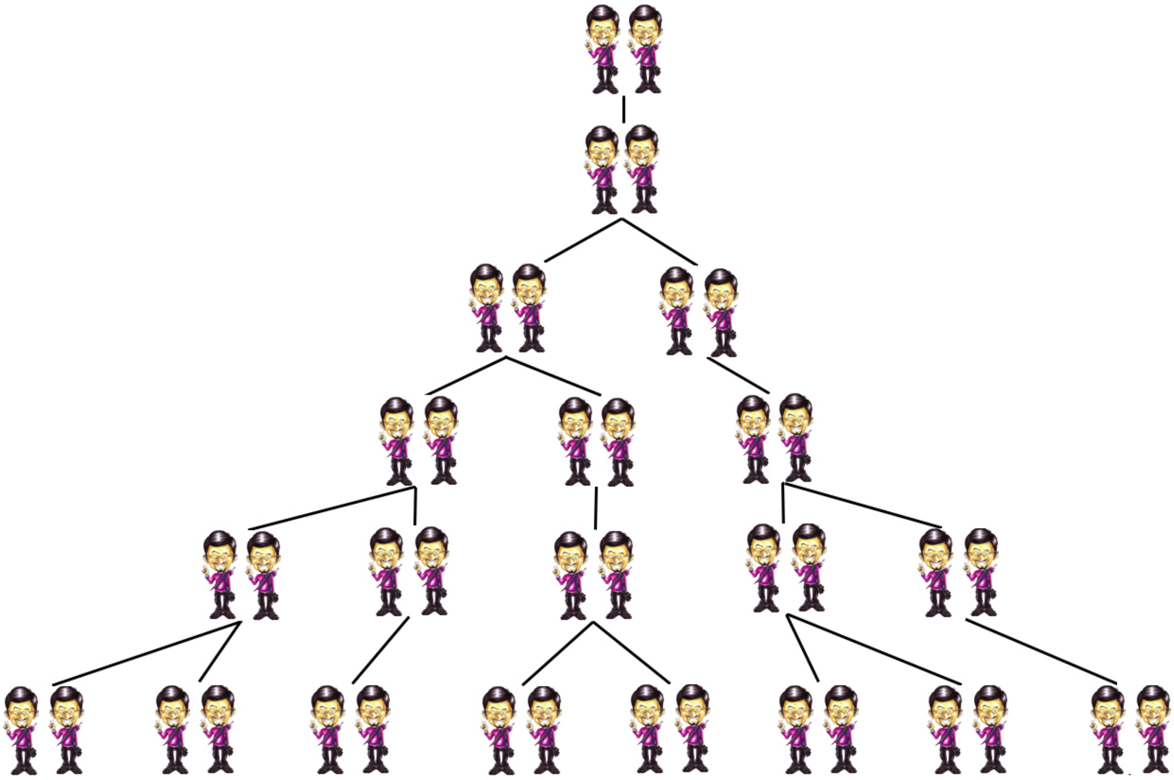
Suites et séries



Didier Müller, avril 2020

www.apprendre-en-ligne.net

Table des matières

1. Progressions

Johann Carl Friedrich **Gauss**
(1777 - 1855)

L'instituteur prit sa grosse voix et annonça une punition générale : « Vous additionnerez tous les nombres de 1 à 100 ! Et je ne veux rien entendre avant que vous ayez fini ! » Il pensait bien avoir la paix pour le reste de la journée. Moins de deux minutes plus tard pourtant, l'un des enfants lève la main et annonce : « 5050 ».
L'instituteur croit à une farce, mais l'élève explique que 100+1 font 101, 99+2 font 101, 98+3 font 101, etc. La somme des nombres de 1 à 100 est donc égale à 50 fois 101, c'est-à-dire 5050.
Cette solution est si spectaculaire qu'elle a parcouru les âges. Elle est le plus souvent associée à Carl Friedrich **Gauss**, que l'on surnommait le « Prince des mathématiciens ». Mais on peut penser qu'il s'agit d'une légende. En effet, un auteur américain, Bryan **Hayes**, a trouvé plus de 100 versions de l'histoire de l'enfant Gauss, et dans huit langues différentes. De surcroît la plus ancienne version ne date que de 1856.

1.1. Les progressions arithmétiques (ou suites arithmétiques)

Définition

On appelle progression arithmétique (P.A.) une suite de nombres tels que chacun est égal au précédent augmenté d'un nombre constant appelé **raison**.

Deux exemples : –5, –1, 3, 7, 11, 15, 19, … (raison = 4)
35, 32, 29, 26, 23, … (raison = –3)

Le calcul d'un terme connaissant son rang (t_n)

Soit t_1 le premier terme et r la raison. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + r \\ t_3 &= t_2 + r = t_1 + 2r \\ t_4 &= t_3 + r = t_1 + 3r \\ &\vdots \\ t_n &= t_{n-1} + r = t_1 + (n-1)\cdot r \end{aligned}$$

On a donc :

$$t_n = t_1 + (n-1)\cdot r$$

Exemple
Soit la suite 4, 10, 16, 22, ...
Quel est le 66$^{\text{ème}}$ terme ?
$t_1 = 4$, $r = 6$, $n = 66$
donc $t_{66} = 4 + 65\cdot 6 = 394$

Il ne faut pas confondre t_n et n ! En effet, n est le rang (ou parfois le nombre d'éléments), t_n est l'élément de rang n.
Pour prendre une image, n est le numéro d'un siège de cinéma et t_n est la personne assise dans ce siège.
n est un nombre entier, mais t_n ne l'est pas forcément.

Le calcul de la somme de n termes (S_n)

Dans l'anecdote qui a sert d'introduction à ce chapitre, nous avons vu que Gauss a trouvé une formule pour calculer la somme des 100 premiers entiers. Essayons de généraliser. On peut écrire :

$$S_n = t_1 \quad + t_2 \quad + t_3 \quad + \quad \ldots \quad + t_{n-2} \quad + t_{n-1} \quad + t_n$$

ou

$$S_n = t_n \quad + t_{n-1} \quad + t_{n-2} \quad + \quad \ldots \quad + t_3 \quad + t_2 \quad + t_1$$

En additionnant ces deux expressions terme à terme, on obtient :

$$2\,S_n = (t_1 + t_n) + (t_2 + t_{n-1}) + (t_3 + t_{n-2}) + \ldots + (t_{n-1} + t_2) + (t_n + t_1)$$

Exemples

La somme des 100 premiers nombres entiers :

$$S_{100}=\frac{100}{2}(2+99\cdot 1)=5050$$

La somme des 38 premiers nombres entiers impairs :

$$S_{38}=\frac{38}{2}(2+37\cdot 2)=1444$$

Il y a n parenthèses formées de la somme de termes valant chacun $t_1 + t_n$, donc :

$$2\,S_n = n\cdot(t_1 + t_n)$$

D'où :

$$S_n=\frac{n}{2}(t_1+t_n)$$

En remplaçant t_n par $t_1 + (n-1)\cdot r$, on obtient :

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2t_1+(n-1)\cdot r\right)$$

Exemple concret

Dans un virage d'un stade, le nombre de siège dépend de la rangée. En effet, il y a moins de sièges proches de la pelouse que de sièges au dernier rang.

Au premier rang du virage, on a placé 15 sièges. On ajoute 2 sièges chaque fois que l'on monte d'un rang (il y a donc 17 sièges au deuxième rang, 19 au troisième, etc.).
Combien y a-t-il de sièges à la 27ème rangée ?

$$t_{27} = t_1 + (27-1)\cdot r = 15 + 26\cdot 2 = 67$$

Si le virage compte 34 rangées, combien y a-t-il de sièges dans le virage ?

$$S_{34}=\frac{34}{2}\left(2t_1+(34-1)\cdot r\right) = 17\cdot(2\cdot 15 + 33\cdot 2)\ ) = 1632$$

Exercice 1.1 Soit une progression arithmétique (P.A.) avec $t_1 = 8$ et $t_3 = 18$. Calculez t_{10}.

Exercice 1.2 Calculez la somme de tous les multiples de cinq compris entre 101 et 1001.

Exercice 1.3 La somme des 19 premiers termes d'une progression arithmétique est nulle et le dernier terme 27.
Déterminez le premier terme et la raison.

Exercice 1.4 Démontrez que dans une progression arithmétique on a toujours les relations :

a. $t_{n+1}=\dfrac{t_n+t_{n+2}}{2}$ **b.** $\dfrac{t_{n+3}^2-t_n^2}{t_{n+2}^2-t_{n+1}^2}=3$

Exercice 1.5 Insérez huit termes entre 7 et 61 de manière à obtenir une progression arithmétique.

Exercice 1.6 La somme du 8ème et du 14ème terme d'une P.A. est 50. On sait aussi que $t_3 = 13$.
Définissez cette progression arithmétique en donnant t_1 et r.

Exercice 1.7 Déterminez le triangle rectangle dont les trois côtés sont en P.A. et dont le périmètre vaut 84.

Exercice 1.8 Les quatre angles consécutifs d'un trapèze sont en progression arithmétique. Sachant que le plus petit mesure 75°, quelle est la mesure du plus grand ?

1.2. Les progressions géométriques (ou suites géométriques)

Définition

On appelle progression géométrique (P.G.) une suite de nombres tels que chacun est égal au précédent multiplié par un nombre constant appelé **raison**.

Deux exemples : 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ... (raison = $\frac{1}{3}$)

3, –6, 12, –24, ... (raison = –2)

Le calcul d'un terme connaissant son rang (t_n)

Soit t_1 le premier terme et r la raison. Par définition, on a :

$$t_2 = t_1 \cdot r$$
$$t_3 = t_2 \cdot r = t_1 \cdot r^2$$
$$t_4 = t_3 \cdot r = t_1 \cdot r^3$$
$$\vdots$$
$$t_n = t_{n-1} \cdot r = t_1\, r^{n-1}$$

Exemple
Soit la suite 4, 8, 16, 32, ...
Quel est le 19ème terme ?
$t_1 = 4$, $r = 2$, $n = 19$
donc $t_{19} = 4 \cdot 2^{18} = 1'048'576$

Donc :

$$t_n = t_1\, r^{n-1}$$

Le calcul de la somme de n termes (S_n)

Le calcul de la somme se fait au moyen des deux relations suivantes :

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$$
et $$r \cdot S_n = r \cdot t_1 + r \cdot t_2 + r \cdot t_3 + \ldots + r \cdot t_{n-2} + r \cdot t_{n-1} + r \cdot t_n$$

On peut décaler les termes sans problèmes.

En retranchant terme par terme la première relation de la deuxième, on obtient :

$$r \cdot S_n - S_n = t_n \cdot r - t_1$$

Exemple
Que vaut la somme des 10 premières puissances de 3 ?
$t_1 = 3$, $r = 3$, $n = 10$
$S_{10} = 3\frac{3^{10}-1}{3-1} = 88572$

D'où :

$$S_n = \frac{t_n r - t_1}{r-1} = t_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

Exemple concret (enfin presque)

Un curieux nénuphar situé au milieu d'un bel étang s'y trouve tellement bien qu'il ne cesse de grandir : sa taille double chaque jour. Il grandit tellement qu'après 30 jours, il recouvre entièrement la surface de l'étang !

Combien de jours a-t-il mis pour ne recouvrir que la moitié de l'étang ?

Il a fallu 29 jours.
(Si vous avez répondu 15 jours, vous avez confondu progression géométrique et arithmétique...)

Quel pourcentage de l'étang recouvrait-il après 26 jours ?

$t_1 = 1$ (100 % de la surface de l'étang), $r = \frac{1}{2}$, on cherche t_5.

$t_5 = t_1\, r^{5-1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.0625 = 6.25$ %

Exercice 1.9 Soit une progression géométrique (P.G.) avec $t_1 = 8$ et $t_3 = 18$. Calculez t_{10}.

Exercice 1.10 Déterminez quatre nombres formant une P.G. de raison $\frac{3}{2}$ et de somme 52.

Exercice 1.11 Les côtés d'un triangle rectangle sont en progression géométrique. Déterminez la raison de la progression.

Exercice 1.12 Trouvez trois nombres positifs en P.G. connaissant leur somme (qui vaut 248) et la différence des extrêmes $t_3 - t_1$ (qui vaut 192).

Exercice 1.13 Lorsque vous placez un capital C à la banque, au taux d'intérêt annuel i, votre capital est accru chaque année des intérêts de l'année. Il s'élève donc :

au bout d'un an à $C_1 = C(1+i)$
au bout de deux ans à $C_2 = C_1(1+i) = C(1+i)^2$
etc.
au bout de n années, $C_n = C(1+i)^n$

C'est la formule des intérêts composés.

a. Si vous placez 2500 fr. le 1er janvier 1999 à un taux d'intérêt de 3 %, quel sera votre capital le 1er janvier 2063 ?
b. Un 1er janvier, vous constatez que votre capital se monte à 5234.45 fr. En quelle année êtes-vous ?

