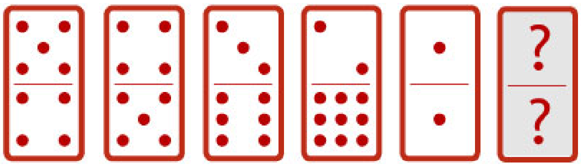
2. Suites

2.1. Prolégomènes

Un peu d'histoire

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez **Archimède**, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au 1er siècle après J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de **Héron d'Alexandrie**.
On retrouvera cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du 17ème siècle) avec *la méthode des indivisibles* (**Cavalieri**, **Torricelli**, **Pascal**, **Roberval**). C'est ainsi que l'on voit **Bernoulli**, **Newton**, **Moivre**, **Stirling** et **Wallis**, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à **Lagrange** que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières dont le but est d'approcher, non plus des nombres, mais des fonctions.
Dans la seconde moitié du 20ème siècle, le développement des ordinateurs donne un souffle nouveau à l'étude des suites en analyse numérique grâce à *la méthode des éléments finis*. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.
Plus anecdotique, on retrouve aussi des suites dans les tests de Q.I. On donne les premiers éléments d'une suite (pas forcément des nombres) et il faut trouver l'élément suivant :



L'**encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers** (originellement en anglais *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, couramment abrégé sous le sigle **OEIS**) est un site web permettant d'effectuer gratuitement des recherches parmi une base de données de suites d'entiers présentant un intérêt mathématique ou parfois simplement ludique. Dans cette forme et cette présentation, c'est la plus grande du monde (en 2012).

Signalons le fabuleux site *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences®* (*OEIS®*), à l'adresse http://www.oeis.org.

Définition

Une **suite** est une liste ordonnée de **termes**, indexée par les entiers naturels.
La suite $(u_0, u_1, u_2, u_3, \dots)$ est aussi notée (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Contrairement au chapitre 1 sur les progressions, on commencera désormais la numérotation des termes à 0.

En particulier, on parle de suite « entière », suite « réelle » et suite « complexe », quand tous les termes appartiennent à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.

Une suite peut être déterminée de plusieurs manières :

- par la liste de tous ses termes s'il n'y a pas de règle de formation

  (5, 18, 24, 11, ...)

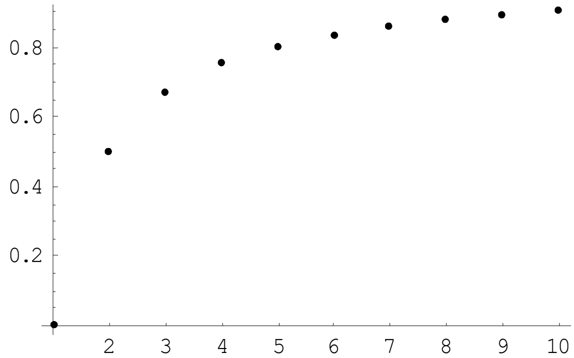
- par une formule qui donne u_n par rapport à n (donner $f(n) = u_n$)

  $u_n = n^2 \Rightarrow (0, 1, 4, 9, 16, \dots)$

- par récurrence : le deuxième terme de la suite est donné en fonction du premier, le troisième en fonction du deuxième, et ainsi de suite

  $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases} \Rightarrow (2, 5, 11, 23, \dots)$$

On peut aussi représenter une suite sur un dessin : $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$



Exercice 2.1

Soit la suite $u_n = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Écrivez les 9 premiers termes de cette suite.
Comparez vos résultats avec la table ci-dessous. Que constatez-vous ?

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Distance du Soleil (UA)	0.39	0.72	1	1.52	5.2	9.54	19.23	30.07

Définitions

Une suite est **croissante** si $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Une suite est **décroissante** si $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Une suite est **strictement croissante** si $u_n < u_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Une suite est **strictement décroissante** si $u_n > u_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

Une suite est **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

Une suite est **majorée** si $\exists$ un réel M tel que $\forall$ entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Cet entier M s'appelle le **majorant**.

Une suite est **minorée** si $\exists$ un réel m tel que $\forall$ entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. Cet entier m s'appelle le **minorant**.

