dire que la seule contrainte est l'espace disque pour conserver le résultat !

3.4. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître la définition d'une série ❑ ok
Connaître les critères de convergence d'une série et savoir les utiliser ❑ ok