Exercice 1.14 Trois nombres différents en progression géométrique forment une progression arithmétique si on permute les deux premiers. Sachant que les raisons sont les mêmes, déterminez ces trois nombres.

Exercice 1.15 Calculez la somme $S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + ...$

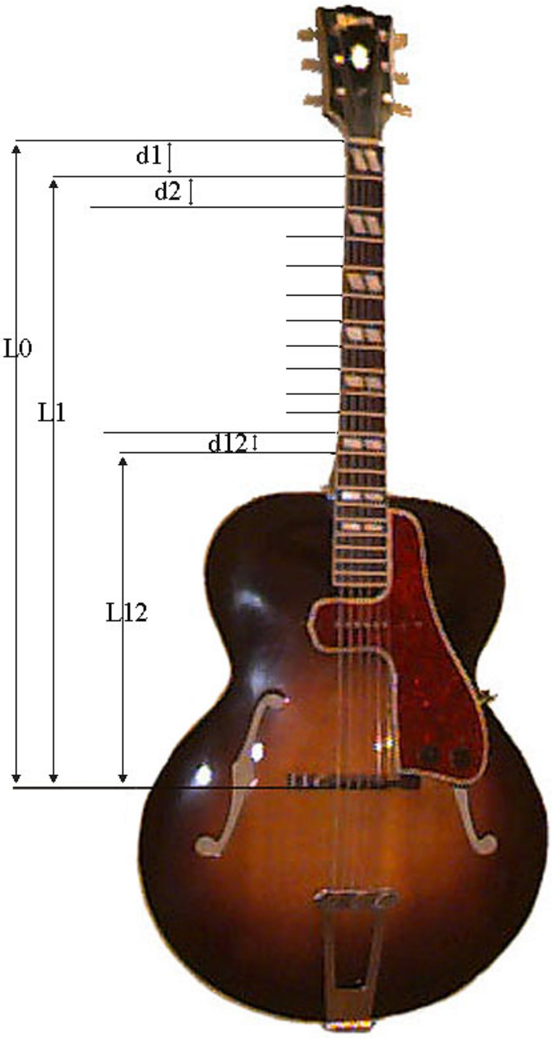
Indication : calculez d'abord $9 \cdot S_n$ puis extrayez une P.G.

Exercice 1.16 Emplacement des frettes d'une guitare

Mesurez les longueurs L0, L1, L2,..., L12 définies par les différentes frettes du manche. Mesurez en cm avec un chiffre après la virgule.

L0 =		
	L1/L0=	d1 =
L1 =		
	L2/L1=	d2 =
L2 =		
	L3/L2=	d3 =
L3 =		
	L4/L3=	d4 =
L4 =		
	L5/L4=	d5 =
L5 =		
	L6/L5=	d6 =
L6 =		
	L7/L6=	d7 =
L7 =		
	L8/L7=	d8 =
L8 =		
	L9/L8=	d9 =
L9 =		
	L10/L9=	d10 =
L10 =		
	L11/L10=	d11 =
L11 =		
	L12/L11=	d12 =
L12 =		

L12/L0 =



Claude **Ptolémée**
(env. 85 - env. 165)

Référence
Calculs bien tempérés, par Ian Stewart, revue POUR LA SCIENCE N^0 151, mai 1990, pp. 108-114

a. Calculez les quotients $\frac{L1}{L0}$, $\frac{L2}{L1}$, $\frac{L3}{L2}$, ..., $\frac{L12}{L11}$ ainsi que $\frac{L12}{L0}$.
Que remarquez-vous ?

b. Les propriétés des cordes vibrantes et la définition de la gamme dite tempérée sont telles que :
- si une corde de longueur L émet un certain son (mi par exemple), la même corde de longueur L/2 émet le son situé à l'octave au-dessus ;
- les notes (mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si, do, do#, ré, ré#, mi) s'obtiennent avec des longueurs de corde L0, ..., L12, longueurs qui forment une progression géométrique.

Calculez la raison de la suite et comparez-la avec les quotients du point **a.**

c. Claude **Ptolémée** est surtout connu pour son système cosmologique, mais il fut aussi l'auteur d'un traité des *Harmoniques*, où il présente le système pythagoricien, selon lequel les notes doivent être représentées par des rapports de nombres entiers. Les principaux rapports sont la quarte, associé au rapport 3/4, et la quinte, associée au rapport 2/3. Retrouvez-vous ces rapports dans le système tempéré ?

d. Montrez que les distances d1, d2, d3, ... qui séparent deux frettes consécutives du manche forment également une suite géométrique de même raison.

1.3. Progressions géométriques illimitées

Exemple

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=?$

$S_\infty=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

Somme des termes d'une P.G. illimitée (S_∞)

Si $|r|<1$, alors $S_\infty=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{t_1}{1-r}$. Autrement, la somme tend vers l'infini.

En effet, si $|r|<1$, alors $r^\infty\to 0$.

Exercice 1.17

Dans un carré de 10 cm de côté, on inscrit un cercle. Puis dans ce cercle on inscrit un carré, puis dans le nouveau carré un cercle, etc. On construit ainsi une infinité de carrés. Quelle est la somme des aires des carrés ?

Exercice 1.18

Un nommé **Sissa**, l'inventeur du jeu d'échecs, présenta son jeu au Sultan. Enthousiasmé, ce dernier lui proposa de choisir sa récompense. Sissa, d'après la légende, répondit : « Que tes serviteurs mettent un grain de blé sur la première case, deux sur la seconde, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains de blé jusqu'à la soixante-quatrième case. »

a. Combien de grains de blé aurait-il fallu pour récompenser Sissa selon ses désirs ?

La Suisse s'étend sur une superficie de 41'288 km^2

b. En supposant qu'un grain de blé occupe un volume de 1 mm^3, quelle serait l'épaisseur de la couche de blé qui recouvrirait une surface équivalente à celle de la Suisse ?

Exercice 1.19

Une balle de caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 2 mètres. Après chaque rebond, elle remonte aux sept dixièmes de la hauteur atteinte après le précédent rebond.

a. Après le 7$^{\text{ème}}$ rebond, quelle sera sa hauteur à l'apogée de sa trajectoire ?

b. Quelle longueur de chemin aura-t-elle parcourue quand elle se sera immobilisée sur le sol ?

Exercice 1.20

Un segment M_1M_2 a une longueur de 12 cm. Soit M_3 le milieu de M_1M_2, M_4 le milieu de M_2M_3, M_5 le milieu de M_3M_4, et ainsi de suite. Calculez la longueur du segment M_1M_n quand $n\to\infty$.

Exercice 1.21

Soit $S_n=1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^4}+\frac{7}{2^6}+\frac{9}{2^8}+\ldots$

Indication : calculez $S_n-\frac{1}{4}S_n$ et déduisez S_n quand $n\to\infty$.

1.4. Fractales

Benoît **Mandelbrot**
(1924 - 2010)

Une *fractale* est un objet mathématique, telles une courbe ou une surface, dont la structure est invariante par changement d'échelle.

Le terme « fractale » est un néologisme créé par Benoît **Mandelbrot** en 1974 à partir de la racine latine *fractus*, qui signifie « brisé », « irrégulier ». De nombreux phénomènes naturels – comme le tracé des lignes de côtes, les nuages, les montagnes ou l'aspect du chou romanesco – possèdent des formes fractales approximatives.

Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- il a des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes ;
- il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;
- il est exactement ou statistiquement autosimilaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties ;
- sa « dimension de Hausdorff » est strictement supérieure à sa dimension topologique.

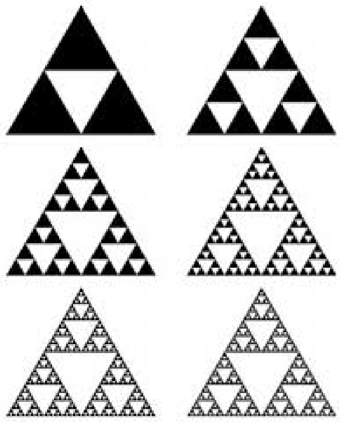
Nous n'allons pas entrer dans les détails de la dimension de Hausdorff ici. De façon imagée, les fractales se caractérisent par une sorte de dimension non entière. Vous trouverez dans la marge des exercices suivants la dimension de Hausdorff des objets étudiés.

Exercice 1.22

Waclaw **Sierpinski**
(1882 - 1969)

Le triangle de Sierpinski a une dimension de $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \cong 1.858$.

La figure ci-contre montre les 6 premières étapes de la construction du « triangle de Sierpinski » (1915). On le construit en dessinant un triangle équilatéral noir. À l'étape 1, on le divise en quatre triangles équilatéraux comme montré sur la figure ci-contre, puis le triangle central est enlevé. À l'étape suivante, on recommence le même processus avec chacun des triangles noirs. En poursuivant ce processus à l'infini, on obtient le triangle de Sierpinski.



a. Déterminez une suite géométrique a_k qui donne le nombre de triangles enlevés lors de la k-ième étape.

b. Calculez le nombre de triangles enlevés de la pièce lors de la 15$^{\text{ème}}$ étape.

c. Calculez le nombre total de triangles enlevés de la pièce après 15 étapes.

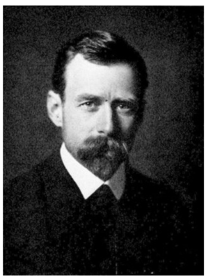
d. En supposant que le triangle de départ ait une surface de 1 unité, calculez une suite b_k qui donne la surface des pièces enlevées lors de la k-ième étape. Montrez que cette suite est une suite géométrique.

e. Déterminez la surface enlevée lors de la septième étape.

f. Déterminez la surface totale enlevée de la pièce après la septième étape.

g. Déterminez quelle proportion de l'aire du triangle de départ est encore noire lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini.

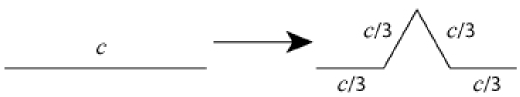
Exercice 1.23



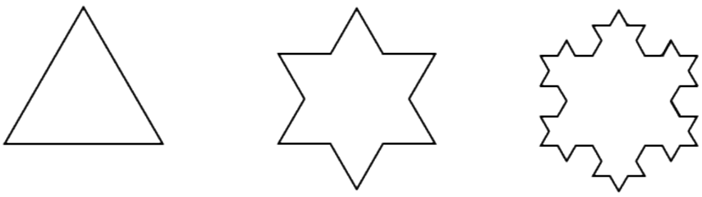
Niels Fabian Helge **von Koch**
(1870 - 1924)

Le flocon de von Koch a une dimension de $\frac{\ln(4)}{\ln(3)} \cong 1.262$.

Le « flocon de neige » de von Koch est une figure fractale qui se construit de manière itérative. En partant d'un triangle équilatéral, on remplace chaque côté par :



Voici les figures obtenues après 0, 1 et 2 itérations du processus :



Quand le nombre d'itérations tend vers l'infini :

a. que vaut le périmètre du flocon si le côté du triangle équilatéral initial a une longueur c ?

b. que vaut l'aire du flocon ?

Exercice 1.24

La construction d'une « éponge de Menger » peut être décrite de la manière suivante :

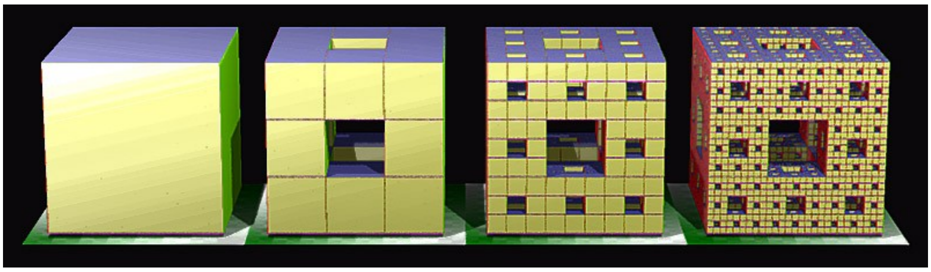
1. débuter par un cube,
2. réduire le cube au tiers et en faire 20 copies,
3. placer ces copies de telle façon qu'elles forment un nouveau cube de la même taille que l'original, sans les parties centrales,
4. répéter le processus à partir de l'étape 2 pour chacun des 20 cubes ainsi créés.

Le solide obtenu à la limite, après un nombre infini d'itérations, est l'éponge de Menger.

À chaque itération, on multiplie le nombre de cubes par 20, ce qui fait que le solide créé à l'itération n contient 20^n cubes.