Une suite est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Notations :

$\exists$: il existe
$\forall$: pour tout

Exercice 2.2

Pour déterminer si une suite est croissante ou décroissante, il faut étudier le signe de la différence $(u_{n+1} - u_n)$, ou comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes, ou alternées ? Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $-1, 1, -1, 1, \ldots$ **b.** $u_n = \frac{3n-1}{5n-2}$ **c.** $u_n = \frac{n}{n^2+1}$

d. $2, 2, 2, 2, \ldots$ **e.** $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ **f.** $u_n = \frac{5n-2}{3n-1}$

Exercice 2.3

Déterminez si les suites ci-dessous sont minorées, majorées, ou bornées. Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ **b.** $u_n = \frac{1}{n}$ **c.** $u_n = n$

d. $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ **e.** $u_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ **f.** $u_n = \left|(-3)^n - 2\right|$

2.2. Convergence

On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** si elle admet une limite réelle L en $+\infty$, autrement dit si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$.

Si elle existe, la limite d'une suite est unique.

Si une suite n'est pas convergente, elle **diverge**.

Théorème 2.1

a. Toute suite monotone et bornée converge.
b. Toute suite convergente est bornée.
c. Soit (u_n) une suite convergente vers a et (v_n) une suite convergente vers b. Alors

$(u_n + v_n)$ converge vers $(a + b)$

$(u_n \cdot v_n)$ converge vers $(a \cdot b)$

$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$(\lambda\, u_n)$ converge vers $(\lambda\, a)$

Exercice 2.4

Montrez que :

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$ **b.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2} = 0$

Exercice 2.5

Les suites suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, vers quelle valeur ? Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $\dfrac{2n+3}{n+1}$ **b.** $\dfrac{n^2-1}{n+2}$ **c.** $(-1)^n$

d. $\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ **e.** $\dfrac{\ln(n)}{n}$ **f.** $\dfrac{n!}{n^n}$

Exercice 2.6

Étudiez la convergence des suites dont on donne le terme général. Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $\dfrac{n^2+1}{n^2+n-1}$ **b.** $\dfrac{n^4+2n+2}{n+4}$ **c.** $\dfrac{n^2+6}{n(n+1)(n+2)}$

d. $\sqrt[n]{n}$ **e.** $\sqrt[n]{a}$, $0 < a < 1$ **f.** $\sqrt[n]{a}$, $a > 1$

Exercice 2.7

Soit (u_n) une suite telle que la suite $(|u_n|)$ converge. Peut-on en déduire que (u_n) converge ?

Suites définies par récurrence

Il existe des relations de récurrence liant plus de deux termes consécutifs et qui ne se ramènent donc pas à ce cas, par exemple la suite de Fibonacci que nous verrons plus loin.

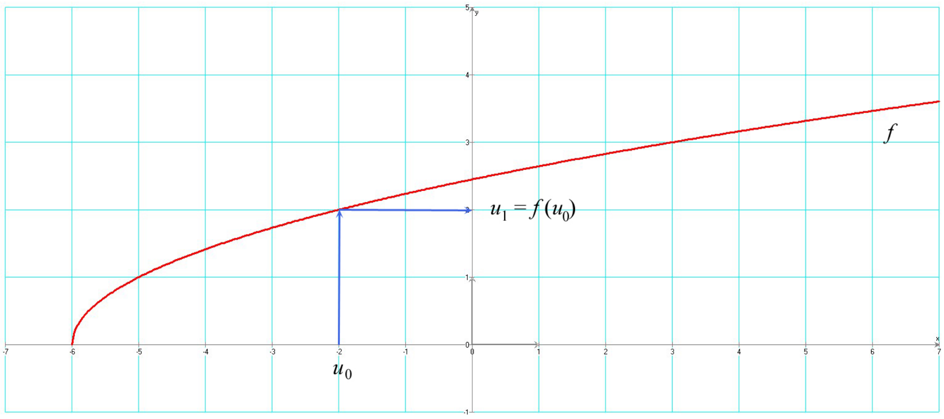
On va s'intéresser aux suites où le deuxième terme de la suite est calculé à partir du premier, le troisième à partir du deuxième, et ainsi de suite. Il est *a priori* impossible de calculer immédiatement le terme u_{10}, par exemple. Pour atteindre u_{10}, il faudra d'abord calculer les 9 termes qui le précèdent.

La relation de récurrence peut être résumée par la formulation : $u_{n+1} = f(u_n)$.
f est appelée « fonction associée à la suite ».