Karl **Menger**
(1902 - 1985)

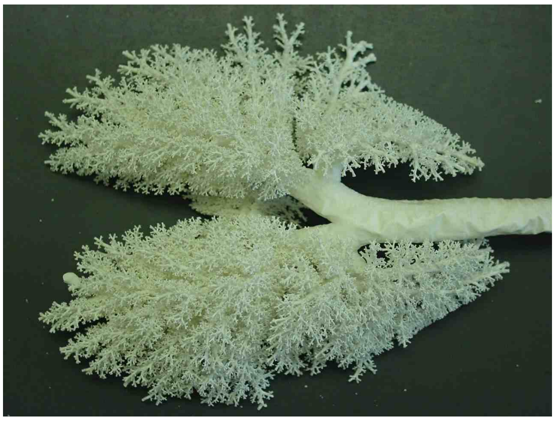
L'éponge de Menger a une dimension de $\frac{\ln(20)}{\ln(3)} \cong 2.727$.



Quand le nombre d'itérations tend vers l'infini :

a. que vaut l'aire de l'éponge de Menger si le côté du cube initial a une longueur c ?

b. que vaut le volume de l'éponge de Menger ?



La structure des poumons se rapproche d'une éponge de Menger.

1.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les formules pour les progressions arithmétiques ❑ ok
Connaître les formules pour les progressions géométriques ❑ ok
À la lecture d'un problème, savoir de quel type de progression il s'agit ❑ ok

2. Suites

2.1. Prolégomènes

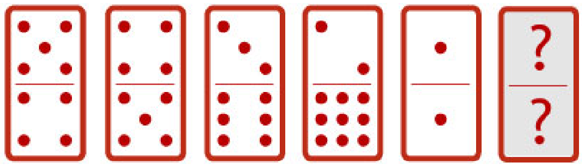
Un peu d'histoire

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez **Archimède**, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au 1$^{\text{er}}$ siècle après J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de **Héron d'Alexandrie**.

On retrouvera cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du 17$^{\text{ème}}$ siècle) avec *la méthode des indivisibles* (**Cavalieri**, **Torricelli**, **Pascal**, **Roberval**). C'est ainsi que l'on voit **Bernoulli**, **Newton**, **Moivre**, **Stirling** et **Wallis**, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à **Lagrange** que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières dont le but est d'approcher, non plus des nombres, mais des fonctions.

Dans la seconde moitié du 20$^{\text{ème}}$ siècle, le développement des ordinateurs donne un souffle nouveau à l'étude des suites en analyse numérique grâce à *la méthode des éléments finis*. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.

Plus anecdotique, on retrouve aussi des suites dans les tests de Q.I. On donne les premiers éléments d'une suite (pas forcément des nombres) et il faut trouver l'élément suivant :



L'**encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers** (originellement en anglais *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, couramment abrégé sous le sigle **OEIS**) est un site web permettant d'effectuer gratuitement des recherches parmi une base de données de suites d'entiers présentant un intérêt mathématique ou parfois simplement ludique. Dans cette forme et cette présentation, c'est la plus grande du monde (en 2012).

Signalons le fabuleux site *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences®* (*OEIS®*), à l'adresse http://www.oeis.org.

Définition

Une **suite** est une liste ordonnée de **termes**, indexée par les entiers naturels.
La suite $(u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots)$ est aussi notée (u_n) ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Contrairement au chapitre 1 sur les progressions, on commencera désormais la numérotation des termes à 0.

En particulier, on parle de suite « entière », suite « réelle » et suite « complexe », quand tous les termes appartiennent à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.

Une suite peut être déterminée de plusieurs manières :

- par la liste de tous ses termes s'il n'y a pas de règle de formation

  (5, 18, 24, 11, ...)

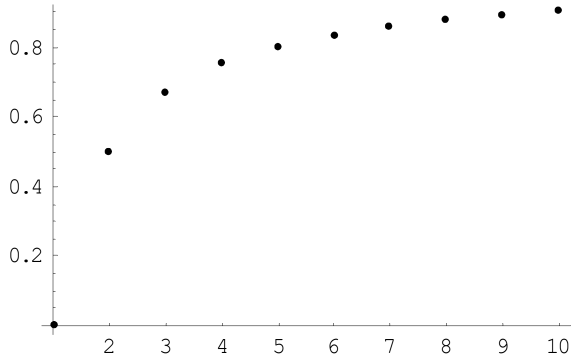
- par une formule qui donne u_n par rapport à n (donner $f(n) = u_n$)

  $u_n = n^2 \Rightarrow (0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$

- par récurrence : le deuxième terme de la suite est donné en fonction du premier, le troisième en fonction du deuxième, et ainsi de suite

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases} \Rightarrow (2, 5, 11, 23, \ldots)$$

On peut aussi représenter une suite sur un dessin : $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$



Exercice 2.1

Soit la suite $u_n = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Écrivez les 9 premiers termes de cette suite.
Comparez vos résultats avec la table ci-dessous. Que constatez-vous ?

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Distance du Soleil (UA)	0.39	0.72	1	1.52	5.2	9.54	19.23	30.07

Définitions

Une suite est **croissante** si $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Une suite est **décroissante** si $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Une suite est **strictement croissante** si $u_n < u_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Une suite est **strictement décroissante** si $u_n > u_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

Une suite est **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

Une suite est **majorée** si $\exists$ un réel M tel que $\forall$ entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Cet entier M s'appelle le **majorant**.

Une suite est **minorée** si $\exists$ un réel m tel que $\forall$ entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. Cet entier m s'appelle le **minorant**.

Une suite est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Notations :

$\exists$: il existe
$\forall$: pour tout

Exercice 2.2

Pour déterminer si une suite est croissante ou décroissante, il faut étudier le signe de la différence $(u_{n+1} - u_n)$, ou comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes, ou alternées ? Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $-1, 1, -1, 1, \ldots$ **b.** $u_n = \frac{3n-1}{5n-2}$ **c.** $u_n = \frac{n}{n^2+1}$

d. $2, 2, 2, 2, \ldots$ **e.** $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ **f.** $u_n = \frac{5n-2}{3n-1}$

Exercice 2.3

Déterminez si les suites ci-dessous sont minorées, majorées, ou bornées. Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ **b.** $u_n = \frac{1}{n}$ **c.** $u_n = n$

d. $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ **e.** $u_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ **f.** $u_n = \left|(-3)^n - 2\right|$

2.2. Convergence

On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** si elle admet une limite réelle L en $+\infty$, autrement dit si $\lim_{n\to\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$.

Si elle existe, la limite d'une suite est unique.

Si une suite n'est pas convergente, elle **diverge**.

Théorème 2.1

a. Toute suite monotone et bornée converge.
b. Toute suite convergente est bornée.
c. Soit (u_n) une suite convergente vers a et (v_n) une suite convergente vers b. Alors

$(u_n + v_n)$ converge vers $(a + b)$

$(u_n \cdot v_n)$ converge vers $(a \cdot b)$

$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\left(\frac{a}{b}\right)$

$(\lambda\, u_n)$ converge vers $(\lambda\, a)$

Exercice 2.4

Montrez que :

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$ **b.** $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$

Exercice 2.5

Les suites suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, vers quelle valeur ? Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $\frac{2n+3}{n+1}$ **b.** $\frac{n^2-1}{n+2}$ **c.** $(-1)^n$

d. $\frac{1}{\ln(n+1)}$ **e.** $\frac{\ln(n)}{n}$ **f.** $\frac{n!}{n^n}$

Exercice 2.6

Étudiez la convergence des suites dont on donne le terme général. Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

a. $\frac{n^2+1}{n^2+n-1}$ **b.** $\frac{n^4+2n+2}{n+4}$ **c.** $\frac{n^2+6}{n(n+1)(n+2)}$

d. $\sqrt[n]{n}$ **e.** $\sqrt[n]{a}$, $0 < a < 1$ **f.** $\sqrt[n]{a}$, $a > 1$

Exercice 2.7

Soit (u_n) une suite telle que la suite $(|u_n|)$ converge. Peut-on en déduire que (u_n) converge ?

Suites définies par récurrence

Il existe des relations de récurrence liant plus de deux termes consécutifs et qui ne se ramènent donc pas à ce cas, par exemple la suite de Fibonacci que nous verrons plus loin.

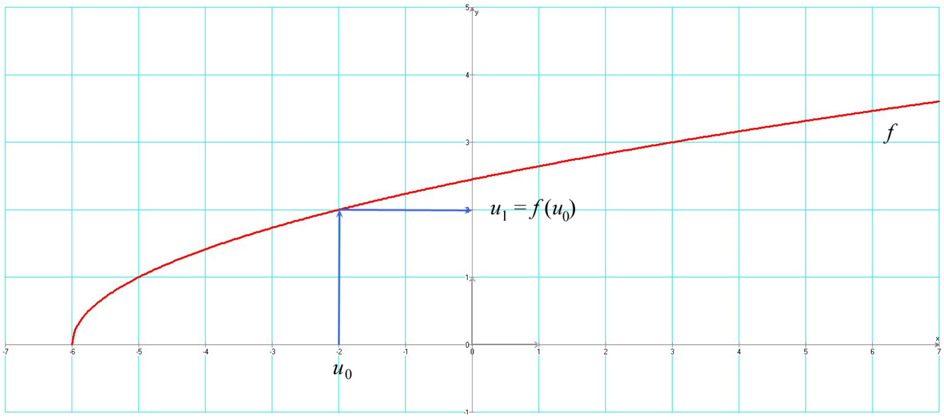
On va s'intéresser aux suites où le deuxième terme de la suite est calculé à partir du premier, le troisième à partir du deuxième, et ainsi de suite. Il est *a priori* impossible de calculer immédiatement le terme u_{10}, par exemple. Pour atteindre u_{10}, il faudra d'abord calculer les 9 termes qui le précèdent.

La relation de récurrence peut être résumée par la formulation : $u_{n+1} = f(u_n)$.
f est appelée « fonction associée à la suite ».

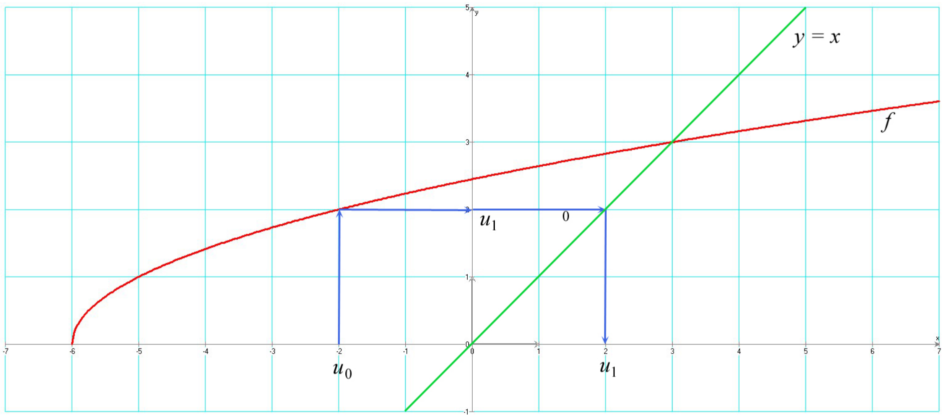
Soit la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= \sqrt{6+u_n} \end{cases}$

La fonction associée à la suite ci-dessus est $f(x) = \sqrt{6+x}$.

On peut donc, à l'aide de la courbe de f, trouver u_1 en traçant l'image de u_0 :

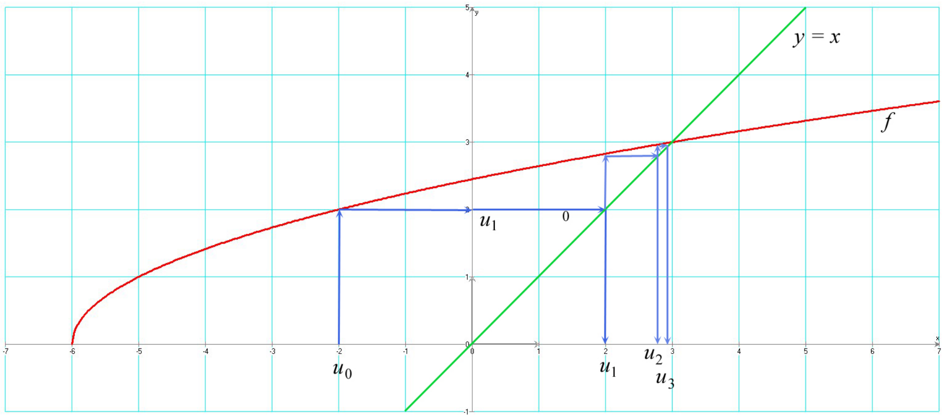


Pour tracer l'image de u_1, il faut maintenant le ramener sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation : $y = x$.



On continue ainsi l'opération...

Une fois que l'on a bien compris le procédé, il n'y a plus besoin de tirer le trait jusqu'à l'axe des y.



Ici, la suite semble converger vers la valeur 3, donc $\lim_{n \to \infty} u_n = 3$.

Théorème 2.2

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et soit (u_n) une suite vérifiant pour tout n : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L et si f est continue en L, alors L vérifie $f(L) = L$.
Pour trouver les valeurs possibles de L, il faut donc résoudre l'équation : $f(x) = x$.

Un point dont le couple de coordonnées est de la forme $(L ; f(L))$ est sur la courbe de f. Et comme $f(L) = L$, le couple peut aussi être écrit $(L ; L)$ donc ce point est également sur la droite d'équation $y = x$.

Si (u_n) converge vers L et si f est continue en L alors L est l'abscisse d'un des points d'intersection entre la courbe de f et la droite $y = x$.

Exercice 2.8

Reprenons la suite définie dans l'exemple ci-dessus : $\begin{cases} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{6+u_n} \end{cases}$

Vers quelle valeur converge cette suite ?
Refaites le dessin, en partant de 7 au lieu de -2.

Exercice 2.9

Soit la suite (u_n) définie par la relation : $u_{n+1} = 0.2u_n^2 - u_n + 3.2$.

a. Utilisez le procédé graphique décrit ci-dessus pour trouver la ou les valeurs possibles de la limite de (u_n).

b. Vers quelle valeur la suite converge-t-elle ? Quelle est l'influence de u_0 ? Vous pouvez utiliser un tableur ou écrire un programme.

Exercice 2.10

Mêmes questions qu'à l'exercice 2.9, mais avec la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

2.3. Suites particulières

Exercice 2.11

Héron d'Alexandrie, savant grec du 1er siècle après J.-C., a inventé un algorithme qui permet de s'approcher très vite de la racine carrée d'un nombre réel m positif, en itérant la formule récursive :

$$\begin{cases} u_0 & = & m\,,\ m > 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{m}{u_n}\right) \end{cases}$$

Utilisez et justifiez cet algorithme.

Exercice 2.12

La *suite logistique* modélise des situations d'équilibre. On la retrouve en particulier dans les systèmes proies-prédateurs pour étudier l'évolution des populations d'animaux. Elle illustre aussi pourquoi les invasions de criquets (Argentine en 2016, Russie en 2015, Madagascar en 2013, etc.) sont complètement imprévisibles.

Elle est définie ainsi :

$$\begin{cases} u_0 & \in &]0;1] \\ u_{n+1} & = & f_a(u_n) \end{cases}$$

où $f_a(x) = a\,x\,(1-x)$ et $a \in]0;4]$.

Dans le modèle logistique, nous considérerons que la variable, notée ici u_n, désigne le rapport de la population d'une espèce sur la population maximale de cette espèce (c'est un nombre compris entre 0 et 1).

En faisant varier le paramètre a, plusieurs comportements complètement différents sont observés.

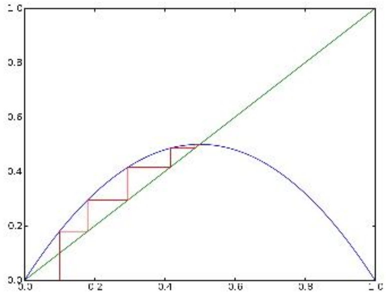
Cas $0 \leq a \leq 1$: la population s'éteint.

L'espèce finira par mourir, quelle que soit la population de départ.

Autrement dit, $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Cas $1 \leq a \leq 3$: l'effectif de la population se stabilise.

- Si $1 \leq a \leq 2$, la population finit par se stabiliser autour de la valeur $\frac{a-1}{a}$, quelle que soit la population initiale. Autrement dit $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \frac{a-1}{a}$.

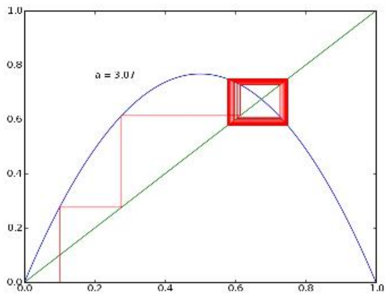


- Si $2 \leq a \leq 3$, elle finit également par se stabiliser autour de $\frac{a-1}{a}$ après avoir oscillé autour pendant quelque temps.

  La vitesse de convergence est linéaire, sauf pour $a = 3$ où elle est très lente.

Cas $3 \leq a \leq 3.57$: l'effectif de la population oscille entre 2, 4, 8, …, 2^k valeurs.

- Si $3 < a \leq 1+\sqrt{6}$ (environ 3.45), elle finit par osciller entre deux valeurs, dépendantes de a mais pas de la population initiale.

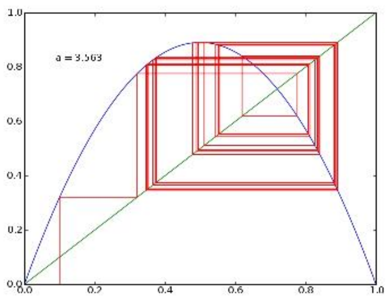


Mitchell **Feigenbaum**
(1944-2019)

Les **nombres de Feigenbaum** ou **constantes de Feigenbaum** sont deux nombres réels découverts par le physicien Mitchell Feigenbaum en 1975. Tous deux expriment des rapports apparaissant dans les diagrammes de bifurcation de la théorie du chaos.

- Si $3.45 < a < 3.54$ (environ), elle finit par osciller entre quatre valeurs, là encore dépendantes de a mais pas de la population initiale.

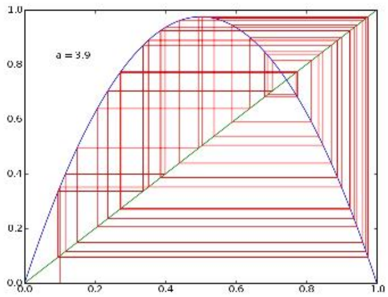
- Si a est légèrement plus grand que 3.54, la population finit par osciller entre huit valeurs, puis 16, 32, etc. L'intervalle des valeurs de a conduisant au même nombre d'oscillations décroît rapidement. Le rapport entre deux de ces intervalles consécutifs se rapproche à chaque fois de la *constante de Feigenbaum*, $\delta = 4{,}669201609102990671853203820...$
  Aucun de ces comportements ne dépend de la population initiale.



Cas 3.57 ≤ *a* : l'effectif de la population est chaotique, sauf exception.

La **théorie du chaos** étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, un phénomène généralement illustré par l'effet papillon. Des différences infimes dans les conditions initiales (comme des erreurs d'arrondi dans les calculs numériques) entraînent des résultats totalement différents pour de tels systèmes, rendant en général toute prédiction impossible à long terme.

- Vers a = 3.57, le ***chaos*** s'installe. Aucune oscillation n'est encore visible et de légères variations de la population initiale conduisent à des résultats radicalement différents.
- La plupart des valeurs au-delà de 3.57 présentent un caractère chaotique, mais il existe quelques valeurs isolées de a avec un comportement qui ne l'est pas. Par exemple à partir de 1+√8 (environ 3.82), un petit intervalle de valeurs de a présente une oscillation entre trois valeurs et pour a légèrement plus grand, entre 6 valeurs, puis 12, etc. D'autres intervalles offrent des oscillations entre 5 valeurs, etc. Toutes les périodes d'oscillation sont présentes, là encore indépendamment de la population initiale.



- Au-delà de a = 4, la population quitte l'intervalle [0 ; 1] et diverge quasiment pour toutes les valeurs initiales.

Utilisez la page web https://www.geogebra.org/m/wCjHPYDU pour visualiser les comportements décrits ci-dessus.

Exercice 2.13

Une coccinelle à l'état larvaire ou adulte se nourrit de pucerons. Elle est pour cette raison parfois utilisée dans la lutte biologique contre les pucerons.
Ayant observé la population des coccinelles dans un jardin pendant plusieurs années, on a constaté que si x désigne le nombre de centaines de coccinelles présentes une année, avec $0 \leq x \leq 1$, le nombre de coccinelles l'année suivante est $f(x) = 2.8 \cdot x \cdot (1-x)$.

a. Tracez la courbe de la fonction f sur [0 ; 1].
b. En 2017, on dénombre 10 coccinelles. Déterminez par lecture graphique le nombre de coccinelles en 2018, puis 2019. Vérifiez ces résultats par calcul.
c. Déterminez le nombre de coccinelles tel que la population reste stable l'année suivante.
d. Déterminez le nombre minimum de coccinelles qui permettra d'en avoir au moins 20 de plus l'année suivante.

Exercice 2.14

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies simultanément $\forall\, n > 0$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\,, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Montrez que :
a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < v_n$
b. (u_n) est croissante
c. (v_n) est décroissante
d. $\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$

e. La limite commune de ces deux suites est le nombre e. Montrez par l'absurde que e est irrationnel (procédez par encadrement).

Suite de Syracuse

Au début des années 1930, un mathématicien de l'université de Hambourg, Lothar **Collatz**, proposa de créer des suites de nombres de la manière suivante (que l'on appelle *algorithme de Collatz*) :

$$\begin{cases} u_0 & = & a \in \mathbb{N}^* \\ u_{n+1} & = & \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 \text{ si } u_n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

Université de Syracuse

La *conjecture de Syracuse* dit que cette suite se termine toujours par le cycle 4, 2, 1. Il n'existe pour l'instant aucune démonstration (sinon ce serait un théorème).

Cette conjecture est appelée *conjecture de Syracuse* ou *problème de Syracuse* depuis que Helmut **Hasse**, un ami de **Collatz**, la présenta à l'université de Syracuse (près de New York) dans les années 50.

Exercice 2.15

On appelle « altitude » le plus grand nombre atteint par la suite et « durée du vol » le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir le chiffre 1.
Programmez la suite de Syracuse.
Utilisez ensuite ce programme pour trouver le terme initial u_0 (avec $u_0 \leq 1000$) qui donne l'altitude maximale et celui qui engendre le plus long vol.

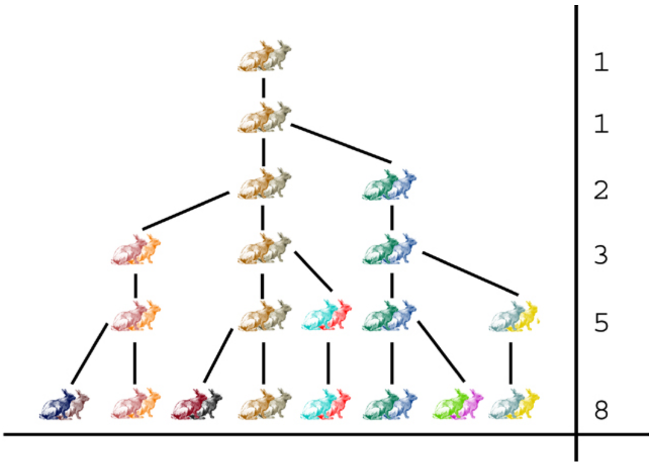
Suite de Fibonacci

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ième mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- au (début du) premier mois, il y a juste *une* paire de lapereaux ;
- les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est croissante).

Leonardi Pisano (Léonard de Pise), dit **Fibonacci**, 1170-1241 (dates approximatives)

Notons $F(n)$ le nombre de couples de lapins au début du mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce que l'on note : $F(1) = F(2) = 1$).
Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins ; on note alors $F(3) = 2$.
Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois n+2 : $F(n+2)$ désigne la somme des couples de lapins au mois n+1 et des couples nouvellement engendrés.



Or, n'engendrent au mois n+2 que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier n strictement positif : $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$.
On choisit alors de poser $F(0) = 0$, de manière que cette équation soit encore vérifiée pour $n = 0$.