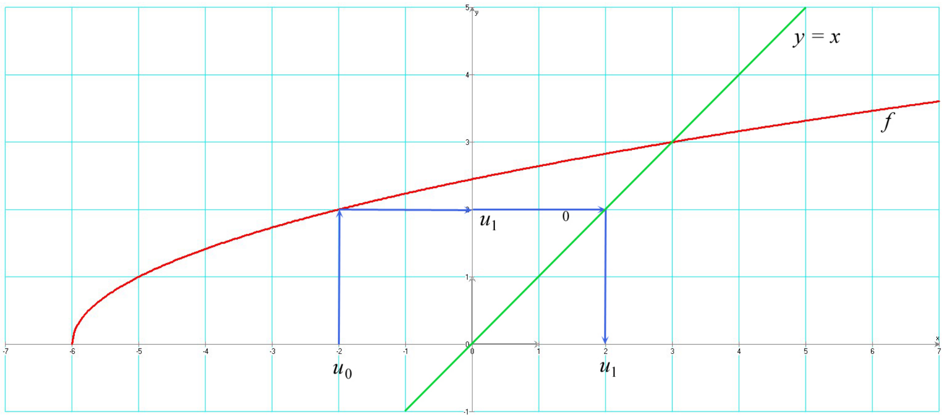
Soit la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{6+u_n} \end{cases}$

La fonction associée à la suite ci-dessus est $f(x) = \sqrt{6+x}$.

On peut donc, à l'aide de la courbe de f, trouver u_1 en traçant l'image de u_0 :

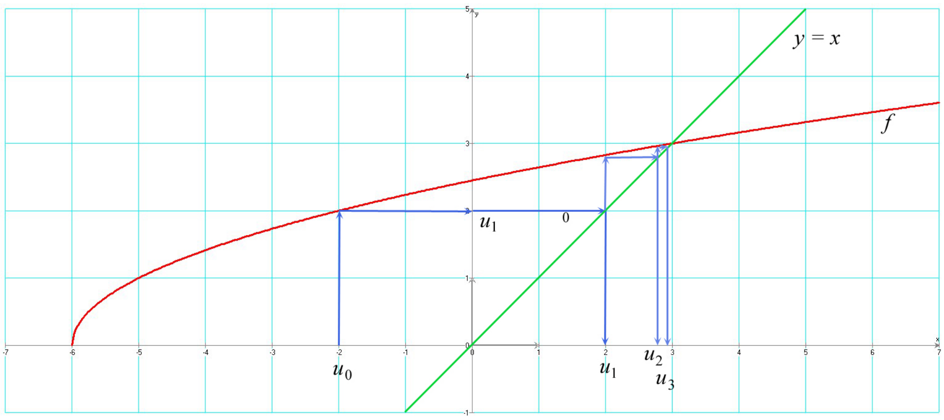


Pour tracer l'image de u_1, il faut maintenant le ramener sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation : $y = x$.



On continue ainsi l'opération...

Une fois que l'on a bien compris le procédé, il n'y a plus besoin de tirer le trait jusqu'à l'axe des y.



Ici, la suite semble converger vers la valeur 3, donc $\lim_{n \to \infty} u_n = 3$.

Théorème 2.2

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et soit (u_n) une suite vérifiant pour tout n : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L et si f est continue en L, alors L vérifie $f(L) = L$.
Pour trouver les valeurs possibles de L, il faut donc résoudre l'équation : $f(x) = x$.

Un point dont le couple de coordonnées est de la forme $(L\ ;\ f(L))$ est sur la courbe de f. Et comme $f(L) = L$, le couple peut aussi être écrit $(L\ ;\ L)$ donc ce point est également sur la droite d'équation $y = x$.

Si (u_n) converge vers L et si f est continue en L alors L est l'abscisse d'un des points d'intersection entre la courbe de f et la droite $y = x$.

Exercice 2.8

Reprenons la suite définie dans l'exemple ci-dessus : $\begin{cases} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{6+u_n} \end{cases}$

Vers quelle valeur converge cette suite ?
Refaites le dessin, en partant de 7 au lieu de –2.

Exercice 2.9

Soit la suite (u_n) définie par la relation : $u_{n+1} = 0.2u_n^2 - u_n + 3.2$.

a. Utilisez le procédé graphique décrit ci-dessus pour trouver la ou les valeurs possibles de la limite de (u_n).

b. Vers quelle valeur la suite converge-t-elle ? Quelle est l'influence de u_0 ? Vous pouvez utiliser un tableur ou écrire un programme.