On obtient ainsi la *forme récurrente* de la suite de Fibonacci :

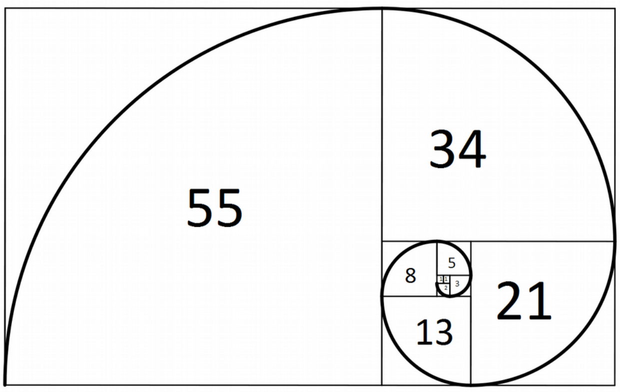
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ avec } n > 1 \text{ et } F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1$$

Les termes de cette suite sont appelés *nombres de Fibonacci* (suite A000045 de l'OEIS) :

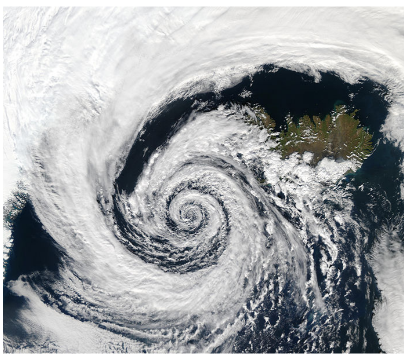
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, …

Dans la nature, on retrouve très souvent des motifs basé sur la suite Fibonacci :

- les pommes de pins (pives)
- les ananas
- les tournesols
- les coquilles de mollusques
- les galaxies
- les cyclones météorologiques
- le nombre de pétales des fleurs
- …



Spirale de Fibonacci



« Il m'aime, un peu, beaucoup, passionnément, à la folie,… pas du tout ! » ... Vous connaissez ce petit jeu qui consiste à effeuiller la marguerite. Vous noterez qu'il est très rare de tomber sur « pas du tout ». Pour quelle raison ?
Car « *pas du tout* »survient si la marguerite comporte 6, 12 ou 18 pétales, ce qui est peu courant. Pas impossible, mais extrêmement rare. Il est même tout aussi rare qu'elle en comporte 9. Il se trouve que le nombre de pétales d'une marguerite suit les nombres de la suite de Fibonacci. Schématiquement, c'est le meilleur compromis pour obtenir le meilleur ensoleillement. L'ensoleillement doit être maximum pour toutes les feuilles et on démontre que l'angle de deux feuilles consécutives doit être voisin d'un certain rapport, rapport inverse des fractions des nombres de la suite de Fibonacci.
C'est la même raison qui fait qu'il est si rare de trouver un trèfle à 4 feuilles, car 4 ne fait pas partie de cette suite. En revanche, il existe beaucoup de fleurs avec 5 pétales, comme la pensée, le delphinium en a 8, le souci 13, et la chicorée 21 ; et si on avance dans la suite, les tournesols ont souvent 55 ou 89 pétales.

Le web regorge d'images de spirales de Fibonacci.
Entrez « Fibonacci nature » dans votre moteur de recherche préféré.

Exercice 2.16

Programmez la suite de Fibonacci.

Vers quel nombre converge $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$?

Suite de Conway

Le premier nom de cette suite pourra vous aider à trouver la logique.

En 1992, Bernard **Werber** publie « le jour des fourmis », deuxième épisode de sa célèbre trilogie des fourmis. On y trouve la suite de Conway.

La *suite de Conway* a été inventée en 1986 par le mathématicien John Horton **Conway**, initialement sous le nom de « suite audioactive ». Quel est le terme suivant de cette suite ?

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ...

Les principales propriétés de cette suite sont :

- Aucun terme de la suite ne comporte un chiffre supérieur à 3.
- Tous les termes de la suite possèdent un nombre pair de chiffres, sauf le terme initial.
- Les termes de rang impair se terminent par 21 et les termes de rang pair par 11 (là encore à l'exception du terme initial).
- En moyenne, les termes de la suite possèdent 50 % de chiffres 1, 31 % de 2 et 19 % de 3.

Exercice 2.17

Programmez la suite de Conway.
Combien de chiffres contient le 20ème terme (u_{19}) de cette suite ?

2.4. Utilité des suites

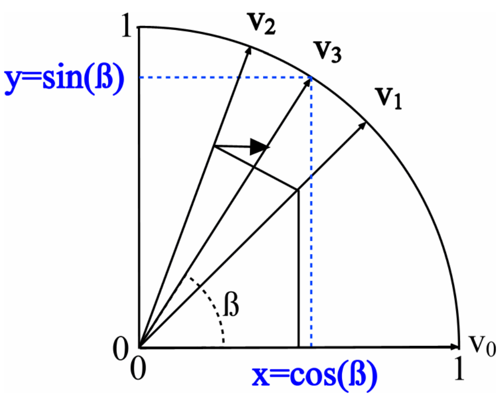
CORDIC

Source du texte : Wikipédia

CORDIC (sigle de ***Co****ordinate* ***R****otation* ***Di****gital* ***C****omputer* : « calcul numérique par rotation de coordonnées ») est un algorithme de calcul des fonctions trigonométriques et hyperboliques, notamment utilisé dans les calculatrices. Il a été décrit pour la première fois en 1959 par Jack E. **Volder**.
CORDIC permet de déterminer le sinus ou le cosinus d'un angle donné en radians sous un format virgule fixe. Pour trouver le sinus ou le cosinus d'un angle β, on recherche la coordonnée x ou y du point du cercle trigonométrique lui correspondant.

CORDIC commence les calculs avec un vecteur $v_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Durant la première itération, le vecteur subit une rotation de 45° dans le sens antihoraire (sens trigonométrique) afin d'obtenir un nouveau vecteur v_1. Des itérations successives doivent engendrer une rotation du vecteur dans la bonne direction. À chaque itération, la rotation est faite d'un angle prédéterminé et moindre que le précédent. Ceci jusqu'à converger vers l'angle voulu.



Plus formellement, à chaque itération i, on calcule un nouveau vecteur grâce à la multiplication du vecteur v_i avec la matrice de rotation R_i :

$$v_{i+1} = R_i\, v_i$$

La matrice de rotation R_i est : $R_i = \begin{pmatrix} \cos(\gamma_i) & -\sin(\gamma_i) \\ \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) \end{pmatrix}$

En factorisant le terme cos γ, on obtient :

$$v_{i+1} = R_i\, v_i = \cos(\gamma_i) \begin{pmatrix} 1 & -\sigma_i \tan(\gamma_i) \\ \sigma_i \tan(\gamma_i) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le facteur σ_i prend les valeurs +1 ou −1 et sert à indiquer le sens de la rotation. Si l'on restreint les choix possibles pour l'angle γ de manière à ce que tan(γ) soit égal à 2^{-i}, alors la multiplication par la tangente devient une multiplication par une puissance de 2. Le calcul devient :

$$v_{i+1} = R_i\, v_i = R_i = \cos(\arctan(2^{-i})) \begin{pmatrix} 1 & -\sigma_i 2^{-i} \\ \sigma_i 2^{-i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En effet :
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cos^2(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)}$
donc :
$\cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$

Notons $K_i = \cos(\arctan(2^{-i}))$. Ces coefficients K_i peuvent être ignorés pendant les itérations et factorisés en un seul coefficient multiplicatif final (dépendant de n) :

$$K(n) = \prod_{i=0}^{n-1} K_i = \prod_{i=0}^{n-1} \cos(\arctan(2^{-i})) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+2^{-2i}}}$$

Après suffisamment d'itérations, l'angle du vecteur sera proche de l'angle β voulu.
La dernière étape consiste à déterminer à chaque itération le sens de rotation. Pour ce faire, on regarde l'angle β_{n+1} actuel du vecteur que l'on soustrait à l'angle désiré. On teste si cette différence est positive (rotation dans le sens horaire) ou négative (sens trigonométrique), de façon à s'approcher de l'angle β.

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \sigma_i\, \gamma_i. \qquad \gamma_i = \arctan(2^{-i})$$

Les valeurs de γ_n sont pré-calculées dans une table mémorisée de valeurs. Toutefois, pour des angles petits, on utilise l'approximation $\arctan(\gamma_n) \approx \gamma_n$ dans une représentation en virgule fixe, permettant ainsi de réduire la taille de cette table.
Comme illustré sur le schéma de la page précédente, le sinus de l'angle β est la coordonnée y du vecteur final v_n, alors que la coordonnée x correspond au cosinus.


HP-35

En 1971, John Stephen **Walther** de Hewlett Packard, a présenté une généralisation de l'algorithme qui fut mise en œuvre dans la calculatrice HP-35. Cette méthode permet de calculer notamment les fonctions hyperboliques mais également d'autres fonctions comme l'exponentielle. La généralisation se présente comme suit :

$$x_{k+1} = x_k - m\, \sigma_k y_k 2^{-k}$$
$$y_{k+1} = y_k + \sigma_k x_k 2^{-k}$$
$$z_{k+1} = z_k - \sigma_k \varepsilon_k$$

avec $m \in \{-1 ; 0 ; 1\}$, ε_k des constantes définies à l'avance et $\sigma_k \in \{-1 ; 1\}$ (en fonction de la valeur de z_k).

Fonctions trigonométriques

On utilise la généralisation avec les paramètres :

$m = 1$
$\varepsilon_k = \arctan(2^{-k})$
$\sigma_k = \text{sgn}(z_k)$
$x_0 = 1$
$y_0 = 0$
$z_0 = \theta$ (en radians)

À la fin de n itérations, on a $x_n \approx \cos(\theta)$ et $y_n \approx \sin(\theta)$. Évidemment, $x_n / y_n \approx \tan(\theta)$.

Cette méthode ne fonctionne que si : $|\theta| < \sum_{0}^{\infty} \arctan(2^{-i}) \approx 1.7$

En pratique cela ne pose pas de problème car les fonctions trigonométriques peuvent toujours être ramenées au cas $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ en exploitant leurs propriétés les plus connues.

Exercice 2.18

Programmez cet algorithme pour calculer $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$, pour $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Nombres pseudo-aléatoires

Un ordinateur ne sait pas générer du hasard. Il construit en fait une suite de nombres entiers qui a l'*apparence* du hasard, mais qui est tout à fait déterministe. Par exemple, la suite suivante est couramment utilisée :

$$u_{n+1} = (16807\ u_n) \bmod (2^{31} - 1)$$

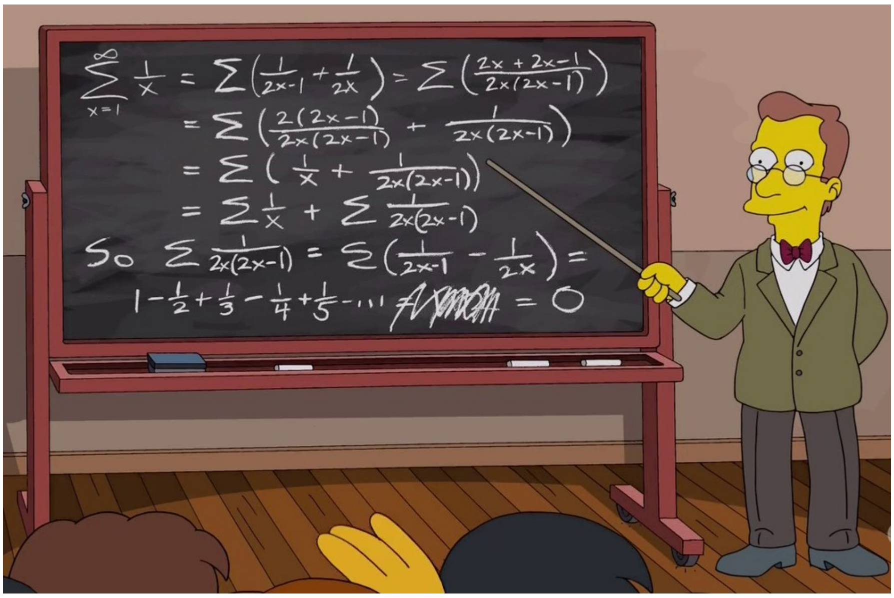
Ces nombres sont ensuite divisés par $2^{31} - 1$, pour obtenir des nombres dans l'intervalle [0 ; 1[.

Comme ce sujet est trop vaste pour être abordé ici, le lecteur pourra se référer au cours **Le hasard des ordinateurs**, sur https://www.apprendre-en-ligne.net/random/

2.5. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les définitions d'une suite ❑ ok
Savoir étudier la convergence d'une suite ❑ ok

3. Séries



3.1. Définition

Définition

1 ou 0 ?
Il n'y a pas de convention claire qui dit si l'indice du premier terme est 0 ou 1. On écrira l'un ou l'autre suivant les circonstances.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
À cette suite, nous associons une nouvelle suite (s_n) formée des sommes suivantes :
$s_0 = u_0$
$s_1 = u_0 + u_1$
$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$
$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
La suite (s_n) est appelée **série** numérique de terme général u_k.
Le terme s_n est la n-ième **somme partielle** de la série (comprenant les n+1 premiers termes de la suite).

Exercice 3.1

Écrivez la troisième somme partielle (s_3) des séries suivantes :

a. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$ **b.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k+1}{k^2+2k+2}$ **c.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1}}{k!}$

Exercice 3.2

Donnez une expression du terme général des séries suivantes :

a. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$ **b.** $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$

c. $\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{7}{10}+\frac{10}{14}+\ldots$ **d.** $\frac{4}{10}+\frac{9}{17}+\frac{16}{26}+\frac{25}{37}+\frac{36}{50}+\ldots$

e. $\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots$

3.2. Convergence des séries

Si la suite (s_n) converge, on dit que la série de terme général u_k **converge** et, dans ce cas, la limite de la suite (s_n) s'appelle **somme** de la série et on la note : $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
Une série qui ne converge pas **diverge**.

Calculer la somme exacte d'une série est, en général, une tâche difficile. Voilà pourquoi nous allons nous intéresser à des tests qui permettent de savoir si une série est convergente ou divergente, sans en calculer explicitement la somme.

Théorème 3.1 (critère de divergence)

Si $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k|\neq 0$, alors la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

Par contraposée, si la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ est convergente, alors $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k|=0$.

La réciproque n'est en général pas vraie.

Si $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k|=0$, **on ne peut pas conclure** que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

Série harmonique

On cherche une série qui est inférieure à la série harmonique et qui diverge. Cela implique que la série harmonique diverge aussi.

La première démonstration de la divergence de la série harmonique est due à Nicole **Oresme**, parue dans *Questiones super geometriam Euclidis* (1360).

Montrons que la **série harmonique** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2\ \text{termes}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{4\ \text{termes}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{8\ \text{termes}}+\underbrace{\left(\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}\right)}_{16\ \text{termes}}+\ldots$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

On voit tout de suite que cette dernière série diverge. Comme la série harmonique est supérieure, elle diverge aussi.

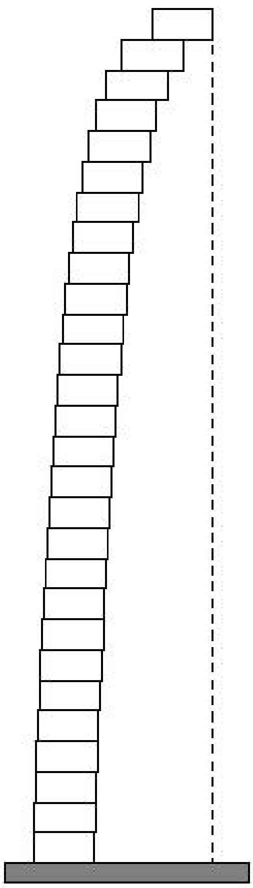
Pourtant $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\to 0$ …

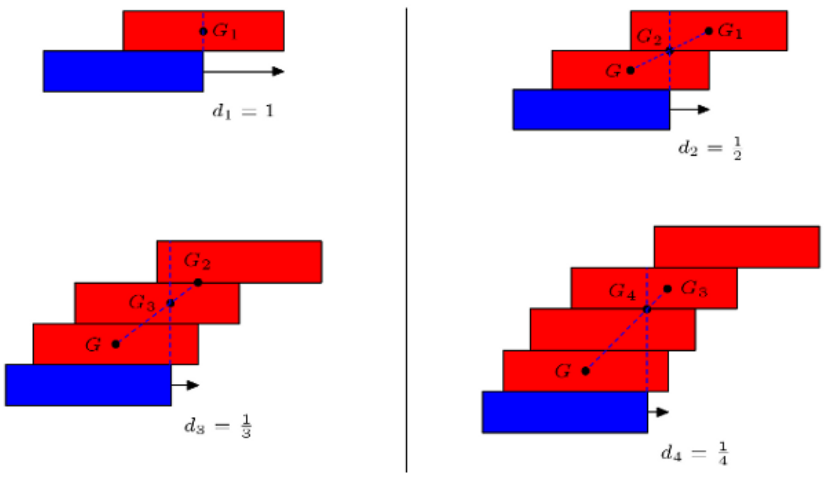
Cela montre bien que $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k|=0$ ne permet pas de conclure que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ converge.

Empilement de dominos

En architecture, un porte-à-faux est une construction qui est supportée par une partie qui est elle-même au-dessus du vide. Avec des pièces de domino on peut faire, par exemple, une structure de type porte-à-faux comme ci-contre.

L'empilement est stable tant que chaque domino est traversé par la verticale du centre de gravité de l'ensemble des dominos qui sont au-dessus de lui.





Pour trouver le plus grand surplomb possible, l'astuce consiste à construire la tour... en commençant par le haut ! Choisissons comme unité la longueur d'un demi-domino :

- avec 2 dominos, il est clair que le surplomb maximal vaut 1 ;
- avec 3 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 ;
- avec 4 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 + 1/3 ;
- avec 5 dominos, le surplomb maximal vaut 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4.

Le surplomb maximal que l'on peut réaliser avec une boîte de 28 dominos vaut donc 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4+ ... + 1/27 soit approximativement 3.92 (un peu moins que la longueur de 2 dominos).
Théoriquement, si l'on dispose d'un nombre suffisant de dominos, on peut réaliser un empilement permettant un surplomb aussi grand qu'on le veut, puisque la série harmonique tend vers l'infini. Lentement, mais sûrement ! Ainsi, avec dix boîtes, on pourrait obtenir un surplomb de 6.2 (un peu plus de trois longueurs de domino). Pour réaliser un surplomb de dix dominos, il faudrait utiliser 272'400'600 dominos...

Exercice 3.3

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculez sa somme.

Aide : remarquez que $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Exercice 3.4

Démontrez que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

Série alternée

Une **série alternée** est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots$

Théorème 3.2

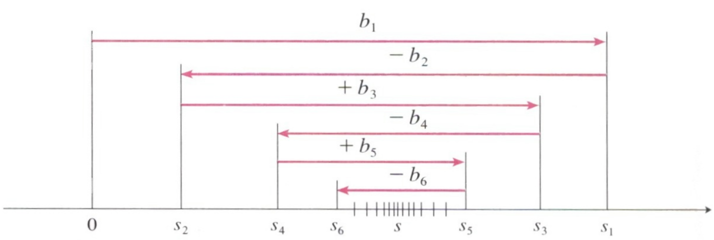
Soit la somme d'une suite alternée $\displaystyle s=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$, avec $b_k > 0$

Si la série alternée satisfait

a. $0 < b_{k+1} < b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

b. $\displaystyle\lim_{k\to\infty} b_k=0$

alors la série est convergente.



La première somme partielle $s_1 = b_1$ est positive. La deuxième $s_2 = b_1–b_2$ est encore positive, car $b_2 < b_1$. La somme suivante $s_2 = b_1–b_2+b_3$ se trouve à droite de s_2, mais à gauche de s_1. Les sommes partielles oscillent vers l'avant et vers l'arrière, et, puisque la distance entre elles tend vers zéro, elles finissent par converger.

Exercice 3.5

La série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ converge-t-elle ?

Exercice 3.6

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3k}{4k-1}$ converge-t-elle ?

Exercice 3.7

La série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{k^3+1}$ converge-t-elle ?

Convergence absolue

Une série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est dite **absolument convergente** lorsque la série des valeurs absolues $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ est convergente.

Théorème 3.3

Si une série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

La réciproque n'est pas vraie. En effet, la série harmonique alternée converge, mais pas la série harmonique.

Démonstration Une des propriétés de la valeur absolue est $|a+b| \leq |a| + |b|$ (inégalité du triangle).

On peut la généraliser pour obtenir : $\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$.

Comme la série est absolument convergente, $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = s \in \mathbb{R}$, la suite $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est réelle et comprise entre $-s$ et s. Elle est donc convergente.

Test de comparaison

L'emploi du **test de comparaison** est subordonné à la connaissance d'un certain nombre de séries $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ qui servent de repère.

Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ soient des séries à termes positifs.

a. Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est convergente et $u_k \leq v_k$, $\forall\, k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

b. Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est divergente et $u_k \geq v_k$, $\forall\, k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

Séries de Riemann

$1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots$ converge si $a > 1$ et diverge si $a \leq 1$.

Exercice 3.8

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2}$ converge-t-elle ?

Quelques séries connues

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots=2$ $\qquad$ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\ldots=1$

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(k-1)(k+1)}+\ldots=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-1)(4k+1)}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$ $\qquad$ $1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{k^4}+\ldots=\frac{\pi^2}{90}$

$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$ $\qquad$ $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots=e$

Séries alternées $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\ln(2)$ $\qquad$ $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4}$

Exemple 1 Soit $v_k=\frac{1}{2^{k-1}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots=2$ et $u_k=\frac{1}{k!}$.

$k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\geqslant\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{k-1\text{ fois}}\cdot1$ et donc $\frac{1}{k!}\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$

Il s'ensuit que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$ converge et vaut moins que 2.

Exemple 2 Soit $v_k=\frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ qui diverge et $u_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$.

$\sqrt{k}\leqslant k$ et donc $\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\frac{1}{k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

Il s'ensuit que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ diverge.

Exercice 3.9

Dites si les séries suivantes convergent ou non :

a. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots$

b. $\frac{1}{1^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$

c. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$

d. $\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\ldots+\frac{1}{11n}+\ldots$

e. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$

f. $\frac{2}{2\cdot3}+\frac{4}{3\cdot4}+\ldots+\frac{2n}{(n+1)(n+2)}+\ldots$

g. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$

Exercice 3.10

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(k)}{k}$ est-elle convergente ?

Théorème 3.4

Jean Le Rond **D'Alembert**
(1717 - 1783)

Critère du quotient (ou **critère de D'Alembert**)

Soit $c=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$.

a. Si $c < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente et donc la série converge.

b. Si $c > 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

c. Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Démonstration La démonstration du test du quotient repose sur la comparaison de la série donnée avec une progression géométrique. Il n'est pas étonnant qu'interviennent des progressions géométriques parce qu'elles sont caractérisées par le fait que le rapport q des termes consécutifs est constant et elles sont convergentes lorsque $|q| < 1$. Ici, le rapport des termes consécutifs n'est pas constant mais il tend vers c, et donc, pour k grand, ce rapport est presque constant et la série converge lorsque $c < 1$.

Exemple 1 Soit la série harmonique : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. $c=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right|=1$

Il y a donc doute.

Exemple 2 Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. $c = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k+1} \right| = 0$

La série est donc convergente.

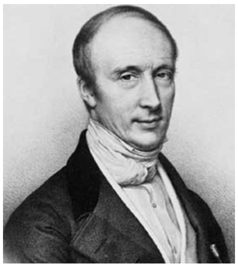
Exercice 3.11 Utilisez le critère du quotient pour déterminer si les séries suivantes convergent.

a. $\frac{1!}{10} + \frac{2!}{100} + \ldots + \frac{n!}{10^n} + \ldots$ **b.** $\frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \ldots + \frac{n+2}{2^n} + \ldots$

c. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{2^n} + \ldots$ **d.** $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)} + \ldots$

e. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$

Théorème 3.5



Augustin Louis **Cauchy**
(1789 - 1857)

Critère de la racine (ou **critère de Cauchy**).

Soit $c = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|}$.

a. Si $c < 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ est absolument convergente et donc la série converge.

b. Si $c > 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge.

c. Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Exercice 3.12 Utilisez le critère de la racine pour dire si les séries suivantes convergent.

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ **b.** $\frac{1}{180} + \frac{1}{120} + \frac{1}{80} + \ldots + \frac{3^n}{180\cdot 2^n} + \ldots$

c. $\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n + \ldots$

Théorème 3.6

Test de l'intégrale

Soit f une fonction continue, positive et jamais croissante dans l'intervalle $[p\ ; \infty[$ et soit $u_k = f(k)$.

La série $\sum_{k=p}^{\infty} u_k$ converge ou diverge, selon que $\int_p^{+\infty} f(x)dx$ existe ou non.

De plus : $\int_p^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{k=p}^{\infty} u_k \le u_p + \int_p^{+\infty} f(x)dx$

Exemple 1 Soit la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

La fonction est donc $f(x) = \frac{1}{x}$ et $p = 1$.

$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} (\ln(t)) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \infty$. La série est donc divergente.

Exemple 2 Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

La fonction est donc $f(x)=\frac{1}{x^2}$ et $p = 1$.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right)=1 .$$

La série est donc convergente et comprise entre 1 et 2.

Exercice 3.13 Démontrez le critère de comparaison avec une intégrale.

Indication :
Approchez l'aire sous la courbe par des rectangles de largeur 1.

Exercice π Utilisez le test de l'intégrale pour déterminer si ces séries convergent.

a. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\ldots$

b. $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\ldots$

c. $\sin(\pi)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{9}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$

d. $1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}+\ldots$

Exercice 3.15 Les séries suivantes, dont on donne le terme général u_k, $k \in \mathbb{N}^*$, convergent-elles ? À vous de trouver le bon critère pour répondre à la question.

a. $u_k=\frac{1}{(k+1)^2-1}$

b. $u_k=\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

c. $u_k=\frac{k^2}{2k^2+1}$

d. $u_k=\left(\frac{3k}{3k+1}\right)^k$

e. $u_k=\left(\frac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{k}{2}}$

f. $u_k=\frac{k^3}{e^k}$

g. $u_k=\frac{k!}{2^k+1}$

h. $u_k=\frac{1}{\ln(k)}$

i. $u_k=\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

j. $u_k=\frac{k!}{10^k}$

k. $u_k=\frac{k+1}{k\sqrt{3k-2}}$

l. $u_k=\frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$

m. $u_k=\frac{2^{k-1}}{k^k}$

n. $u_k=\sqrt[k+1]{10}$

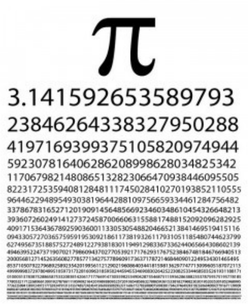
o. $u_k=\frac{1}{10k+1}$

p. $u_k=\frac{(k+1)!}{3^{k+2}+7}$

q. $u_k=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

r. $u_k=\frac{\ln(k)}{k^3}$

3.3. Une application : le calcul de π



Jusqu'en 1400 environ, la précision des approximations de π n'excédait pas les 10 décimales. Les progrès en matière de calcul intégral et de séries vont permettre d'améliorer cette précision.