Exercice 2.10

Mêmes questions qu'à l'exercice 2.9, mais avec la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

2.3. Suites particulières

Exercice 2.11

Héron d'Alexandrie, savant grec du 1er siècle après J.-C., a inventé un algorithme qui permet de s'approcher très vite de la racine carrée d'un nombre réel m positif, en itérant la formule récursive :

$$\begin{cases} u_0 & = & m\,,\ m > 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{m}{u_n}\right) \end{cases}$$

Utilisez et justifiez cet algorithme.

Exercice 2.12

La *suite logistique* modélise des situations d'équilibre. On la retrouve en particulier dans les systèmes proies-prédateurs pour étudier l'évolution des populations d'animaux. Elle illustre aussi pourquoi les invasions de criquets (Argentine en 2016, Russie en 2015, Madagascar en 2013, etc.) sont complètement imprévisibles.

Elle est définie ainsi :

$$\begin{cases} u_0 & \in &]0;1] \\ u_{n+1} & = & f_a(u_n) \end{cases}$$

où $f_a(x) = a\,x\,(1-x)$ et $a \in]0;4]$.

Dans le modèle logistique, nous considérerons que la variable, notée ici u_n, désigne le rapport de la population d'une espèce sur la population maximale de cette espèce (c'est un nombre compris entre 0 et 1).

En faisant varier le paramètre a, plusieurs comportements complètement différents sont observés.

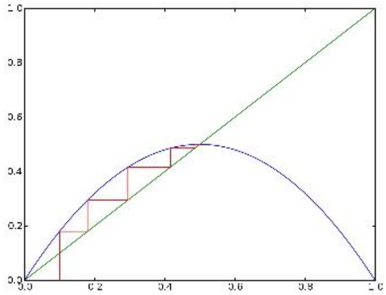
Cas $0 \le a \le 1$: la population s'éteint.

L'espèce finira par mourir, quelle que soit la population de départ.

Autrement dit, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Cas $1 \leq a \leq 3$: l'effectif de la population se stabilise.

- Si $1 \leq a \leq 2$, la population finit par se stabiliser autour de la valeur $\frac{a-1}{a}$, quelle que soit la population initiale. Autrement dit $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \frac{a-1}{a}$.

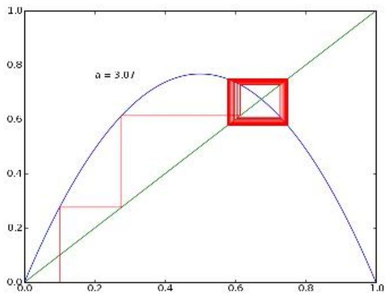


- Si $2 \leq a \leq 3$, elle finit également par se stabiliser autour de $\frac{a-1}{a}$ après avoir oscillé autour pendant quelque temps.

  La vitesse de convergence est linéaire, sauf pour $a = 3$ où elle est très lente.

Cas $3 \leq a \leq 3.57$: l'effectif de la population oscille entre 2, 4, 8, …, 2^k valeurs.

- Si $3 < a \leq 1+\sqrt{6}$ (environ 3.45), elle finit par osciller entre deux valeurs, dépendantes de a mais pas de la population initiale.



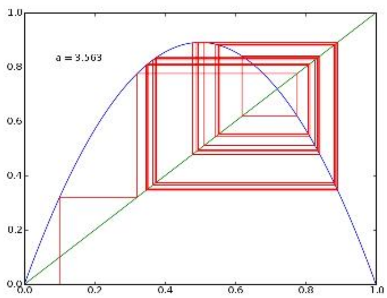
Mitchell **Feigenbaum**
(1944-2019)

Les **nombres de Feigenbaum** ou **constantes de Feigenbaum** sont deux nombres réels découverts par le physicien Mitchell Feigenbaum en 1975. Tous deux expriment des rapports apparaissant dans les diagrammes de bifurcation de la théorie du chaos.

- Si $3.45 < a < 3.54$ (environ), elle finit par osciller entre quatre valeurs, là encore dépendantes de a mais pas de la population initiale.

- Si a est légèrement plus grand que 3.54, la population finit par osciller entre huit valeurs, puis 16, 32, etc. L'intervalle des valeurs de a conduisant au même nombre d'oscillations décroît rapidement. Le rapport entre deux de ces intervalles consécutifs se rapproche à chaque fois de la *constante de Feigenbaum*, $\delta = 4{,}66920160910299067185320382...$

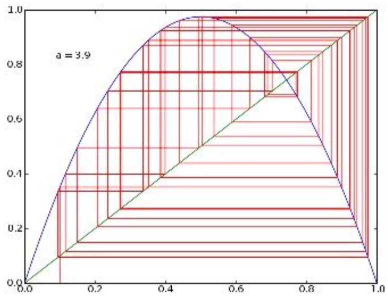
  Aucun de ces comportements ne dépend de la population initiale.



Cas 3.57 ≤ *a* : l'effectif de la population est chaotique, sauf exception.

La **théorie du chaos** étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, un phénomène généralement illustré par l'effet papillon. Des différences infimes dans les conditions initiales (comme des erreurs d'arrondi dans les calculs numériques) entraînent des résultats totalement différents pour de tels systèmes, rendant en général toute prédiction impossible à long terme.

- Vers $a = 3.57$, le ***chaos*** s'installe. Aucune oscillation n'est encore visible et de légères variations de la population initiale conduisent à des résultats radicalement différents.
- La plupart des valeurs au-delà de 3.57 présentent un caractère chaotique, mais il existe quelques valeurs isolées de a avec un comportement qui ne l'est pas. Par exemple à partir de $1+\sqrt{8}$ (environ 3.82), un petit intervalle de valeurs de a présente une oscillation entre trois valeurs et pour a légèrement plus grand, entre 6 valeurs, puis 12, etc. D'autres intervalles offrent des oscillations entre 5 valeurs, etc. Toutes les périodes d'oscillation sont présentes, là encore indépendamment de la population initiale.



- Au-delà de $a = 4$, la population quitte l'intervalle [0 ; 1] et diverge quasiment pour toutes les valeurs initiales.

Utilisez la page web https://www.geogebra.org/m/wCjHPYDU pour visualiser les comportements décrits ci-dessus.

Exercice 2.13

Une coccinelle à l'état larvaire ou adulte se nourrit de pucerons. Elle est pour cette raison parfois utilisée dans la lutte biologique contre les pucerons.
Ayant observé la population des coccinelles dans un jardin pendant plusieurs années, on a constaté que si x désigne le nombre de centaines de coccinelles présentes une année, avec $0 \leq x \leq 1$, le nombre de coccinelles l'année suivante est $f(x) = 2.8 \cdot x \cdot (1-x)$.

a. Tracez la courbe de la fonction f sur [0 ; 1].
b. En 2017, on dénombre 10 coccinelles. Déterminez par lecture graphique le nombre de coccinelles en 2018, puis 2019. Vérifiez ces résultats par calcul.
c. Déterminez le nombre de coccinelles tel que la population reste stable l'année suivante.
d. Déterminez le nombre minimum de coccinelles qui permettra d'en avoir au moins 20 de plus l'année suivante.

Exercice 2.14

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies simultanément $\forall\, n > 0$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\,, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Montrez que :
a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < v_n$
b. (u_n) est croissante
c. (v_n) est décroissante
d. $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0$

e. La limite commune de ces deux suites est le nombre e. Montrez par l'absurde que e est irrationnel (procédez par encadrement).

Suite de Syracuse

Au début des années 1930, un mathématicien de l'université de Hambourg, Lothar **Collatz**, proposa de créer des suites de nombres de la manière suivante (que l'on appelle *algorithme de Collatz*) :

$$\begin{cases} u_0 & = & a \in \mathbb{N}^* \\ u_{n+1} & = & \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

Université de Syracuse

La *conjecture de Syracuse* dit que cette suite se termine toujours par le cycle 4, 2, 1. Il n'existe pour l'instant aucune démonstration (sinon ce serait un théorème).

Cette conjecture est appelée *conjecture de Syracuse* ou *problème de Syracuse* depuis que Helmut **Hasse**, un ami de **Collatz**, la présenta à l'université de Syracuse (près de New York) dans les années 50.