Les séries permettent d'approcher π avec d'autant plus de précision qu'on utilise de termes de la série pour le calcul. Vers 1400, **Madhava de Sangamagrama** trouve ce qui constitue, en langage moderne, le développement de la fonction arc tangente (redécouvert par James **Gregory** et Gottfried Wilhelm **Leibniz** au 17e siècle) :

Formule de Madhava-Leibniz-Grégory

$$\pi=\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\ldots$$

Cette formule est moyennement efficace à calculer les décimales de π (cinq décimales seulement pour 500'000 fractions).

Formule de Nilakantha

$$\pi=3+\frac{4}{2\cdot3\cdot4}-\frac{4}{4\cdot5\cdot6}+\frac{4}{6\cdot7\cdot8}-\frac{4}{8\cdot9\cdot10}+\ldots$$

Cette formule due au mathématicien hindou Kelallur **Nilakantha** Somayaji (1444–1544) donne 11 décimales pour 10'000 fractions.

Srinivasa Aiyangar **Ramanujan**
(1887 - 1920)

Au début du 20e siècle, le mathématicien indien Srinivasa **Ramanujan** a trouvé de nombreuses nouvelles formules faisant intervenir π ; certaines d'entre elles sont remarquables par leur élégance et leur profondeur mathématique. L'une de ces formules est la série suivante :

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

La formule ci-dessous, possédant un lien étroit avec celle énoncée ci-dessus, a été découverte par David et Gregory **Chudnovsky** en 1987 :

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

Cette formule donne 14 nouvelles décimales de π à chaque terme. Vers la fin des années 1980, les frères **Chudnovsky** l'ont utilisée pour battre plusieurs records de décimales de π calculées. Elle demeure la formule la plus utilisée pour calculer π sur des ordinateurs personnels.
Le 8 octobre 2014, le nouveau record est 13'300 milliards de décimales. Pour effectuer ce calcul, 208 jours ont été nécessaires avec un ordinateur muni d'un double processeurs 2.6 Ghz Xeon E5-4650L, 192Gb DDR3 de mémoire vive accompagnés de 24 disques durs de 4 To et 30 disques durs de 3 To soit 192 To. Il faut dire que la seule contrainte est l'espace disque pour conserver le résultat !

3.4. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître la définition d'une série ❑ ok
Connaître les critères de convergence d'une série et savoir les utiliser ❑ ok

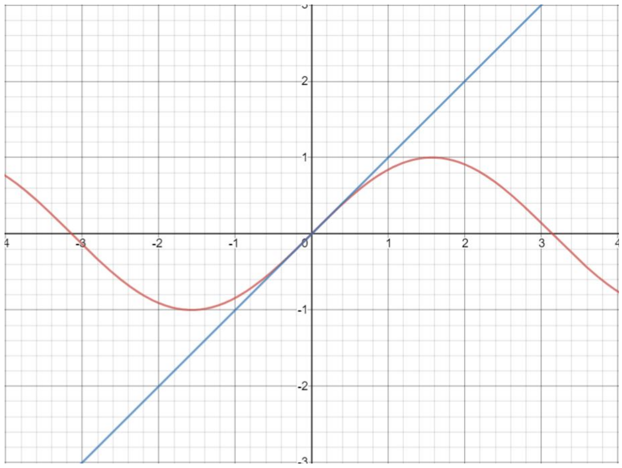
4. Approximation de fonctions

4.1. Un peu d'histoire

L'idée de représenter certaines fonctions comme des sommes de séries entières (voir § 4.3) revient à **Newton**, et la série générale de **Taylor** était connue du mathématicien écossais James **Gregory** en 1668 et du mathématicien suisse Johann **Bernoulli** en 1690. Colin **Maclaurin** rendit les séries éponymes populaires dans son traité d'analyse *Treatise of Fluxions* publié en 1742.

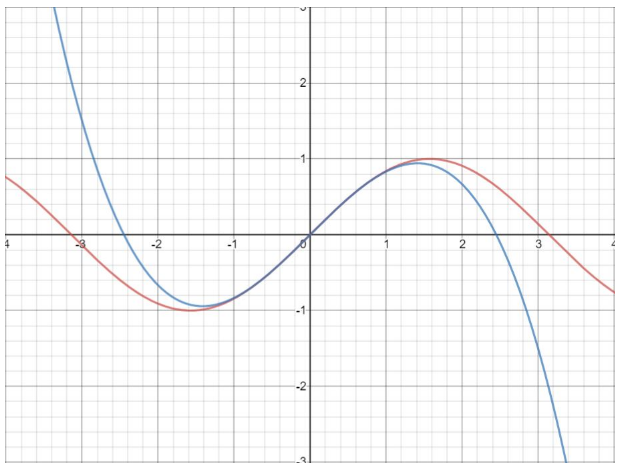
4.2. Un exemple introductif

Souvenez-vous. Lorsque vous avez étudié les limites on avait remarqué que $\sin(x) \approx x$ quand x est « proche de 0 ». On peut le vérifier facilement avec une calculatrice, ou mieux encore en superposant les graphes des deux fonctions :



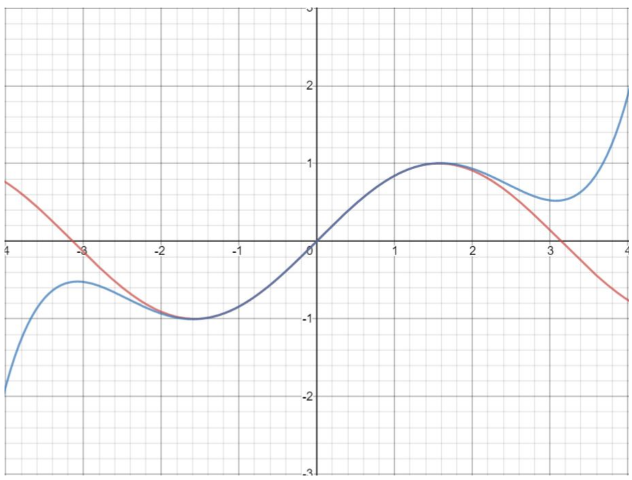
Approximation de $\sin(x)$ en $x = 0$ par le polynôme $f(x) = x$.

On voit bien qu'au voisinage de 0, les courbes sont presque indiscernables et que plus on s'éloigne, plus l'approximation devient mauvaise. On peut trouver un polynôme (on verra comment plus loin), qui épouse mieux les formes de la fonction sinus.



Approximation de $\sin(x)$ en $x = 0$ par le polynôme $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$

Encore mieux :



Approximation de sin(x) en $x = 0$ par le polynôme $f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$.

L'objet de ce chapitre sera d'étudier comment trouver de tels polynômes.

4.3. Séries entières

Une **série entière** est une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ où x est une variable et les a_k sont des constantes, appelées les *coefficients* de la série.

Chaque fois qu'une valeur est attribuée à x, la série entière est une série de constantes qui peut être testée quant à sa convergence ou à sa divergence.

Remarquez que f ressemble à un polynôme. La seule différence est que f a un nombre infini de termes.

La somme de la série est une fonction $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dont le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série converge.

Théorème 4.1

Il existe un nombre positif r, appelé **rayon de convergence** de la série, tel que :

- la série entière converge absolument si $|x| < r$,
- la série entière diverge si $|x| > r$.

Dans la plupart des cas, le rayon de convergence peut être déterminé par le test du quotient, mais ce test échoue toujours quand x est l'une des extrémités de l'intervalle de convergence. Il faut donc un autre test pour savoir ce qui se passe aux extrémités.

Marche à suivre

Étape 1 : calculer $A=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ ou $C=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$.

Étape 2 : calculer le rayon de convergence (r) de la série : $r=\frac{1}{A}$ ou $r=\frac{1}{C}$.

Nous savons alors que :
- la série entière converge si $-r < x < r$
- la série entière diverge sinon.

Étape 3 : étudier la convergence de la série entière quand $x = -r$ et $x = r$.

Étape 4 : écrire le résultat final.

Exemple Déterminons le rayon et l'intervalle de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k x^k}{\sqrt{k+1}}$.

Test du quotient Soit $u_k = \frac{(-3)^k x^k}{\sqrt{k+1}}$

Alors $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{(-3)^{k+1} x^{k+1}}{\sqrt{k+2}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{(-3)^k x^k}\right| = 3\sqrt{\frac{k+1}{k+2}}|x| \to 3 \cdot |x|$ si $k \to \infty$.

La série est donc convergente si $3 \cdot |x| < 1$ et divergente pour $3 \cdot |x| > 1$.

Rayon de convergence Elle converge donc pour $|x| < \frac{1}{3}$ et diverge pour $|x| > \frac{1}{3}$. Cela signifie que le rayon de convergence est $r = \frac{1}{3}$.

Maintenant que l'on sait la série converge dans l'intervalle $]-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}[$, on regarde ce qui se passe aux extrémités de l'intervalle.

Si $x = -\frac{1}{3}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k \left(-\frac{1}{3}\right)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, qui est divergente.

D'après le test des séries alternées (théorème 3.2).

Si $x = \frac{1}{3}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$, qui est convergente.

Finalement, la série proposée converge pour $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$.

Exercice 4.1 En appliquant la marche à suivre ci-dessus, étudiez la convergence des séries entières ci-dessous :

a. $\sum_{n\geq 0} \frac{4}{n!} x^n$ **b.** $\sum_{n\geq 0} (2^n + 1) x^n$ **c.** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n} x^n$

d. $\sum_{n\geq 0} \frac{3}{(n+1)^n} x^n$ **e.** $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

Exercice 4.2 Trouvez l'intervalle de convergence des séries entières suivantes.

a. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$ **b.** $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

c. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \frac{x^4}{4\cdot 5} + \ldots$ **d.** $\frac{x}{5} - \frac{x^2}{2\cdot 5^2} + \frac{x^3}{3\cdot 5^3} - \frac{x^4}{4\cdot 5^4} + \ldots$

e. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$ **f.** $\left(\frac{x}{\ln(2)}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ln(3)}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ln(4)}\right)^4 + \ldots$

4.4. Développement des fonctions en séries entières

Si vous vous souvenez des progressions géométriques, vous savez que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{, pour } |x| < 1.$$

On voit que la fonction $\frac{1}{1-x}$ peut s'exprimer sous la forme d'une série entière. Est-ce possible pour toutes les fonctions ? Faisons l'hypothèse que f est une fonction quelconque qui peut être écrite sous la forme d'une série entière :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots \text{, pour } |x-a| < r.$$

Essayons de déterminer comment doivent être les coefficients c_n en termes de f.

Avant tout, remarquons qu'en posant $x = a$ dans l'équation ci-dessus, tous les termes après le premier sont nuls et il ne reste que $f(a) = c_0$.

Dérivons la série ci-dessus terme à terme :

Brook **Taylor**
(1685 - 1731)

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots \text{, pour } |x-a| < r.$$

Posons $x = a$: $f'(a) = c_1$ et dérivons une deuxième fois :

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + 4\cdot 5(x-a)^3 + \dots \text{, pour } |x-a| < r.$$

Posons $x = a$: $f''(a) = 2c_2$ et dérivons une troisième fois :

$$f^{(3)}(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5(x-a)^2 + 4\cdot 5\cdot 6(x-a)^3 + \dots \text{, pour } |x-a| < r.$$

Posons $x = a$: $f^{(3)}(a) = 2\cdot 3c_3$

La régularité est claire : si nous continuons à dériver et à faire la substitution $x = a$, nous obtiendrons :

$$f^{(k)}(a) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot k\cdot c_k = k!\cdot c_k$$

Colin **Maclaurin**
(1698 - 1746)

d'où nous tirons $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Ce développement nous permet de tirer la conclusion suivante :

Si f admet une représentation en série entière en a, c'est-à-dire si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \text{, } |x-a| < r,$$

alors ses coefficients sont donnés par la formule $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

On parle aussi de **développement illimité** de Taylor, par opposition au développement limité que est un polynôme de degré fini.