Exercice 2.15

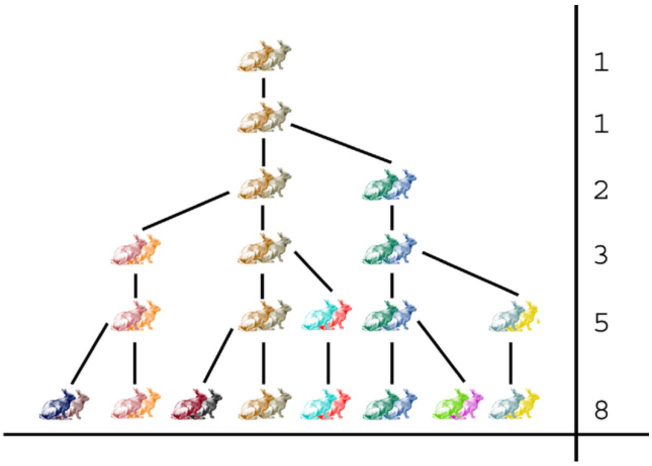
On appelle « altitude » le plus grand nombre atteint par la suite et « durée du vol » le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir le chiffre 1.
Programmez la suite de Syracuse.
Utilisez ensuite ce programme pour trouver le terme initial u_0 (avec $u_0 \leq 1000$) qui donne l'altitude maximale et celui qui engendre le plus long vol.

Suite de Fibonacci

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ième mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- au (début du) premier mois, il y a juste *une* paire de lapereaux ;
- les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est croissante).

Leonardi Pisano (Léonard de Pise), dit **Fibonacci**, 1170-1241 (dates approximatives)



Notons $F(n)$ le nombre de couples de lapins au début du mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce que l'on note : $F(1) = F(2) = 1$).
Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins ; on note alors $F(3) = 2$.
Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n+2$: $F(n+2)$ désigne la somme des couples de lapins au mois $n+1$ et des couples nouvellement engendrés.
Or, n'engendrent au mois $n+2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier n strictement positif : $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$.
On choisit alors de poser $F(0) = 0$, de manière que cette équation soit encore vérifiée pour $n = 0$.

On obtient ainsi la *forme récurrente* de la suite de Fibonacci :

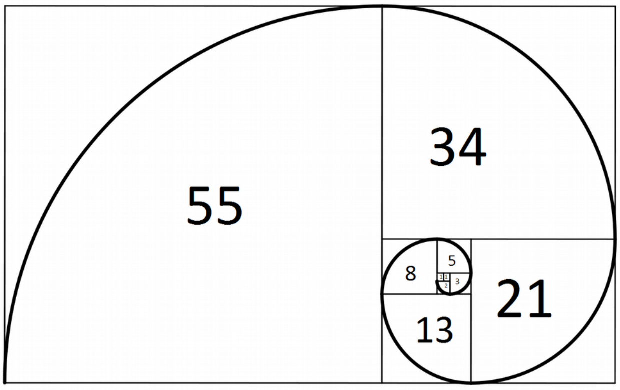
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ avec } n > 1 \text{ et } F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1$$

Les termes de cette suite sont appelés *nombres de Fibonacci* (suite A000045 de l'OEIS) :

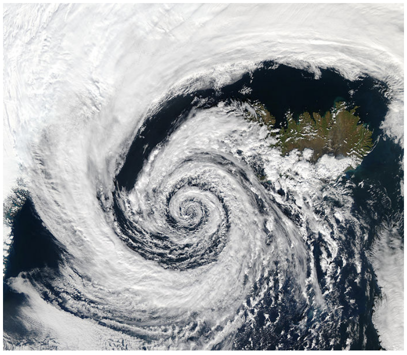
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, …

Dans la nature, on retrouve très souvent des motifs basé sur la suite Fibonacci :

- les pommes de pins (pives)
- les ananas
- les tournesols
- les coquilles de mollusques
- les galaxies
- les cyclones météorologiques
- le nombre de pétales des fleurs
- …



Spirale de Fibonacci



« Il m'aime, un peu, beaucoup, passionnément, à la folie,… pas du tout ! » ... Vous connaissez ce petit jeu qui consiste à effeuiller la marguerite. Vous noterez qu'il est très rare de tomber sur « pas du tout ». Pour quelle raison ?
Car « *pas du tout* »survient si la marguerite comporte 6, 12 ou 18 pétales, ce qui est peu courant. Pas impossible, mais extrêmement rare. Il est même tout aussi rare qu'elle en comporte 9. Il se trouve que le nombre de pétales d'une marguerite suit les nombres de la suite de Fibonacci. Schématiquement, c'est le meilleur compromis pour obtenir le meilleur ensoleillement. L'ensoleillement doit être maximum pour toutes les feuilles et on démontre que l'angle de deux feuilles consécutives doit être voisin d'un certain rapport, rapport inverse des fractions des nombres de la suite de Fibonacci.
C'est la même raison qui fait qu'il est si rare de trouver un trèfle à 4 feuilles, car 4 ne fait pas partie de cette suite. En revanche, il existe beaucoup de fleurs avec 5 pétales, comme la pensée, le delphinium en a 8, le souci 13, et la chicorée 21 ; et si on avance dans la suite, les tournesols ont souvent 55 ou 89 pétales.

Le web regorge d'images de spirales de Fibonacci.
Entrez « Fibonacci nature » dans votre moteur de recherche préféré.

Exercice 2.16

Programmez la suite de Fibonacci.

Vers quel nombre converge $\lim_{n \to \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$?

Suite de Conway

Le premier nom de cette suite pourra vous aider à trouver la logique.

En 1992, Bernard **Werber** publie « le jour des fourmis », deuxième épisode de sa célèbre trilogie des fourmis. On y trouve la suite de Conway.

La *suite de Conway* a été inventée en 1986 par le mathématicien John Horton **Conway**, initialement sous le nom de « suite audioactive ». Quel est le terme suivant de cette suite ?

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ...

Les principales propriétés de cette suite sont :

- Aucun terme de la suite ne comporte un chiffre supérieur à 3.
- Tous les termes de la suite possèdent un nombre pair de chiffres, sauf le terme initial.
- Les termes de rang impair se terminent par 21 et les termes de rang pair par 11 (là encore à l'exception du terme initial).
- En moyenne, les termes de la suite possèdent 50 % de chiffres 1, 31 % de 2 et 19 % de 3.

Exercice 2.17

Programmez la suite de Conway.
Combien de chiffres contient le 20$^{\text{ème}}$ terme (u_{19}) de cette suite ?

2.4. Utilité des suites

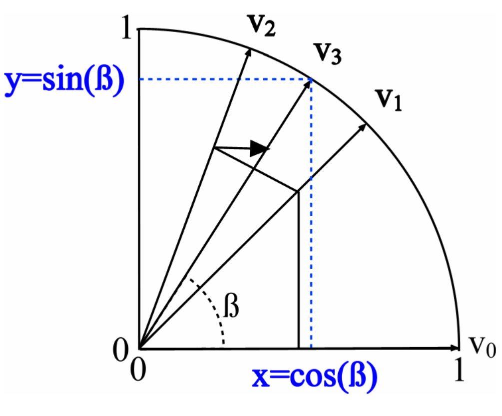
CORDIC

Source du texte : Wikipédia

CORDIC (sigle de ***Co**ordinate **R**otation **Di**gital **C**omputer* : « calcul numérique par rotation de coordonnées ») est un algorithme de calcul des fonctions trigonométriques et hyperboliques, notamment utilisé dans les calculatrices. Il a été décrit pour la première fois en 1959 par Jack E. **Volder**.
CORDIC permet de déterminer le sinus ou le cosinus d'un angle donné en radians sous un format virgule fixe. Pour trouver le sinus ou le cosinus d'un angle β, on recherche la coordonnée x ou y du point du cercle trigonométrique lui correspondant.

CORDIC commence les calculs avec un vecteur $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Durant la première itération, le vecteur subit une rotation de 45° dans le sens antihoraire (sens trigonométrique) afin d'obtenir un nouveau vecteur v_1. Des itérations successives doivent engendrer une rotation du vecteur dans la bonne direction. À chaque itération, la rotation est faite d'un angle prédéterminé et moindre que le précédent. Ceci jusqu'à converger vers l'angle voulu.



Plus formellement, à chaque itération i, on calcule un nouveau vecteur grâce à la multiplication du vecteur v_i avec la matrice de rotation R_i :

$$v_{i+1} = R_i\, v_i$$

La matrice de rotation R_i est : $R_i = \begin{pmatrix} \cos(\gamma_i) & -\sin(\gamma_i) \\ \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) \end{pmatrix}$