Nous obtenons **la série de Taylor de la fonction *f* en *a*** :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Dans le cas particulier où $a = 0$ (un cas qui se présente extrêmement souvent), on parle de **série de Maclaurin**.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Exercice 4.3

Déterminez la série de Maclaurin des fonctions suivantes ainsi que le rayon de convergence.

a. $\sin(x)$ **b.** e^x **c.** $\ln(1+x)$

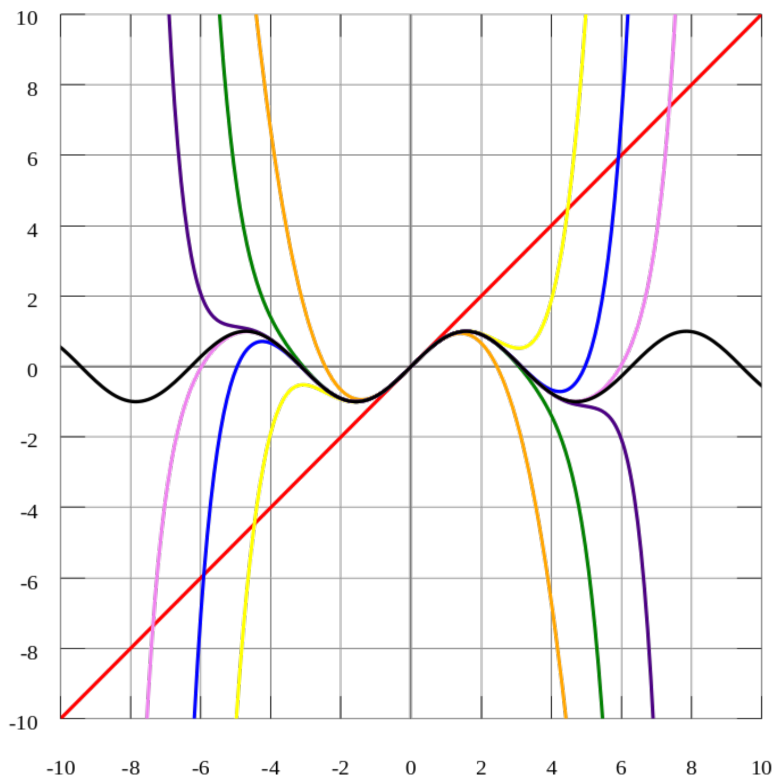
Exercice 4.4

Écrivez les réponses de l'exercice 4.3 en utilisant le symbole Σ.

L'image ci-dessous montre la courbe de $f(x) = \sin(x)$ (en noir) et les approximations par les polynômes de Maclaurin selon le degré **1**, **3**, **5**, **7**, **9**, **11** et **13**.

On voit que plus on s'éloigne de 0, plus la qualité de l'approximation se détériore.

Autrement dit, si on appelle *reste de la série* la valeur $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, on constate que le reste augmente quand x s'éloigne de 0.



Plus le degré du polynôme de Taylor augmente, plus sa courbe se rapproche de la courbe de la fonction f.

Théorème 4.2

Inégalité de Taylor

Soit $T_n(x)$ le développement limité de Taylor de degré n et $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ le reste de la série.
Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour $|x - a| < r$, alors le reste $R_n(x)$ de la série de Taylor satisfait l'inégalité :

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \quad \text{pour } |x - a| < r$$

Démonstration Posons pour commencer $n = 1$. On suppose $f''(x) \leq M$.

On trouve alors $\int_a^x f''(t)\,dt \leq \int_a^x M\,dt$

Donc $f'(x) - f'(a) \leq M(x - a)$, d'où $f'(x) \leq f'(a) + M(x - a)$

De là : $\int_a^x f'(t)\,dt \leq \int_a^x (f'(a) + M(t-a))\,dt$

$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x - a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \leq M\frac{(x-a)^2}{2}$$

Mais $R_1(x) = f(x) - T_1(x)$
$= f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$
$= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

Donc : $R_1(x) \leq \frac{M}{2}(x-a)^2$

La même démarche menée à partir de $f''(x) \geq -M$ conduit à :

$$R_1(x) \geq -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

Finalement : $|R_1(x)| \leq \frac{M}{2}|x-a|^2$.

Ceci démontre l'inégalité de Taylor dans le cas $n = 1$. Le résultat pour n quelconque est obtenu de la même façon en intégrant $n + 1$ fois.

Q. E. D.

Exercice 4.5

Donnez le développement de Taylor d'ordre n au voisinage de a des fonctions ci-dessous.
Donnez aussi une estimation de l'erreur maximale commise lorsque cette approximation est donnée dans l'intervalle I.

a. $f(x) = \ln(2x + 5)$, avec $n = 5$, $a = 0$ et $I = [-2 ; 2]$

b. $f(x)=\frac{1}{x^2}+4$, avec $n = 4$, $a = -2$ et $I = [-3 ; -1]$

desmos

Utilisez un traceur de courbes pour visualiser la qualité des approximations.

Exercice 4.6

Soit la fonction $f(x) = \ln(x)$. Calculez les polynômes de degrés 1, 2, 3, 4 et 5 qui approchent au mieux cette fonction autour de $a = 1$.
Utilisez un traceur de courbes pour visualiser les résultats.

Exercice 4.7

Donnez, en utilisant le symbole Σ, les séries de Taylor des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\frac{1}{4x}$ en $a = 5$

b. $f(x)=\cos(2x)$ en $a = \frac{\pi}{4}$

Exercice 4.8

Estimez la valeur du nombre e grâce aux séries.

Exercice 4.9

Pour cet exercice, il est pratique de savoir que si on a une série alternée convergente (voir théorème 3.2), alors $|R_n| < b_{n+1}$.

Approchez ln(1.1), grâce à une série de Maclaurin, avec cinq chiffres significatifs.

Exercice 4.10

Calculez π avec trois décimales exactes, en utilisant un développement limité de $f(x) = \arcsin(x)$ et l'égalité $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Exercice 4.11

Les séries de Taylor et Maclaurin sont également utiles pour calculer des limites non triviales.
Sachant que $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, calculez $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 4.12 Démontrez par l'absurde que e est irrationnel, sachant que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots .$$

Procédez par encadrement.

4.5. Démonstration de la formule d'Euler

Nous avons vu cette formule dans le cours consacré aux nombres complexes.

Leonhard **Euler**
(1701-1783)

Nous allons démontrer grâce à la formule de Taylor l'égalité $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, connue sous le nom de *formule d'Euler*.

Le développement en série de la fonction *exp* de la variable réelle x peut s'écrire :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

et s'étend à tout nombre complexe x : le développement en série de Taylor reste absolument convergent et définit l'exponentielle complexe.

En particulier pour $x = i\phi$ avec ϕ réel :

$$e^{i\phi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^n \phi^n}{n!}$$

Cette série, séparée en deux, devient, en utilisant que $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$:

$$e^{i\phi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

On voit ainsi apparaître les développements en série de Taylor des fonctions cosinus et sinus :

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(\phi) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ce qui, en remplaçant dans l'expression précédente de $e^{i\phi}$, donne bien :

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi).$$

Q. E. D.

En posant $\phi = \pi$, on obtient ce que beaucoup considèrent comme la plus belle formule des mathématiques :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Extraordinaire équation qui met en relation les constantes les plus importantes des mathématiques : e, π, 1 et 0.

4.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Développer une fonction en une série entière ❑ ok
Calculer le rayon de convergence d'une série entière ❑ ok

Solutions des exercices

Chapitre 1

1.1. $t_{10} = 53$

1.2. 99'450

1.3. $t_1 = -27$, $r = 3$

1.5. 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61

1.6. $t_1 = 10$, $r = 1.5$

1.7. $t_1 = 21$, $t_2 = 28$, $t_3 = 35$

1.8. 105°

1.9. $t_{10} = 307.546875$ ou $t_{10} = -307.546875$

1.10. 6.4, 9.6, 14.4, 21.6

1.11. $r=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

1.12. 8, 40, 200

1.13. **a.** 16'577 fr. **b.** 2024

1.14. $-\frac{2}{3};\frac{4}{3};-\frac{8}{3}$

1.15. $S_n=10\frac{10^n-1}{81}-\frac{n}{9}$

1.16. **b.** $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$

1.17. 200 cm^2

1.18. **a.** $1.84\cdot 10^{19}$ grains de blé **b.** env. 45 cm

1.19. **a.** 0.165 m **b.** 34/3 m

1.20. 8 cm

1.21. $S_\infty=\frac{20}{9}$

1.22. **a.** $a_k = 3^{k-1}$ **b.** 3^{14} **c.** 7'174'453
d. $b_k=\frac{3^{k-1}}{4^k}$ **e.** 4.45% **f.** 0.8665
g. 0

1.23. **a.** ∞ **b.** $\frac{2\sqrt{3}}{5}c^2$

1.24. **a.** ∞ **b.** 0

Chapitre 2

2.2. **a.** alternée **b.** décroissante
c. décroissante
d. croissante et décroissante
e. alternée **f.** croissante

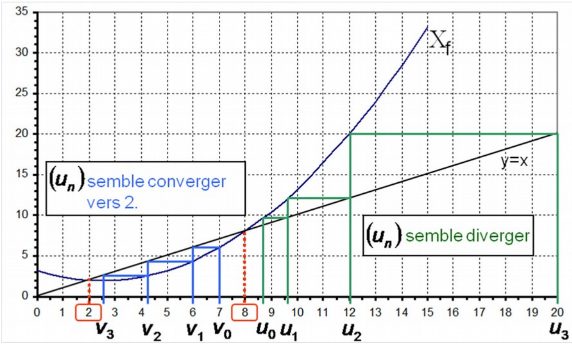
2.3. **a.** bornée **b.** bornée **c.** minorée
d. bornée **e.** bornée **f.** minorée

2.5. **a.** 2 **b.** diverge **c.** diverge
d. 0 **e.** 0 **f.** 0

2.6. Les suites convergent vers...
a. 1 **b.** diverge **c.** 0
d. 1 **e.** 1 **f.** 1

2.7. non

2.9. les limites possibles sont 2 et 8.



2.10. converge vers 0.7391

2.11. https://www.youtube.com/watch?v=7dNF29NKhoM

2.13. **b.** 25 ; 52 **c.** 64 **d.** 15

2.15. Plus long vol 179 avec comme germe 871
Altitude maximale 250'504 avec comme germe 703

2.16. le nombre d'or : 1.61803398875...

2.17. 302

Chapitre 3

3.1. **a.** $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}$ **b.** $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}$

c. $\frac{2}{1}-\frac{4}{1}+\frac{8}{2}-\frac{16}{6}$

3.2. **a.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ **b.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k-1}}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k-2}{4k-2}$ **d.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2+1}$

e. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\prod_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{2i}$

3.3. la somme vaut 1

3.5. oui

3.6. non

3.7. oui

3.8. oui

3.9. **a.** non **b.** oui **c.** non **d.** non
e. non **f.** non **g.** oui

3.10. non

3.11. **a.** diverge **b.** converge **c.** diverge
d. converge **e.** il y a doute

3.12. **a.** converge **b.** diverge **c.** converge

3.14. **a.** diverge **b.** converge **c.** converge
d. converge si a>1, diverge sinon

3.15. **a.** converge **b.** converge **c.** diverge
d. diverge **e.** converge **f.** converge
g. diverge **h.** diverge **i.** converge
j. diverge **k.** diverge **l.** diverge
m. converge **n.** diverge **o.** diverge
p. diverge **q.** diverge **r.** converge

Chapitre 4

4.1. **a.** converge $\forall\, x$

b. converge si $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

c. converge $\forall\, x$ **d.** converge $\forall$ x

e. converge si $-1< x\le 1$

4.2. **a.** $-1<x<1$ **b.** $-1<x\le 1$
c. $-1\le x\le 1$ **d.** $-5<x\le 5$
e. $-1\le x\le 1$ **f.** $\forall\, x$

4.3. **a.** $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$ $\quad |x|<+\infty$

b. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$ $\quad |x|<+\infty$

c. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$ $\quad -1<x<1$

4.4. **a.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

b. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$

4.5. **a.**

$$\ln(5)+\frac{2x}{5}-\frac{2x^2}{25}+\frac{8x^3}{375}-\frac{4x^4}{625}+\frac{32x^5}{15625}+R_5(x)$$

$$R_5(x)\le\frac{32x^6}{3}$$

b.

$$\frac{17}{4}+\frac{x+2}{4}+\frac{3(x+2)^2}{16}+\frac{(x+2)^3}{8}+\frac{5(x+2)^4}{64}+R_4(x)$$

$$R_4(x)\le 6|x+2|^5$$

4.6. x-1, $x-1-\frac{(x-1)^2}{2}$, $x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}$,

$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}$,

$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}$

4.7. **a.** $\frac{1}{20}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x-5)^k}{5^k}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2k-1}$

4.11. 1