En factorisant le terme cos γ, on obtient :

$$v_{i+1} = R_i\, v_i = \cos(\gamma_i) \begin{pmatrix} 1 & -\sigma_i \tan(\gamma_i) \\ \sigma_i \tan(\gamma_i) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le facteur σ_i prend les valeurs +1 ou −1 et sert à indiquer le sens de la rotation. Si l'on restreint les choix possibles pour l'angle γ de manière à ce que tan(γ) soit égal à 2^{-i}, alors la multiplication par la tangente devient une multiplication par une puissance de 2. Le calcul devient :

$$v_{i+1} = R_i\, v_i = R_i = \cos(\arctan(2^{-i})) \begin{pmatrix} 1 & -\sigma_i 2^{-i} \\ \sigma_i 2^{-i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En effet :

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$$

donc :

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Notons $K_i = \cos(\arctan(2^{-i}))$. Ces coefficients K_i peuvent être ignorés pendant les itérations et factorisés en un seul coefficient multiplicatif final (dépendant de n) :

$$K(n) = \prod_{i=0}^{n-1} K_i = \prod_{i=0}^{n-1} \cos(\arctan(2^{-i})) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+2^{-2i}}}$$

Après suffisamment d'itérations, l'angle du vecteur sera proche de l'angle β voulu.
La dernière étape consiste à déterminer à chaque itération le sens de rotation. Pour ce faire, on regarde l'angle β_{n+1} actuel du vecteur que l'on soustrait à l'angle désiré. On teste si cette différence est positive (rotation dans le sens horaire) ou négative (sens trigonométrique), de façon à s'approcher de l'angle β.

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \sigma_i\, \gamma_i. \qquad \gamma_i = \arctan(2^{-i})$$

Les valeurs de γ_n sont pré-calculées dans une table mémorisée de valeurs. Toutefois, pour des angles petits, on utilise l'approximation $\arctan(\gamma_n) \approx \gamma_n$ dans une représentation en virgule fixe, permettant ainsi de réduire la taille de cette table.
Comme illustré sur le schéma de la page précédente, le sinus de l'angle β est la coordonnée y du vecteur final v_n, alors que la coordonnée x correspond au cosinus.

En 1971, John Stephen **Walther** de Hewlett Packard, a présenté une généralisation de l'algorithme qui fut mise en œuvre dans la calculatrice HP-35. Cette méthode permet de calculer notamment les fonctions hyperboliques mais également d'autres fonctions comme l'exponentielle. La généralisation se présente comme suit :

HP-35

$$x_{k+1} = x_k - m\, \sigma_k\, y_k\, 2^{-k}$$
$$y_{k+1} = y_k + \sigma_k\, x_k\, 2^{-k}$$
$$z_{k+1} = z_k - \sigma_k\, \varepsilon_k$$

avec $m \in \{-1 ; 0 ; 1\}$, ε_k des constantes définies à l'avance et $\sigma_k \in \{-1 ; 1\}$ (en fonction de la valeur de z_k).

Fonctions trigonométriques

On utilise la généralisation avec les paramètres :

$m = 1$
$\varepsilon_k = \arctan(2^{-k})$
$\sigma_k = \mathrm{sgn}(z_k)$
$x_0 = 1$
$y_0 = 0$
$z_0 = \theta$ (en radians)

À la fin de n itérations, on a $x_n \approx \cos(\theta)$ et $y_n \approx \sin(\theta)$. Évidemment, $x_n / y_n \approx \tan(\theta)$.

Cette méthode ne fonctionne que si : $|\theta| < \sum_0^\infty \arctan(2^{-i}) \approx 1.7$

En pratique cela ne pose pas de problème car les fonctions trigonométriques peuvent toujours être ramenées au cas $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ en exploitant leurs propriétés les plus connues.

Exercice 2.18

Programmez cet algorithme pour calculer sin(θ), cos(θ) et tan(θ), pour $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Nombres pseudo-aléatoires

Un ordinateur ne sait pas générer du hasard. Il construit en fait une suite de nombres entiers qui a l'*apparence* du hasard, mais qui est tout à fait déterministe. Par exemple, la suite suivante est couramment utilisée :

$$u_{n+1} = (16807\ u_n) \bmod (2^{31} - 1)$$

Ces nombres sont ensuite divisés par $2^{31} - 1$, pour obtenir des nombres dans l'intervalle [0 ; 1[.

Comme ce sujet est trop vaste pour être abordé ici, le lecteur pourra se référer au cours **Le hasard des ordinateurs**, sur https://www.apprendre-en-ligne.net/random/

2.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les définitions d'une suite ❑ ok
Savoir étudier la convergence d'une suite ❑ ok